BILHARES:
um passeio pelos sistemas dinâmicos (conservativos)

através de imagens: algumas originais e outras "captadas" na internet

XI Bienal de Matemática 2024

BILHARES MINEIROS:

Sylvie Oliffson Kamphorst, Sônia Pinto de Carvalho, Mário Jorge Dias Carneiro, ...

Departamento de Matemática, UFMG

bilhar: todo mundo sabe o que é










jogado em toda parte, até por matemáticos

como disse Katok sobre sua conferência intitulada:

O bilhar como um playground para matemáticos

O título desta conferência pode ser entendido de duas maneiras. Literalmente, de maneira um pouco ingênua, matemáticos se divertem lançando bolas de bilhar em mesas de formatos diversos e observam (e também tentam prever) o que acontece. Em um sentido mais sério, a expressão “playground ” pode ser entendida como “laboratório”: várias questões, conjecturas, métodos de solução, etc. na teoria de sistemas dinâmicos são testadas em diversos tipos de problemas de bilhar.

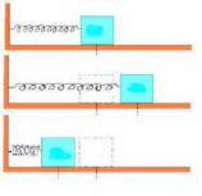
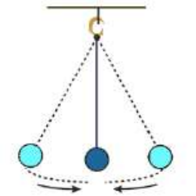
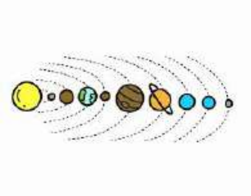
o jogo

"após uma tacada uma bola se move sobre a mesa até um próximo choque, quando muda de direção"

objetivo: descrever o movimento

Sistemas dinâmicos: o mundo em movimento

"sistema cujo estado evolui com o tempo" (wikipedia)

- estado: conjunto de grandezas cujos valores caracterizam o sistema
- lei de evolução (equação de movimento): como os estados mudam
- tempo: contínuo (equação diferencial) ou discreto (iteração)
- parâmetro(s) de controle

as condições iniciais **determinam** completamente a evolução !! 

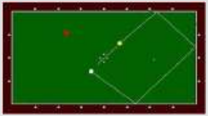
o bilhar dos matemáticos

"Sejam"

- uma bolinha puntual
- mesa sem atrito
- parede imoóvel
- choques elásticos

$\Longrightarrow$

conservação:
- energia
- momento



após a tacada, a bola se move livremente (em linha reta e com velocidade constante) na mesa sofrendo reflexões elásticas nos choques nas paredes.

(condições iniciais = posição e velocidade)

Dinâmica Determinística Conservativa

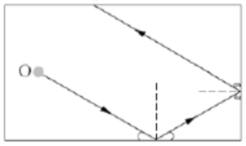
um problema simples?

- fáceis de explicar e desenhar
- formulação e modelagem simples
- permitem cálculos explícitos
- ótimos para simular

mesmo problemas simples podem ter um comportamento complicado e "imprevisível"

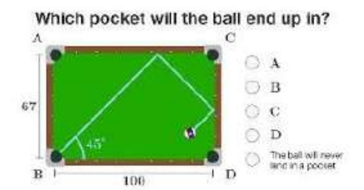
movimento = trajetória

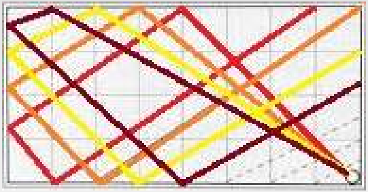
ESPAÇO de CONFIGURAÇÕES
posições e velocidades



poligonal na mesa

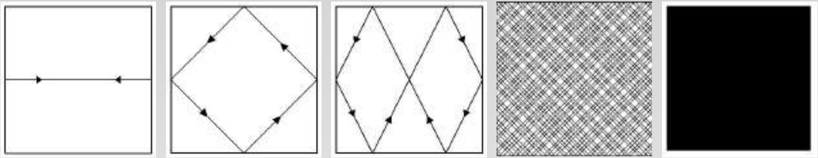
prever o futuro: dados a posição e velocidade inicial descrever o movimento (como é a trajetória?)





retângulos

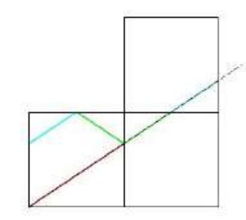
o bilhar em um retângulo é "matematicamente trivial":



