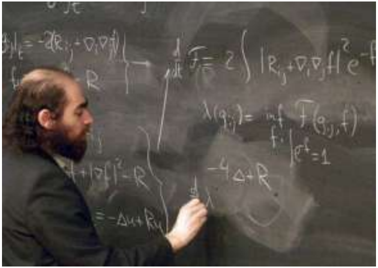
A Conjectura de Poincaré: passado, presente e futuro.

Vanderson Lima (UFRGS)

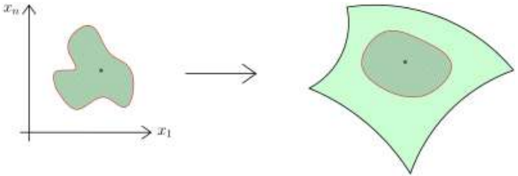
XI Bienal de Matemática - 30/07/2024



Variedades

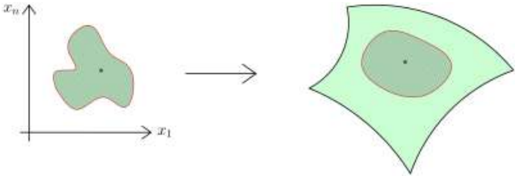
Variedades

- Uma *variedade* de dimensão n é um espaço localmente descrito por n coordenadas.



Variedades

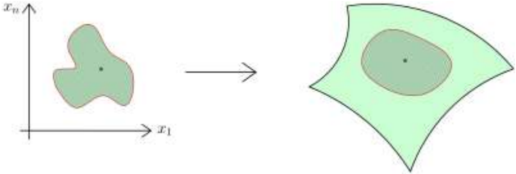
- Uma *variedade* de dimensão n é um espaço localmente descrito por n coordenadas.



- Usaremos a notação M^n e o termo n-variedade.

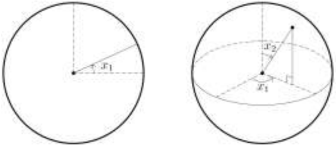
Variedades

- Uma *variedade* de dimensão n é um espaço localmente descrito por n coordenadas.



- Usaremos a notação M^n e o termo n-variedade.

- Exemplos:
  (a) $\mathbb{R}^n$.
  (b) (A n-esfera): $\mathbb{S}^n = \left\{p \in \mathbb{R}^{n+1};\, |p| = 1\right\}$.



Aplicações

Aplicações

- Subáreas da matemática: Topologia, Geometria Diferencial, Sistemas Dinâmicos, $\cdots$

Aplicações

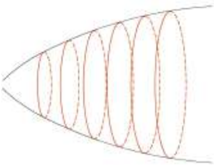
- Subáreas da matemática: Topologia, Geometria Diferencial, Sistemas Dinâmicos,$\cdots$
- Computação gráfica: plot de imagens.

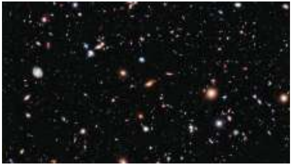
Aplicações

- Subáreas da matemática: Topologia, Geometria Diferencial, Sistemas Dinâmicos,$\cdots$
- Computação gráfica: plot de imagens.
- Mecânica clássica: espaços de configurações/espaços de fase (posição + velocidade).

Aplicações

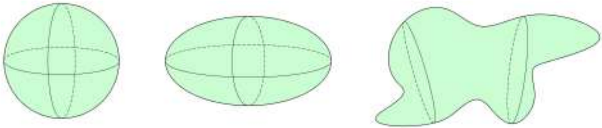
- Subáreas da matemática: Topologia, Geometria Diferencial, Sistemas Dinâmicos,$\cdots$
- Computação gráfica: plot de imagens.
- Mecânica clássica: espaços de configurações/espaços de fase (posição $+$ velocidade).
- Relatividade Geral:
    (a) Um espaço-tempo é uma 4-variedade.
    (b) Em modelos que descrevem o universo, em um instante de tempo o espaço é uma 3-variedade.



