O COLORIDO PROBLEMA DO MILHÃO (Para Não-Experts!)

Paulo A. Faria da Veiga
Departmento de Matemática Aplicada e Estatística
ICMC-USP-São Carlos SP, *Brazil*
veiga@icmc.usp.br

Conferência Apresentada ao Bienal da SBM, UFSCar, 29 de Julho de 2024

METAS

Dar uma **IDEIA** do que é o famoso **PROBLEMA do GAP** Mas Procurando Discorrer sobre Muitos dos INGREDIENTES ESSENCIAIS

PARA TAL:

- NECESSÁRIO FAZER **CONTATO com FÍSICA**, Especificamente com um Modelo da **Física das Partículas Elementares**, Considerado 'O Modelo' Para as **INTERAÇÕES FORTES:**

CROMODINÂMICA QUÂNTICA

- TENTAREMOS Discorrer Sobre os DIVERSOS ASPECTOS MATEMÁTICOS do Problema (Questões de Ordem Analítica, Algébrica, Probabilista, Geométrica, etc)

- PASSAGEM Forçada pela **TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL** de EINSTEIN e pela **MECÂNICA QUÂNTICA**

OBSERVAÇÕES: Devido ao ENORME Número de PRÉ-REQUISITOS EXIGIDOS, ao TEMPO LIMITADO e ao **ESPECTRO** DA AUDIÊNCIA, Vejo Ser QUASE IMPOSSÍVEL ADOTAR ENFOQUE PRECISO

EVITAREI ao Máximo os ASPECTOS TÉCNICOS

HÁ **MAIS DE UM SÉCULO de PESQUISA** ENVOLVIDO AQUI!!! MAIS de CINCO (05) PREMIOS NOBEL RELACIONADOS DIRETAMENTE com o Nosso MODELO !

CLARIFICAÇÃO: **O PROBLEMA DO GAP** é um PROBLEMA DE FÍSICA MATEMÁTICA!!! (Def.: Demonstrar Teoremas Matemáticos com Resultados de Interesse Para a Física!)

Na NATUREZA: QUATRO INTERAÇÕES FUNDAMENTAIS:

- **GRAVITACIONAL** (Sistema Solar e Universo Como um Todo)

- **ELETROMAGNETISMO** (ATRAÇÃO e REPULSÃO Entre Partículas Eletricamente Carregadas, ONDAS de Radio, LUZ), MAXWELL

- **INTERAÇÕES FORTES ou NUCLEARES** (FORÇA ATRATIVA ENTRE PRÓTONS e NEUTRONS Dentro do Núcleo Atômico, Vencendo a Repulsão Elétrica)

- **INTERAÇÔES FRACAS**: Decaimentos Radiativos, como o Decaimento Beta

$$\text{Neutron} \longrightarrow \text{Próton} + \text{Elétron} + \text{Anti-Neutrino}$$

ALCANCES Respectivos: INFINITO, INFINITO, $10^{-15}m$, $10^{-18}m$

TODAS ESTAS INTERAÇÕES SÃO **DESCRITAS EM TERMOS** de **TEORIAS DE CAMPO** ! (Newton: Noção de Campo Gravitacional, Faraday: Noção de Campo Eletromagnético, etc)

MAXWELL: **LUZ** é “**ONDA** de Campo ELETROMAGNÉTICO”

EINSTEIN: **RELATIVIDADE ESPECIAL** Introduz Mudanças para Fenômenos Envolvendo **Grandes Velocidades Comparadas à LUZ**. Campos Elétricos/Magnéticos Transformam-se entre Si

EINSTEIN: - EFEITO FOTOELÉTRICO: **LUZ** Só Está Presente Através de Seus **QUANTA de ENERGIA**, os **FÓTONS**

MECÂNICA QUÂNTICA: Descrição de Fenômenos Envolvendo <u>PEQUENAS ESCALAS DE ENERGIA</u> (Planck $\hbar \approx 10^{-34}\, Js$)

FÓTONS tem Caráter **DUAL, PARTÍCULA e ONDA**

TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: Relatividade + Mecânica Quântica. **CADA CAMPO $\longleftrightarrow$ UMA PARTÍCULA**

QED (Quantum Electrodynamics): Modelo QUÂNTICO e RELATIVÍSTICO PARA O ELETROMAGNETISMO

QED

Campos p/ FÓTONS, ELÉTRONS e ANTI-Elétrons ou PÓSITRONS

ELÉTRONS/PÓSITRONS Interagem entre Si USANDO os FÓTONS

FÓTONS NÃO SÃO ELETRICAMENTE CARREGADOS
e **NÃO INTERAGEM ENTRE SI** !!!