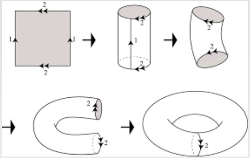
reflexões horizontais/verticais $\Rightarrow$ número finito de direções possíveis

uma única direção!

movimento periódico:
racional $\neq$ irracional



desdobramento



fluxo linear no toro

outros polígonos

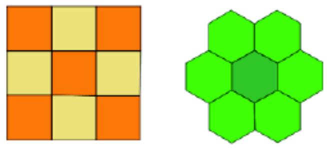


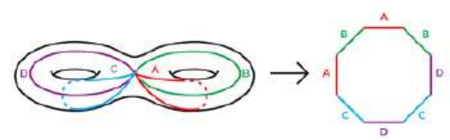




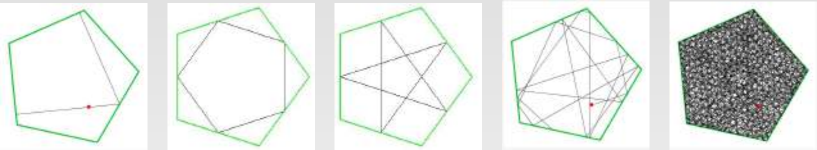
polígonos: racionais × irracionais

polígonos racionais e o recobrimento (ou não) do plano:





superfícies de translação (Teichmüller)



polígonos racionais têm "muitas" órbitas periódicas,
os irracionais não sabemos nem se têm alguma !!!

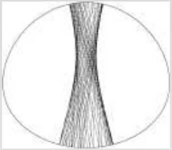
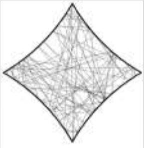
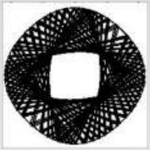
direções:
finitas × ∞'s

outras formas

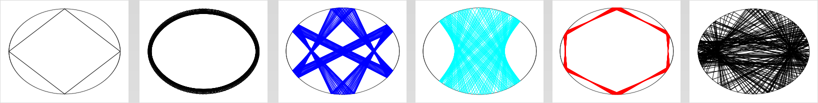
  

comportamentos diferentes?

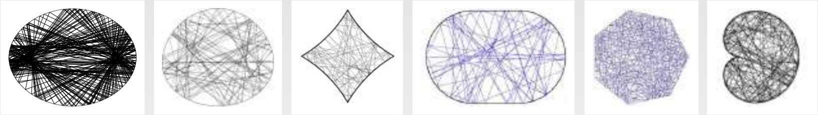
    

como distinguir?

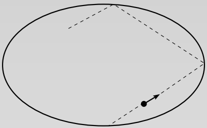
trajetórias diferentes na mesma mesa

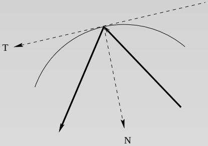


trajetórias parecidas em mesas diferentes



bilhar como sistema dinâmico discreto





- curva parametrizada
- m.r.u. na região
- reflexão no bordo

o movimento é completamente determinado

dados		obtemos
ponto de saída no bordo direção do movimento	$\longrightarrow$	ponto de chegada nova direção

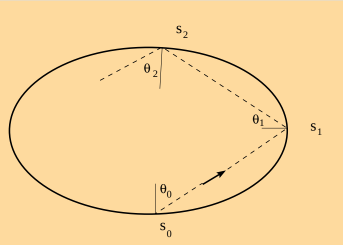
PROCESSO ITERATIVO

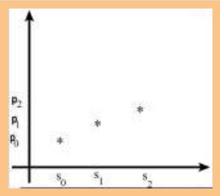
reduzimos o problema contínuo de 4 variáveis ($\vec{x}$ e $\vec{v}$) para um discreto de 2 variáveis (parâmetro no bordo e direção da velocidade) usando a conservação da energia ($||\vec{v}|| = 1$) e seção de Poincaré no bordo.