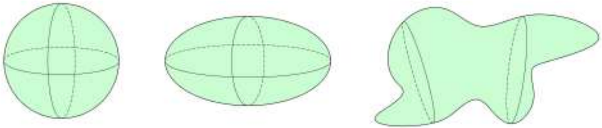


Classificação de variedades

Classificação de variedades

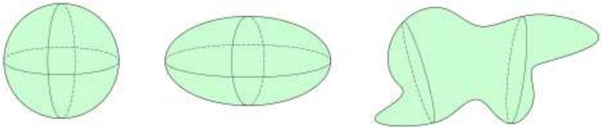


Classificação de variedades



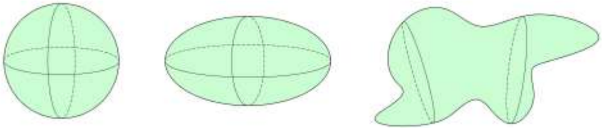
- Duas variedades M^k e N^ℓ são *homeomorfas* se existe uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de M^k e N^ℓ ($\Rightarrow k = \ell$).

Classificação de variedades

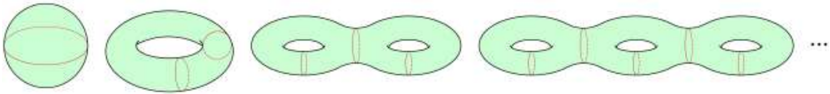


- Duas variedades M^k e N^ℓ são *homeomorfas* se existe uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de M^k e N^ℓ ($\Rightarrow k = \ell$).
- Toda curva (1-variedade) é homeomorfa ao círculo ou à reta. Estes espaços não são homeomorfos.

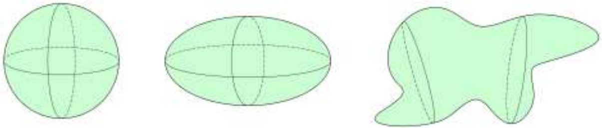
Classificação de variedades



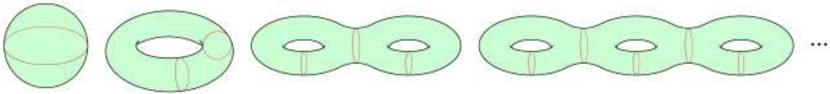
- Duas variedades M^k e N^ℓ são *homeomorfas* se existe uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de M^k e N^ℓ ($\Rightarrow k = \ell$).
- Toda curva (1-variedade) é homeomorfa ao círculo ou à reta. Estes espaços não são homeomorfos.



Classificação de variedades

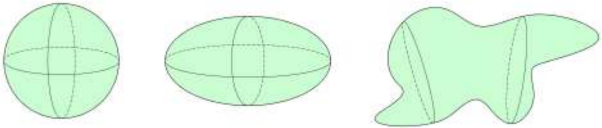


- Duas variedades M^k e N^ℓ são *homeomorfas* se existe uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de M^k e N^ℓ ($\Rightarrow k = \ell$).
- Toda curva (1-variedade) é homeomorfa ao círculo ou à reta. Estes espaços não são homeomorfos.

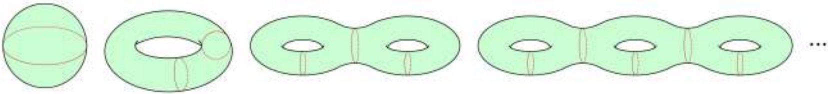


- Toda superfície (2-variedade) fechada (e orientável) é homeormorfa a uma da lista acima. Duas destas não são homeomorfas.

Classificação de variedades



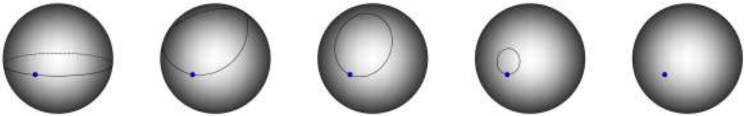
- Duas variedades M^k e N^ℓ são *homeomorfas* se existe uma correspondência contínua um-a-um entre os pontos de M^k e N^ℓ ($\Rightarrow k = \ell$).
- Toda curva (1-variedade) é homeomorfa ao círculo ou à reta. Estes espaços não são homeomorfos.



- Toda superfície (2-variedade) fechada (e orientável) é homeormorfa a uma da lista acima. Duas destas não são homeomorfas.
- (Década de 50) Para $n \geq 4$ não existe um algoritmo capaz de determinar em tempo finito se duas variedades são homeomorfas.

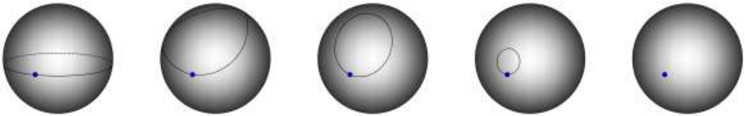
Variedades simplesmente conexas

Variedades simplesmente conexas



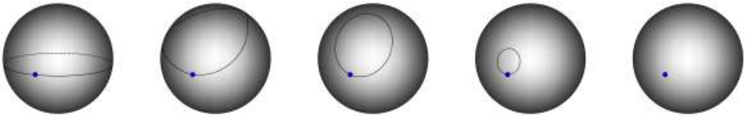
- Uma variedade M é dita simplesmente conexa se todo laço em M pode ser deformado continuamente em um ponto.