HOPPING to MATH

TEOREMA DE EMMY NOETHER: **SIMETRIAS CONTÍNUAS**
São Importantes Para a Física (Mesmo na Mecânica Clássica)
(Como **Rotações de um Bambolê** Novo em Torno do Centro)
ASSOCIAM QUANTIDADES FÍSICAS CONSERVADAS !

SIMETRIAS da **AÇÃO** (=Integral da Energia) POR:
- Translações no Tempo $\rightarrow$ Conservação da Energia
- Translações no Espaço $\rightarrow$ Conservação do Momento
- Rotações no Espaço $\rightarrow$ Conservação do Momento Angular

INTERAÇÊS FORTES: DESCRITAS Pela **CROMODINÂMICA QUÂNTICA** (QCD)

NOSSO **TÌTULO**: É **COLORIDO** pois os Campos da QCD são Associados aos **QUARKS/ANTIQUARKS** (06 Tipos, Cargas Elétricas $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$), e **GLÚONS:** <u>**PORTAM CARGAS DE COR**</u>

QUARKS/ANTIQUARKS POSSUEM **03 CARGAS DE COR**

GLÚONS POSSUEM **08 CARGAS DE COR**

GLÚONS são Similares ao Fóton e INTERAGEM Com QUARKS e ANTIQUARKS

NOVIDADE São Carregados. INTERAGEM ENTRE SI

INTERAÇÕES NÃO LINEARES! <u>**COMPLEXIDADE**</u>

$+$ **COMPLEXIDADE:** QED e a QCD são elaboradas com base em **GRUPO LOCAL** $\mathcal{G}$ **de SIMETRIA**

LOCAL = Uma Cópia de $\mathcal{G}$ Cada PONTO x do Espaço-Tempo

QED: **ABELIANO** $\mathcal{G}$ = U(1)

QCD: **NÃO-ABELIANO** $\mathcal{G}$ = SU(3)

(NÃO)-ABELIANO tem **PRODUTO** (NÃO)-COMUTATIVO

O que é um Grupo e de onde SURGEM os NÚMEROS 3 e 8 de Cargas, para Quarks e Glúons a QCD ?

Grupo: CONJUNTO + OPERAÇÂO **PRODUTO** VERIFICANDO

1) ASSOCIATIVIDADE

2) Contém ELEMENTO IDENTIDADE (Elemento Neutro da Operação)

3) Cada Elemento possui ELEMENTO INVERSO

U(N) é o GRUPO das Matrizes COMPLEXAS $N \times N$, **UNITÁRIAS**

S$U(N)$ Adicionamos a condição DET$=$ 1

OPERAÇÃO: **PRODUTO MATRICIAL** USUAL

MATRIZ M UNITÁRIA: $M^\dagger = M^{-1} \quad , \quad onde \;\; M^\dagger = \bar{M}^t$

Barra = Complexo Conjugado (Elementos de $\bar{M}$ são os $\bar{m}_{ij}$)

$\mathcal{G}$ **NÃO-ABELIANO** é o mesmo que **NÃO-COMUTATIVO**

$$[A, B] \equiv AB - BA \neq 0 \qquad ; \qquad A, B \in \mathcal{G}$$

U(1) e SU(1) são ABELIANOS

U($N \geq 2$) e SU($N \geq 2$) são NÃO-ABELIANOS

OBSERVAÇÃO: Se $M^\dagger = M$, então M é **AUTO-ADJUNTA**, Possui **AUTOVALORES REAIS** e **DIAGONALIZÁVEIS**!