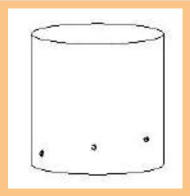
trajetórias × órbitas

sucessão de batidas: $(s_0, p_0) \longmapsto (s_1, p_1)$ aplicação do bilhar

CILINDRO: s (ponto de saída), $p = \cos\theta$ (direção de movimento)



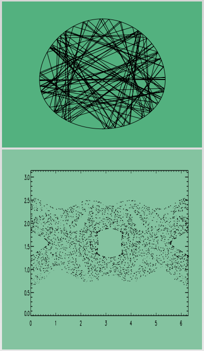


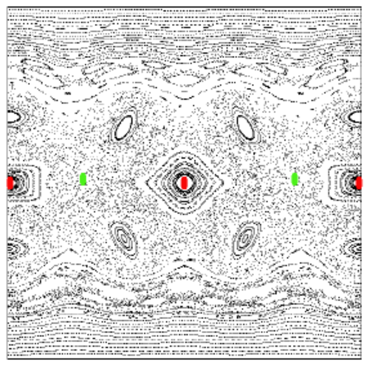


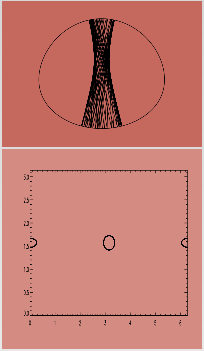
trajetória: poligonal na mesa
(espaço de configurações)

órbita: sequência de estados
(s, p) no espaço de fase

espaço de fase "os desenhos que revelam"

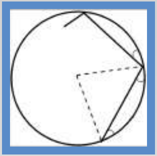




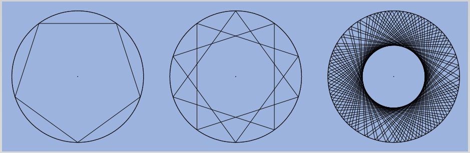


várias órbitas (condições iniciais ao mesmo tempo)

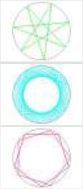
círculo 



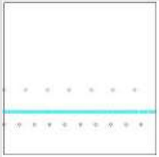
- triângulos isósceles
- mesmo ângulo



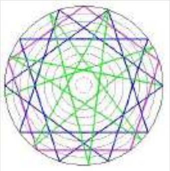
- racionais: periódicas (polígonos)
- irracionais: densas no bordo



cáusticas



curvas invariantes

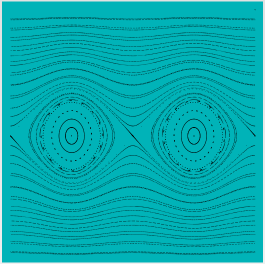
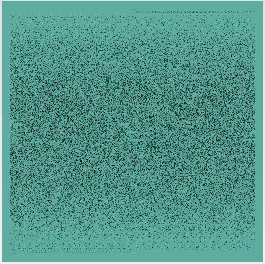
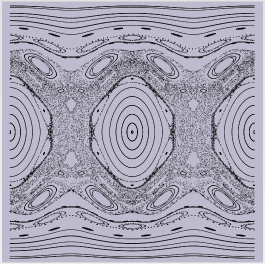


folheação da mesa por cáusticas e do espaço de fase por curvas invariantes rotacionais

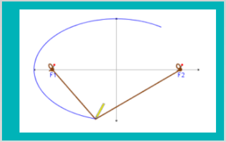
(TOTALMENTE) INTEGRÁVEL

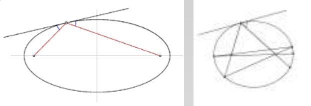
perturbando o círculo: elipse, estádio, oval



elipse

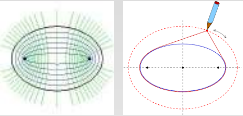


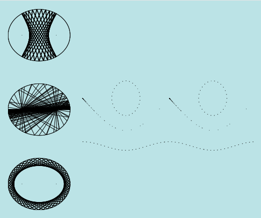


propriedade de reflexão:
raios focais fazem ângulos iguais

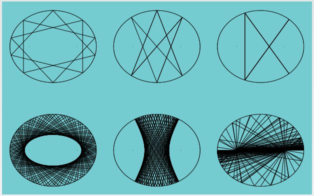
INTEGRÁVEL

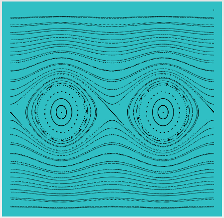
- mesa folheada por elipses e hipérboles confocais
- espaço de fase folheado por curvas invariantes