Variedades simplesmente conexas

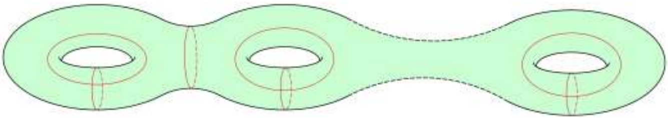


- Uma variedade M é dita simplesmente conexa se todo laço em M pode ser deformado continuamente em um ponto.
- Exemplo principal: $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa para $n \geq 2$.

Variedades simplesmente conexas



- Uma variedade M é dita simplesmente conexa se todo laço em M pode ser deformado continuamente em um ponto.
- Exemplo principal: $\mathbb{S}^n$ é simplesmente conexa para $n \geq 2$.
- Com exceção de $\mathbb{S}^2$, as superfícies fechadas não são simplesmente conexas.



A conjectura de Poincaré

A conjectura de Poincaré

(Henri Poincaré, 1904): Seja M^3uma variedade fechada e simplesmente conexa. Então M^3 é homemomorfa a $\mathbb{S}^3$.

A conjectura de Poincaré

(Henri Poincaré, 1904): Seja M^3uma variedade fechada e simplesmente conexa. Então M^3 é homemomorfa a $\mathbb{S}^3$.

- Versão para $n \geq 4$: $M^n \simeq \mathbb{S}^n \Rightarrow M^n$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$;

A conjectura de Poincaré

(Henri Poincaré, 1904): Seja M^3uma variedade fechada e simplesmente conexa. Então M^3 é homemomorfa a $\mathbb{S}^3$.

- Versão para $n \geq 4$: $M^n \simeq \mathbb{S}^n \Rightarrow M^n$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$;
  $(n \geq 5)$ Stephen Smale, 1961;
  $(n = 4)$ Michael Freedman, 1982.

A conjectura de Poincaré

(Henri Poincaré, 1904): Seja M^3uma variedade fechada e simplesmente conexa. Então M^3 é homemomorfa a $\mathbb{S}^3$.

- Versão para $n \geq 4$: $M^n \simeq \mathbb{S}^n \Rightarrow M^n$ é homeomorfa a $\mathbb{S}^n$;
  ($n \geq 5$) Stephen Smale, 1961;
  ($n = 4$) Michael Freedman, 1982.
- Versão original ($n = 3$): Grigori Perelman em 2002/2003.



Figure: Smale (esquerda), Freedman (centro) e Perelman (direita).

Métricas Riemannianas

Métricas Riemannianas

- Geometria Euclideana: descrita pelo produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$,

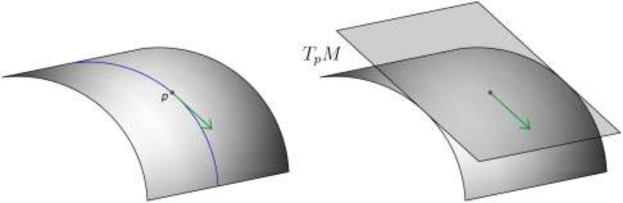
$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad \left(\langle e_i, e_j\rangle\right) = \text{matriz identidade.}$$

Métricas Riemannianas

- Geometria Euclideana: descrita pelo produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad (\langle e_i, e_j\rangle) = \text{matriz identidade.}$$

- Variedades: O *espaço tangente* T_pM^n é um espaço vetorial de dimensão n.

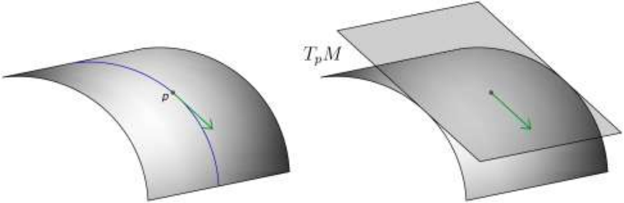


Métricas Riemannianas

- Geometria Euclideana: descrita pelo produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad (\langle e_i, e_j\rangle) = \text{matriz identidade.}$$

- Variedades: O *espaço tangente* T_pM^n é um espaço vetorial de dimensão n.