REPRESENTAÇÕES (Lineares) de S$U(N)$: Homomorfismos entre Elementos do Grupo e ESPAÇOS LINEARES MATRICIAIS

QUARKS: REPRESENTAÇÃO FUNDAMENTAL 3 de S$U(3)$. MATRIZ 3×1

ANTIQUARKS: REPRESENTAÇÃO CONJUGADA $\bar{3}$ de S$U(3)$. MATRIZ 1×3

GLÚONS: REPRESENTAÇÃO REGULAR ou ADJUNTA de S$U(3)$

É MATRIZ 3×3 com TRAÇO NULO. (Traço = SOMA dos Elementos DIAGONAIS!)

Como U(1), o Grupo $\mathcal{G} \equiv$ S$U(3)$ é um **GRUPO de LIE**.

GRUPO de LIE: é GRUPO CONTÍNUO, LOCALMENTE COMPACTO, Uma VARIEDADE DIFERENCIÁVEL

S$U(3)$ tem CURVATURA NÃO NULA!

MAPA EXPONENCIAL: $g \in \mathcal{G} =$ S$U(3)$, g matriz 3×3, expressa

$$g = e^{iA} = 1 + iA + \frac{A^2}{2} + \ldots + \frac{(iA)^n}{n!} + \ldots$$

com A matriz 3×3 verificando $A^\dagger = A$ e $\mathrm{Tr}\, A = 0$

CONVENÇÃO: **SOMANDO SOBRE ÍNDICES REPETIDOS**

$A = \sum_{c=1}^{8} A^c \theta^c \equiv A^c \theta^c$, onde $A \in su(3)$

$su(3)$ é a Álgebra de Lie do Grupo de Lie S$U(3)$

$\theta^a, \quad c = 1, 2, \ldots, 8$ são os **GERADORES** $su(3)$: 8 MATRIZES 3×3 de Gell'Mann, obedecendo $\mathrm{Tr}\, \theta^c = 0$, normalizadas por $\mathrm{Tr}\, \theta^c \theta^d = \delta^{cd}$ e verificando $[\theta^c, \theta^d] \equiv \theta^c \theta^d - \theta^d \theta^c = i f^{cde} \theta^e$
Aqui δ^{cd} é um delta de Kronecker: =1, se c=d ; e =0, se $c \neq d$;
f^{cde} são as constantes de estrutura da álgebra de Lie $su(3)$

SIMETRIA "Local de Gauge" da QCD por $SU(3)$ está associada à **CONSERVAÇÃO DA CARGA DE COR**

MAIS FÍSICA

RELATIVIDADE ESPECIAL: Relaciona OBSERVADORES em REFERENCIAIS INERCIAIS. OBSERVADORES Movendo-se com VELOCIDADE CONSTANTE Um com Relação ao Outro

VELOCIDADE da LUZ no VÁCUO: c (=1 para nós!) INDEPENDE do OBSERVADOR

ESPAÇO $\vec{x}$ e **TEMPO** x^0: Tratados em Pé de IGUALDADE.
AMBOS são COORDENADAS de um QUADRIVETOR !

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (x^0, \vec{x}) \;\; ; \;\; \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \, , \, x^0 \in \mathbb{R}$$

DISTÂNCIA Pseudo-Euclideana ou MINKOWSKIANA:

$$\|x\|_M^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

$\|x\|_M^2$ é um INVARIANTE do Grupo de Lorentz SO$(3,1)$

FORMULAÇÃO COM **TEMPO IMAGINÁRIO**: $x^0 \longrightarrow ix^0$

$$\|x\|_M^2 \longrightarrow \|x\|^2 \equiv \|x\|_E^2 = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$$

Relação de Dispersão para Movimento de Partícula LIVRE com Massa $m > 0$

$$E^2(\vec{p}) \equiv \omega(\vec{p}) = (\vec{p})^2 + m^2$$

No REPOUSO, $\vec{p} = \vec{0}$: e $E = m$ ($c = 1$ para nós e $mc^2 = m$)

Num Sistema Ortogonal $E \times \vec{p}$, o Gráfico da **RELAÇÃO de DISPERSÃO** $\omega(\vec{p})$ fica a uma distância $m > 0$ da origem

Há uma **LACUNA de MASSA** em $\omega(\vec{p})$!!! Um **MASS GAP**

ELETROMAGNETISMO: **CAMPO ELÉTRICO** $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{x},t)$ e **CAMPO MAGNÉTICO** $\vec{B} \equiv \vec{B}(\vec{x},t)$, temos as EQS. de MAXWELL (Leis de Gauss, Lei de Ampère, Lei de Faraday)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad ; \quad \nabla \times \vec{E} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad ; \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

onde lembramos que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{A}$ é o **Potencial Vetor**