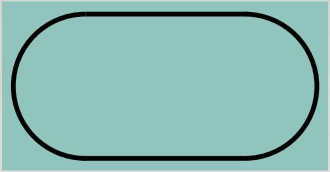
Trajetórias e cáusticas

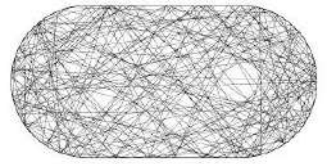


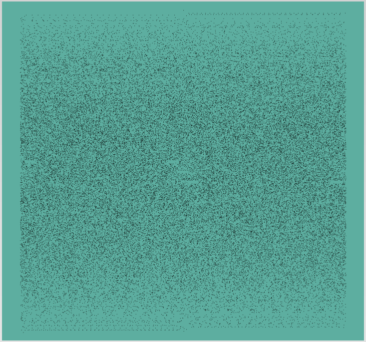


estádio de Bunimovich

não é estritamente convexo



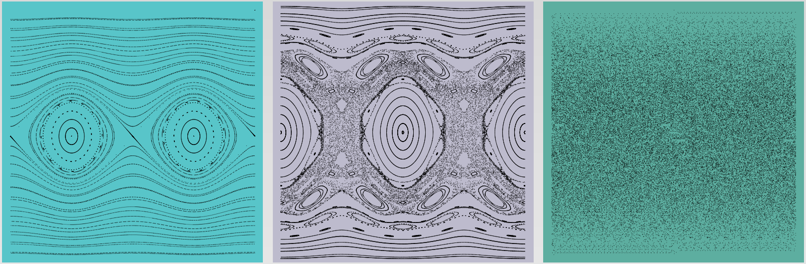




- uma única órbita "enche" o espaço de fase
- não há constante de movimento que distinga órbitas
- "todas" as órbitas têm o mesmo comportamento

CAÓTICO

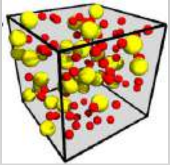
ovais: entre a ordem e o caos?



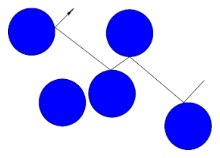
conjectura de Birkhoff:

a elipse é o único bilhar convexo integrável

(o círculo é o único totalmente integrável) ✓



gás: caixa com partículas

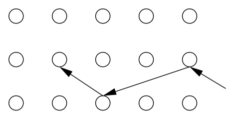


gás de esferas rígidas ✓

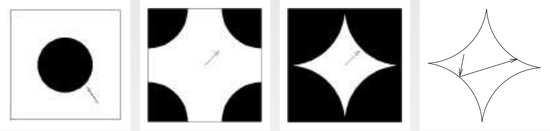
Hipótese ergódica de Boltzmann

média no tempo = média nos estados

gás de Lorentz ✓

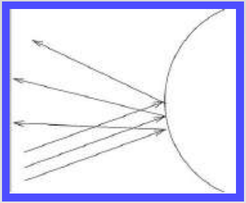


bilhar de Sinai ✓



bilhares como espelhos

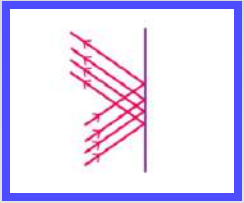
CÔNCAVO



DIVERGENTE

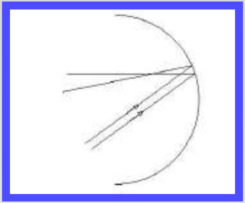
(espalha)

PLANO



NEUTRO

CONVEXO



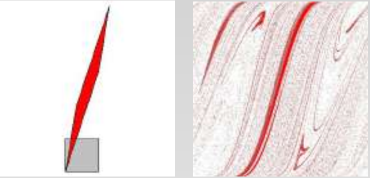
CONVERGENTE

(coleta)

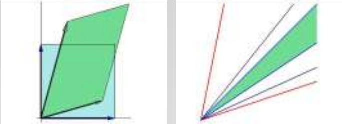
"um probabilista, um geômetra e um analista entram em um bar ..." (A. Sorrentino)

bilhares dispersivos (côncavos)

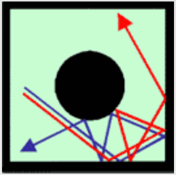
CAOS:



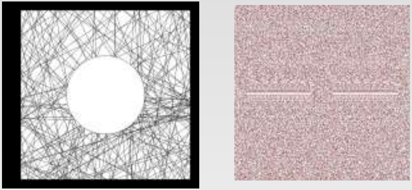
hiperbolicidade



preserva área + expansão/contração



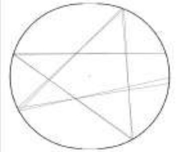
sensibilidade
nas cond. iniciais



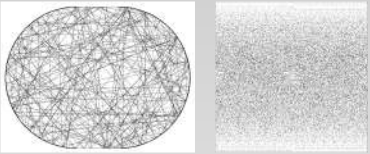
ergodicidade:

- uma órbita passa por "todos" os estados
- sem conjuntos ou funções invariantes

de volta ao estádio

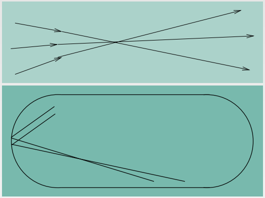


sensibilidade



ergodicidade

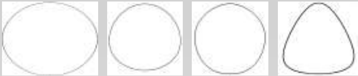
espelhos convexos focalizam e os planos são neutros:
de onde vem o caos?

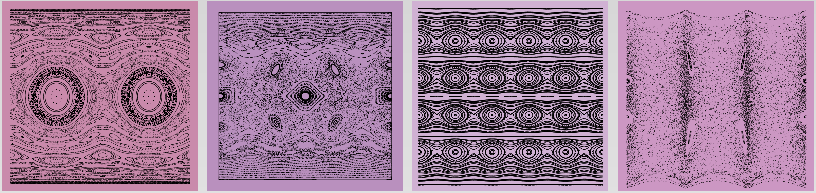


mecanismo de desfocalização:
tudo que fecha abre, basta esperar

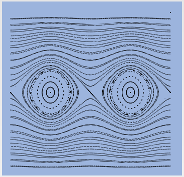
componentes focalizadoras suficientemente longe geram bilhares "caóticos"

bilhares de Birkhoff: convexos*estritamente

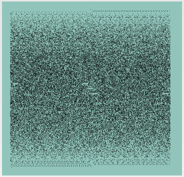
as ovais: 



quão diferentes/parecidas são?



elipse

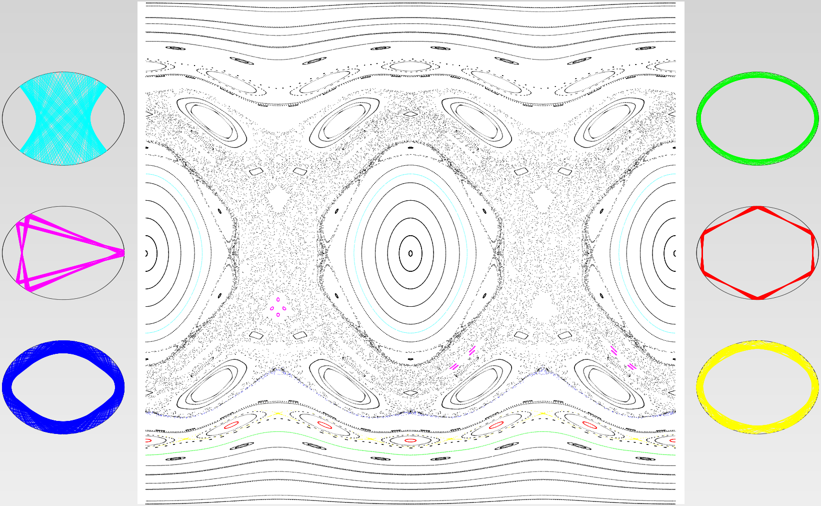


estádio

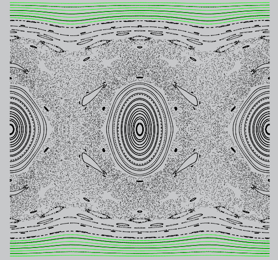
NÃO INTEGRABILIDADE:

um pouco de cada?