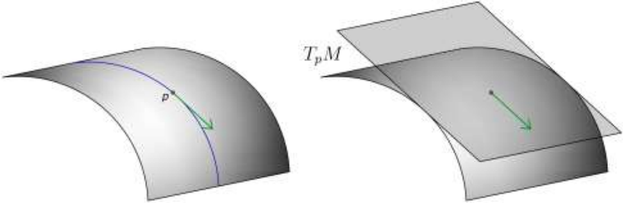
- Métrica Riemanniana: escolha de produto interno $g(p)$ em T_pM, que varia suavemente com p: em coordenadas, $p \mapsto g_{ij}(p)$.

Métricas Riemannianas

- Geometria Euclideana: descrita pelo produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i, \quad (\langle e_i, e_j\rangle) = \text{matriz identidade}.$$

- Variedades: O *espaço tangente* T_pM^n é um espaço vetorial de dimensão n.



- Métrica Riemanniana: escolha de produto interno $g(p)$ em T_pM, que varia suavemente com p: em coordenadas, $p \mapsto g_{ij}(p)$.
- *g* mune *M* de uma "geometria": nos permite introduzir quantidades como ângulos, comprimentos, etc.

Exemplos de métricas Riemannianas

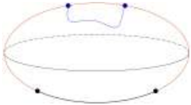
Exemplos de métricas Riemannianas

- Abundância: Toda variedade admite uma infinidade de métricas Riemannianas não equivalentes entre si.

Exemplos de métricas Riemannianas

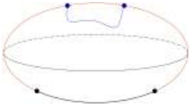
- Abundância: Toda variedade admite uma infinidade de métricas Riemannianas não equivalentes entre si.

  - Geodésicas: curvas que minimizam o comprimento localmente.



Exemplos de métricas Riemannianas

- Abundância: Toda variedade admite uma infinidade de métricas Riemannianas não equivalentes entre si.
  - Geodésicas: curvas que minimizam o comprimento localmente.



- A esfera redonda: $g(p)(u,v) = \langle u, v \rangle$.

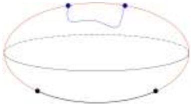
Em $\mathbb{S}^2$:

soma dos ângulos internos $= \pi +$ area.

Exemplos de métricas Riemannianas

- Abundância: Toda variedade admite uma infinidade de métricas Riemannianas não equivalentes entre si.

  - Geodésicas: curvas que minimizam o comprimento localmente.

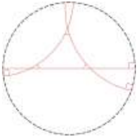


- A esfera redonda: $g(p)(u,v) = \langle u, v \rangle$.

Em $\mathbb{S}^2$:

soma dos ângulos internos $= \pi +$ area.

- O espaço hiperbólico $\mathbb{H}^n$: $\{p \in \mathbb{R}^n;\ |p| < 1\},\ g(p)(u,v) = \dfrac{4}{(1-|p|^2)^2}\langle u, v\rangle$.

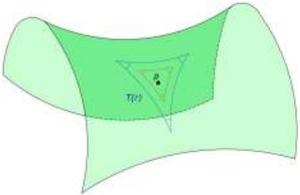


Em $\mathbb{H}^2$:

soma dos ângulos internos $= \pi -$ area.

Curvatura

Curvatura

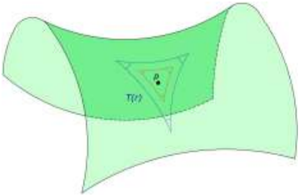


Curvatura em dimensão 2 (Gauss) :

$S =$ soma dos ângulos internos, $A =$ área;

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{S(r) - \pi}{A(r)}.$$

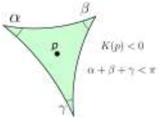
Curvatura

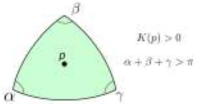


Curvatura em dimensão 2 (Gauss) :

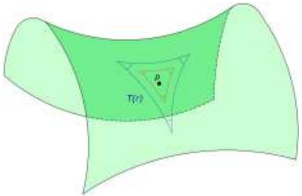
$S =$ soma dos ângulos internos, $A =$ área;

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{S(r) - \pi}{A(r)}.$$





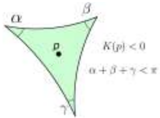
Curvatura

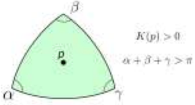


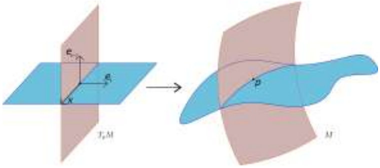
Curvatura em dimensão 2 (Gauss) :