FORMULAÇÃO RELATIVÍSTICA: No VÁCUO ($\rho = 0$ e $\vec{J} = \vec{0}$), com $\mu_0 = 1$ e $\epsilon_0 = 1$, $x = (x^0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$, e com

$$A_\mu(x) = (A^0(x), \vec{A}(x)) \equiv (\phi(x), \vec{A}(x))$$

$\phi(x) =$ **POTENCIAL ELÉTRICO** em x

TENSOR de CAMPO ELETROMAGNÉTICO: de 2a ORDEM e ANTISSIMÉTRICO ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$)

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad ; \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

Suprimindo a dependência em x, para $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, se F é matriz 4×4 com elementos $F_{\mu\nu}$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

EQS de MAXWELL, na Formulação RELATIVÍSTICA:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$$
$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \quad \longleftarrow \quad \text{(Puramente Geométrica, Id de Bianchi)}$$

$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o Símbolo Totalmente Antissimétrico de Levi-Civita (sinal das permutações de $1, 2, 3, 4$)

INVARIÂNCIA de CALIBRE (Gauge Invariance): EQS de Maxwell NÃO se ALTERAM pelas TRANSFORMAÇÕES LOCAIS (dependentes de cada $x \in \mathbb{R}^4$)

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad , \quad \alpha(x) \in \mathbb{R}$$

ENERGIA: $\frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\ F^t F$ e a **AÇÃO** $= \frac{1}{4} \int F^t F \, dx$

OBSERVAÇÃO: Retornaremos a estas Transformações de Gauge Locais. São Transformações Geradas por Elementos do Grupo UNITÁRIO ABELIANO U(1) $\equiv \{e^{i\alpha(x)} \mid \alpha(x) \in \mathbb{R}\}$, $\forall x \in \mathbb{R}^4$

Simetria de Gauge Local por U(1) resulta na **CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA** na QED

MAXWELL Implica na **EQUAÇÃO de ONDA:**

Para $\vec{Q}(x) = \vec{E}(x)$, $\vec{B}(x)$, formulação com tempo imaginário,

$$\Delta\vec{Q}(x) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}\right)\vec{Q}(x) = 0\,,$$

Δ é o OPERADOR **LAPLACEANO** em $\mathbb{R}^4$

TOMANDO a **TRANSFORMADA de FOURIER** ($\sim$ Generalização Mais Delicada da Transformada de Laplace "da EDO")

Se a **variável dual** de $x \in \mathbb{R}^4$ é denotada por $p \in \mathbb{R}^4$, e

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{\mathbb{R}^4} e^{-ip.x}\, f(x)\, d^4x$$

Se $P = (P^0, P^1, P^2, P^3)$, $P_\mu = -i\,\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, então

$$-\tilde{\Delta} \equiv \mathcal{F}(-\Delta) = P^2 = (P^0)^2 + (P^1)^2 + (P^2)^2 + (P^3)^2$$

é um operador de Multiplicação: $\tilde{f}(p) \xrightarrow{-\tilde{\Delta}} p^2\,\tilde{f}(p)$

AUTOVALORES de $(-\tilde{\Delta})$: $(p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \geq 0$

MODO ZERO: Em $p \equiv 0$, $(-\Delta)^{-1}$ NÃO Está DEFINIDO !

Para lidar com isso, podemos adicionar um **PARÂMETRO REGULADOR** $\xi > 0$, tal que

$$\left[(-\tilde{\Delta}) + \xi^2 \, \mathbb{I}\right]^{-1} = \frac{1}{p^2 + \xi^2}$$

fique bem definido.