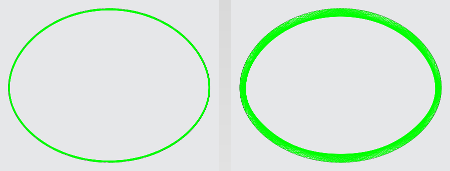
elementos



curvas invariantes rotacionais



região de Lazutkin



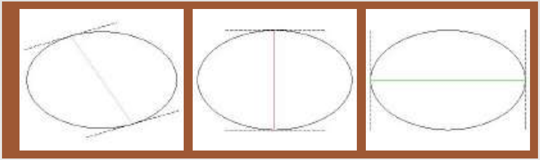
cáusticas perto do bordo

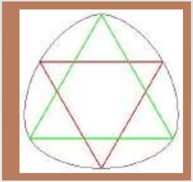
Teoria KAM: as curvas "irracionais" persistem

órbitas periódicas

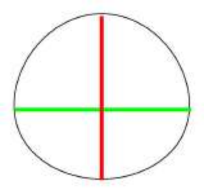
Teorema de Birkhoff (Min-Max): para cada "tipo" $\frac{p}{q}$

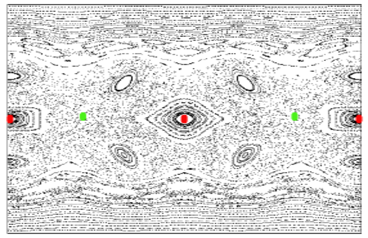
- pontos críticos do comprimento (função geradora)
- pelo menos duas trajetórias distintas

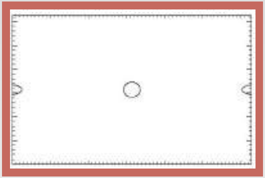


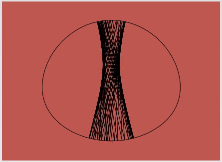


estabilidade e instabilidade

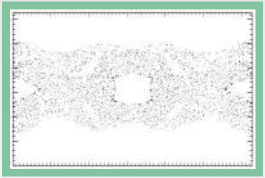


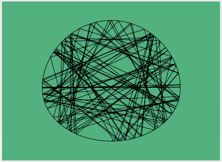






ESTÁVEL

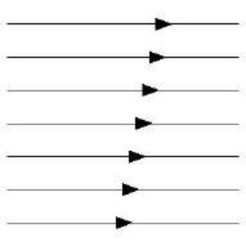




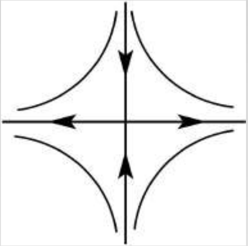
INSTÁVEL

comportamento linear nos "pontos fixos"

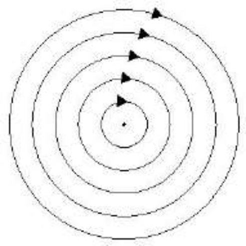
parabolico



hiperbolico

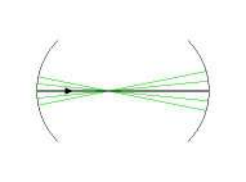


eliptico

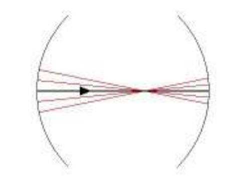


cisalhamento

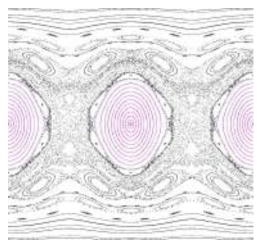
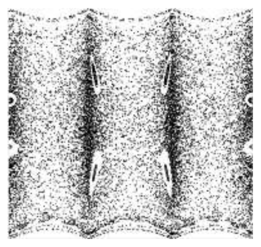
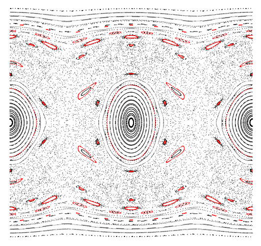
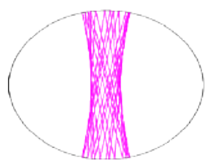
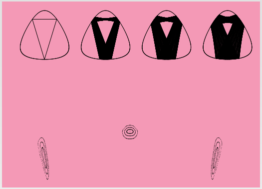
sela