$S =$ soma dos ângulos internos, $A =$ área;

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{S(r) - \pi}{A(r)}.$$







Curvatura de Ricci :

$X, e_1, \ldots, e_{n-1}$ ortonormonais;

$$\mathrm{Ric}(X,X) = \sum_{i=1}^{n-1} K_i \; \rightarrow \; \mathrm{Ric}(X,Y).$$

O fluxo de Ricci

O fluxo de Ricci

- Em 1982, William Hamilton introduziu *fluxo de Ricci*.

M^n - variedade fechada, h - métrica:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g_t),$$
$$g_0 = h.$$

O fluxo de Ricci

- Em 1982, William Hamilton introduziu *fluxo de Ricci*.

M^n - variedade fechada, h - métrica:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g_t),$$
$$g_0 = h.$$

- Em um sistema de coordenadas especial temos:

$$\mathrm{Ric}_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta(g_{ij}) + \text{termos de ordem mais baixa.}$$

O fluxo de Ricci

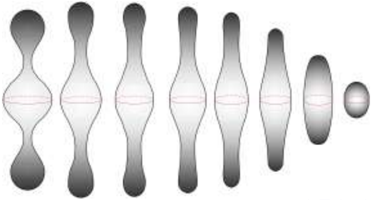
- Em 1982, William Hamilton introduziu *fluxo de Ricci*.

M^n - variedade fechada, h - métrica:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g_t),$$
$$g_0 = h.$$

- Em um sistema de coordenadas especial temos:

$$\mathrm{Ric}_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta(g_{ij}) + \text{termos de ordem mais baixa}.$$



O fluxo de Ricci

- Em 1982, William Hamilton introduziu *fluxo de Ricci*.

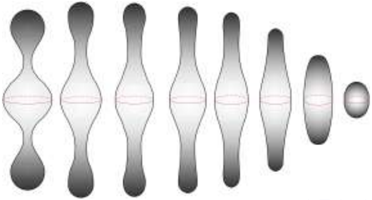
M^n - variedade fechada, h - métrica:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}(g_t),$$

$$g_0 = h.$$

- Em um sistema de coordenadas especial temos:

$$\mathrm{Ric}_{ij} = -\frac{1}{2}\Delta(g_{ij}) + \text{termos de ordem mais baixa.}$$



Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

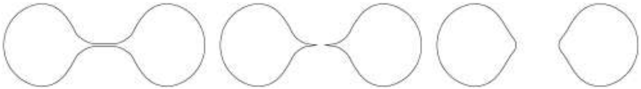
- Teorema de Killing-Hopf: Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, fechada, simplesmente conexa e com curvatura 1 em cada plano. Então (M^n, g) é equivalente à n-esfera redonda.

Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

- Teorema de Killing-Hopf: Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, fechada, simplesmente conexa e com curvatura 1 em cada plano. Então (M^n, g) é equivalente à n-esfera redonda.
- Estratégia: evoluir (M^3, h) através do fluxo de Ricci para uma variedade de curvatura constante 1.

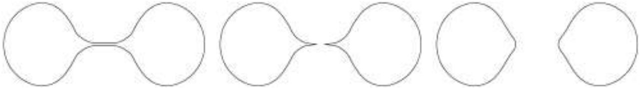
Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

- Teorema de Killing-Hopf: Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, fechada, simplesmente conexa e com curvatura 1 em cada plano. Então (M^n, g) é equivalente à n-esfera redonda.
- Estratégia: evoluir (M^3, h) através do fluxo de Ricci para uma variedade de curvatura constante 1.
- Dificuldade: Em geral o fluxo de Ricci desenvolve singularidades.



Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

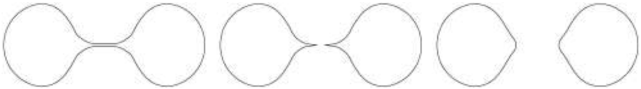
- Teorema de Killing-Hopf: Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, fechada, simplesmente conexa e com curvatura 1 em cada plano. Então (M^n, g) é equivalente à n-esfera redonda.
- Estratégia: evoluir (M^3, h) através do fluxo de Ricci para uma variedade de curvatura constante 1.
- Dificuldade: Em geral o fluxo de Ricci desenvolve singularidades.



- (Perelman, 2002/2003): O fluxo de Ricci com cirurgias está bem definido para qualquer (M^3, h) inicial. Classificação dos modelos de singularidades.

Ideia da prova da Conjectura de Poincaré

- Teorema de Killing-Hopf: Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana, fechada, simplesmente conexa e com curvatura 1 em cada plano. Então (M^n, g) é equivalente à n-esfera redonda.
- Estratégia: evoluir (M^3, h) através do fluxo de Ricci para uma variedade de curvatura constante 1.
- Dificuldade: Em geral o fluxo de Ricci desenvolve singularidades.



- (Perelman, 2002/2003): O fluxo de Ricci com cirurgias está bem definido para qualquer (M^3, h) inicial. Classificação dos modelos de singularidades.
- (Perelman, 2002/2003): Se (M^3, h) é simplesmente conexa, o fluxo de Ricci com cirurgias (normalizado) evolui (M^3, h) para uma união de componentes com métricas de curvatura 1.

Uniformização de superfícies

Uniformização de superfícies

Teorema de Uniformização (Poincaré, Koebe, 1907):

Para toda superfície Riemanniana fechada (M, g) *existe uma função* $u > 0$ *tal que a métrica* $\widehat{g} = ug$ *tem curvatura constante* κ.

(a) $\kappa = 1$, *se* M *é uma esfera.*

(b) $\kappa = 0$ *(obtida de* $\mathbb{R}^2$*), se* M *é um toro.*

(c) $\kappa = -1$ *(obtida de* $\mathbb{H}^2$*), nos outros casos.*

Uniformização de superfícies

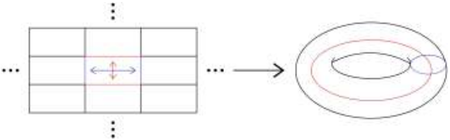
Teorema de Uniformização (Poincaré, Koebe, 1907):

Para toda superfície Riemanniana fechada (M, g) existe uma função $u > 0$ tal que a métrica $\widehat{g} = ug$ tem curvatura constante κ.

(a) $\kappa = 1$, *se M é uma esfera.*

(b) $\kappa = 0$ *(obtida de $\mathbb{R}^2$), se M é um toro.*

(c) $\kappa = -1$ *(obtida de $\mathbb{H}^2$), nos outros casos.*



Uniformização de superfícies

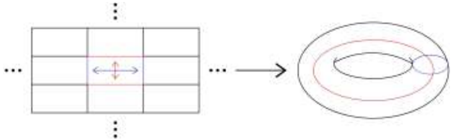
Teorema de Uniformização (Poincaré, Koebe, 1907):

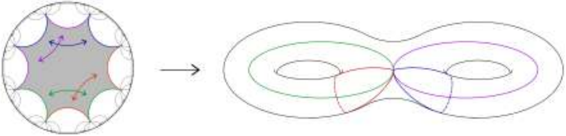
Para toda superfície Riemanniana fechada (M, g) existe uma função $u > 0$ tal que a métrica $\widehat{g} = ug$ tem curvatura constante κ.

(a) $\kappa = 1$, *se M é uma esfera.*

(b) $\kappa = 0$ *(obtida de $\mathbb{R}^2$), se M é um toro.*

(c) $\kappa = -1$ *(obtida de $\mathbb{H}^2$), nos outros casos.*





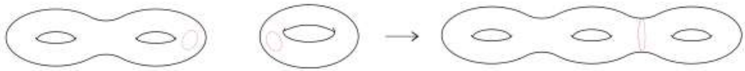
Geometrização de 3-variedades I

Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante.

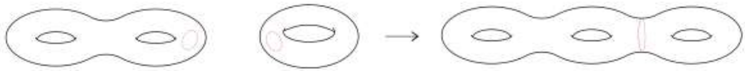
Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante.
  Ex.: somas conexas.



Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante.
  Ex.: somas conexas.

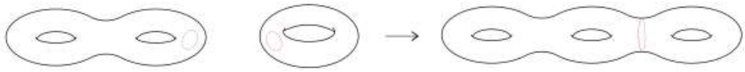


Teorema da decomposição prima (Hellmuth Kneser, 1929; John Milnor, 1962):

Toda 3-variedade fechada se decompõe de maneira única como soma conexa de um número finito de variedades, nenhuma das quais é uma soma conexa.

Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante.
  Ex.: somas conexas.