rotação

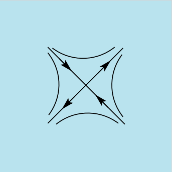


estabilidade: ilhas elipticas

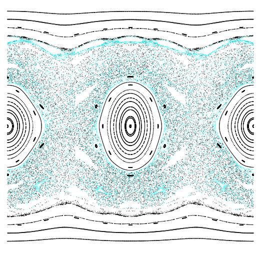
ponto fixo eliptico + twist = KAM

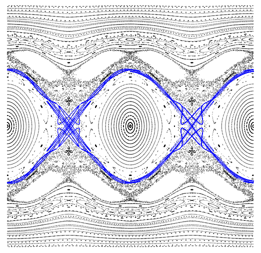
órbitas hiperbólicas

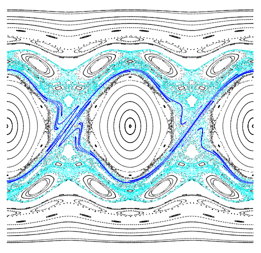


Hartman-Grobman

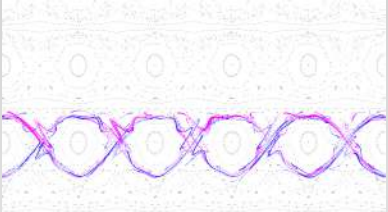
- a dinâmica é instável
- quase todo ponto deixa a vizinhança
- variedades estável e instável

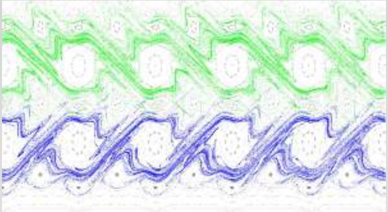




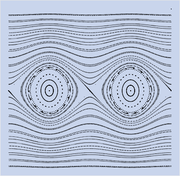


interseções homoclínicas/heterocliínicas





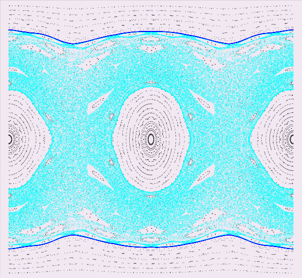
"lembra da elipse"?



juntanto as figurinhas

Região de instabilidade:

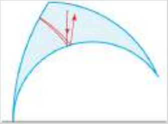
- delimitada por curvas invariantes rotacionais
- fecho das variedades instáveis
- ilhas elipticas



perguntas de 1 milhão:

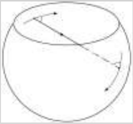
- medida do fecho da variedade/das ilhas
- componente ergódica
- quantas ilhas (nenhuma)

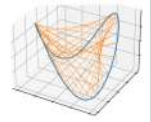
. . .

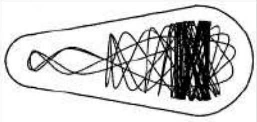

superfície


gravidade

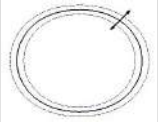

magnético

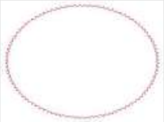

3-d


arame

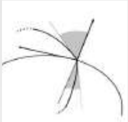

soft


quântico

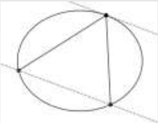

móvel


aleatório

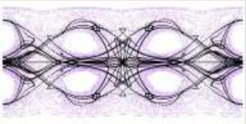

dissipativo

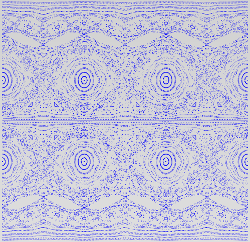

refração

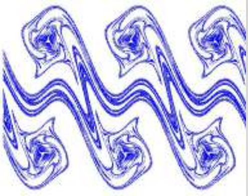

exterior


simplético

estampas







Leituras

- M V Berry. *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*. European Journal of Physics (1981)
- L Bunimovich. *Dynamical billiards* http://www.scholarpedia.org/article/Dynamical_billiards
- B Hassemblat, A Katok. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge Univ Press (2003)
- R Markarian, N Chernov. *Chaotic billiards*. American Math Soc (2006)
- S Tabachnikov. *Geometry and billiards*. American Math Soc (2005)

por fim, mas não menos importante

OBRIGADA!!!!