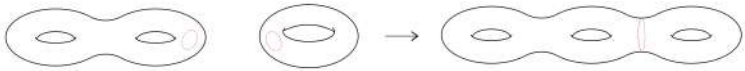
Teorema da decomposição prima (Hellmuth Kneser, 1929; John Milnor, 1962):

Toda 3-variedade fechada se decompõe de maneira única como soma conexa de um número finito de variedades, nenhuma das quais é uma soma conexa.

- Modelos: geometrias simplesmente conexas onde dados dois pontos p e q existe uma simetria do espaço que mapeia p em q.

Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante.
  Ex.: somas conexas.



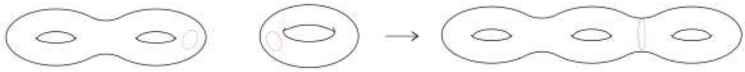
Teorema da decomposição prima (Hellmuth Kneser, 1929; John Milnor, 1962):

Toda 3-variedade fechada se decompõe de maneira única como soma conexa de um número finito de variedades, nenhuma das quais é uma soma conexa.

- Modelos: geometrias simplesmente conexas onde dados dois pontos p e q existe uma simetria do espaço que mapeia p em q.
- $n = 2$: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$.

Geometrização de 3-variedades I

- Nem toda 3-variedade fechada admite uma métrica de curvatura constante. **Ex.:** somas conexas.



Teorema da decomposição prima (Hellmuth Kneser, 1929; John Milnor, 1962):

Toda 3-variedade fechada se decompõe de maneira única como soma conexa de um número finito de variedades, nenhuma das quais é uma soma conexa.

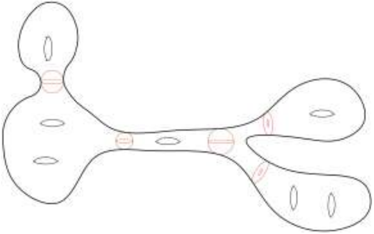
- Modelos: geometrias simplesmente conexas onde dados dois pontos p e q existe uma simetria do espaço que mapeia p em q.
- $n = 2$: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}^2$.
- $n = 3$: $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Nil_3, $\widetilde{\mathrm{Sl}_2}(\mathbb{R})$ e Sol_3.

Geometrização de 3-variedades II

Geometrização de 3-variedades II

Conjectura de Geometrização (William Thurston, 1982)

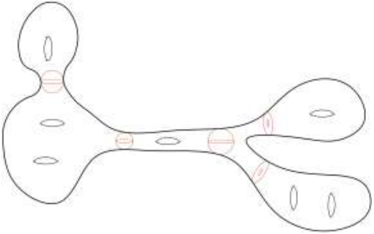
Um fator primo admite uma decomposição ao longo de toros, tal que cada novo fator admite uma métrica de volume finito modelada em uma das 8 geometrias.



Geometrização de 3-variedades II

Conjectura de Geometrização (William Thurston, 1982)

Um fator primo admite uma decomposição ao longo de toros, tal que cada novo fator admite uma métrica de volume finito modelada em uma das 8 geometrias.

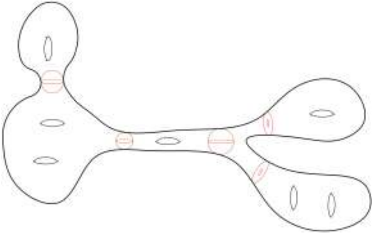


(Thurston, 1982): caso importante da conjectura.

Geometrização de 3-variedades II

Conjectura de Geometrização (William Thurston, 1982)

Um fator primo admite uma decomposição ao longo de toros, tal que cada novo fator admite uma métrica de volume finito modelada em uma das 8 geometrias.



(Thurston, 1982): caso importante da conjectura.

Teorema (Perelman, 2002/2003)

A Conjectura de geometrização é verdadeira.

Aplicações e perspectivas futuras

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.
- As técnicas no trabalho de Perelman inspiraram (e continuam a inspirar) outros desenvolvimentos na área de *Análise geométrica*.

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.
- As técnicas no trabalho de Perelman inspiraram (e continuam a inspirar) outros desenvolvimentos na área de *Análise geométrica*.
- A classificação das superfícies e a uniformização são a base de muitos trabalhos seminais em várias áreas: análise complexa, geometria algébrica, geometria diferencial, sistemas dinâmicos $\cdots$

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.
- As técnicas no trabalho de Perelman inspiraram (e continuam a inspirar) outros desenvolvimentos na área de *Análise geométrica*.
- A classificação das superfícies e a uniformização são a base de muitos trabalhos seminais em várias áreas: análise complexa, geometria algébrica, geometria diferencial, sistemas dinâmicos $\cdots$

Ex.: O trabalho de Maryam Mirzakhani sobre contar geodésicas em superfícies de curvatura -1.

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.
- As técnicas no trabalho de Perelman inspiraram (e continuam a inspirar) outros desenvolvimentos na área de *Análise geométrica*.
- A classificação das superfícies e a uniformização são a base de muitos trabalhos seminais em várias áreas: análise complexa, geometria algébrica, geometria diferencial, sistemas dinâmicos $\cdots$

Ex.: O trabalho de Maryam Mirzakhani sobre contar geodésicas em superfícies de curvatura -1.

- **Devemos usar os resultados em $n = 3$ para fazer matemática nova!**

Aplicações e perspectivas futuras

- Existe um algoritmo que decide em tempo finito se duas 3-variedades fechadas e primas são homeomorfas.
- As técnicas no trabalho de Perelman inspiraram (e continuam a inspirar) outros desenvolvimentos na área de *Análise geométrica*.
- A classificação das superfícies e a uniformização são a base de muitos trabalhos seminais em várias áreas: análise complexa, geometria algébrica, geometria diferencial, sistemas dinâmicos $\cdots$

Ex.: O trabalho de Maryam Mirzakhani sobre contar geodésicas em superfícies de curvatura -1.

- **Devemos usar os resultados em $n = 3$ para fazer matemática nova!**
- (L., 2018): Classificação topológica de (M^3, g) que não admite superfícies fechadas que minimizam área.

A Conjectura de Poincaré: caso suave

A Conjectura de Poincaré: caso suave

- M e N são *difeomorfas* se existe uma correspondência **suave** um-a-um entre os pontos de M e N.

A Conjectura de Poincaré: caso suave

- M e N são *difeomorfas* se existe uma correspondência **suave** um-a-um entre os pontos de M e N.
- $n \leq 3$: duas variedades homeomorfas são também difeomorfas;

  $n = 2$ (Tibor Radó, 1935);
  $n = 3$ (Edwin Moise, 1952).

A Conjectura de Poincaré: caso suave

- M e N são *difeomorfas* se existe uma correspondência **suave** um-a-um entre os pontos de M e N.
- $n \leq 3$: duas variedades homeomorfas são também difeomorfas;

  $n = 2$ (Tibor Radó, 1935);
  $n = 3$ (Edwin Moise, 1952).

- Esferas exóticas (John Milnor, 1956): Existem variedades que são homeomorfas à $\mathbb{S}^7$, mas não são difeomorfas à $\mathbb{S}^7$.

A Conjectura de Poincaré: caso suave

- *M* e *N* são *difeomorfas* se existe uma correspondência **suave** um-a-um entre os pontos de *M* e *N*.
- $n \leq 3$: duas variedades homeomorfas são também difeomorfas;

  $n = 2$ (Tibor Radó, 1935);
  $n = 3$ (Edwin Moise, 1952).

- Esferas exóticas (John Milnor, 1956): Existem variedades que são homeomorfas à $\mathbb{S}^7$, mas não são difeomorfas à $\mathbb{S}^7$.

- (Kervaire-Milnor, 1963; Wang-Xu, 2017; Behrens-Hill-Hopkins-Mahowald, 2020):
  Para $4 < n < 140$ existe uma *n*-esfera exótica se, e só se, $n \notin \{5, 6, 12, 56, 61\}$.

A Conjectura de Poincaré: caso suave

- M e N são *difeomorfas* se existe uma correspondência **suave** um-a-um entre os pontos de M e N.
- $n \leq 3$: duas variedades homeomorfas são também difeomorfas;

  $n = 2$ (Tibor Radó, 1935);
  $n = 3$ (Edwin Moise, 1952).

- Esferas exóticas (John Milnor, 1956): Existem variedades que são homeomorfas à $\mathbb{S}^7$, mas não são difeomorfas à $\mathbb{S}^7$.

- (Kervaire-Milnor, 1963; Wang-Xu, 2017; Behrens-Hill-Hopkins-Mahowald, 2020):
  Para $4 < n < 140$ existe uma n-esfera exótica se, e só se, $n \notin \{5, 6, 12, 56, 61\}$.

A Conjectura de Poincaré: caso suave ($n = 4$):

Seja M^4 uma variedade homeomomorfa a $\mathbb{S}^4$. M é difeomorfa a $\mathbb{S}^4$?

Obrigado pela atenção!