O seguinte resultado nos é útil: Para $x, y \in \mathbb{R}^d$ e para

$$(-\Delta + \xi^2)\, C(x,y) = \delta(x-y)$$

tal que C = temos que

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \ll \mathbf{1}: \quad C(x,y) \approx \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \ \ln(\xi\,|x-y|) & , \quad d=2 \\[2ex] \dfrac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{d/2}} \ |x-y|^{-d+2} & , \quad d \geq 3 \end{cases}$$

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \gg \mathbf{1}: \quad C(x,y) \approx \sqrt{\pi/2}\, (2\pi)^{-d/2}\, \xi^{(d-3)/2} \ |x-y|^{-(d-1)/2} \ e^{-\xi|x-y|}$$

SINGULARIDADE IR (Infra-Vermelho): QUANDO $\xi \searrow 0$, temos que $C(x,y)$ NÃO é $\mathcal{L}_1$, integrabilidade no infinito, i.e. para $|x-y| \nearrow \infty$. (Fenômenos Críticos, Bifurcações $=$ Transições de Fase)

SINGULARIDADES UV (Ultra-Violeta): Singularidades em $C(x,y)$ quando $|x-y| \searrow 0$, para todo ξ.

OBSERVAÇÃO: Consistência do comportamento Assintótico de $C(x,y)$ com o Clássico **Teorema de Paley-Wiener**.

Relação com QED: No Eletromagnetismo, $A_\mu(x)$ é o campo descrevendo o Fóton. Ele verifica a Equação $\Delta\, A_\mu(x) = 0$. Fóton possui MASSA NULA ($m \equiv \xi = 0$) $\Longrightarrow$ ALCANCE ∞ das Interações Eletromagnéticas

OBSERVAÇÃO: QED APRESENTA Singularidades IR e UV!

MECÂNICA QUÂNTICA

$t \in \mathbb{R}$ denota <u>TEMPO</u>

$\vec{r} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ denota o <u>Vetor Posição</u>

FÍSICA: Descrita por VETORES COMPLEXOS (**Estados**) $\Psi \equiv \Psi(t, \vec{r})$ num <u>**ESPAÇO de HILBERT**</u> $\mathcal{H}$ [= Espaço Normado, Completo e com <u>PRODUTO INTERNO</u> $(\,.\, , \,.\,)_{\mathcal{H}}$]

OBSERVÁVEIS FÍSICOS: **OPERADORES** <u>AUTO-ADJUNTOS</u> (Hermiteanos) em $\mathcal{H}$. O <u>VALOR MÉDIO</u> do Observável $\mathcal{O}$ no *ESTADO* Ψ é

$$E_\Psi(\mathcal{O}) = \frac{(\Psi, \mathcal{O}\Psi)_{\mathcal{H}}}{(\Psi, \Psi)_{\mathcal{H}}} \quad , \quad \Big(\mathcal{O}^*\Psi \, , \, \Psi'\Big)_{\mathcal{H}} = \Big(\Psi \, , \, \mathcal{O}\Psi'\Big)_{\mathcal{H}}$$

ESPECTRO (Autovaloes, Bandas,...): $\mathrm{spec}\,\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, MENSURÁVEL em EXPERIMENTOS !

PARTÍCULA MOVENDO SOB A AÇÃO de um POTENCIAL V:

OPERADOR ENERGIA $\quad H = -\frac{1}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \quad , \quad \hbar = c = 1$

$-\Delta$ é Menos o Laplaceano: $-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{d-1}^2} \geq 0$

$H_0 \equiv (-\Delta/2m)$ descreve o Operador ENERGIA CINÉTICA $(P^2/2m)$

$V(\vec{r})$ é um Operador de Multiplicação pelo Potencial

EVOLUÇÃO TEMPORAL, é Governada pela Equação de Schrödinger, e é então **Determinística**

$$i \; \frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi$$

que é uma Eq. do tipo DIFUSÃO com TEMPO IMAGINÁRIO !

PROBABILÍSTICA: é a Interpretação de COPENHAGEN

$\Psi \equiv \Psi(t, \vec{r})$ Descreve a **AMPLITUDE de PROBABILIDADE** de Encontrar a Partícula em $(t, \vec{r})$

OBS: NÃO TEMOS MAIS a Noção de ÓRBITA na Evolução Temporal!

Escolha FÍSICA: $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(d^d\vec{x}, \mathbb{R}^d)$

Espaço de Funções $f \in \mathbb{C}$ com $|f|^2$ Integrável

$$\|\Psi\|^2 \equiv \langle \Psi \, , \, \Psi \rangle \equiv \int \bar{\Psi}(t, \vec{r}) \Psi(t, \vec{r}) \, d^d\vec{x}$$

Descreve o Quadrado da **PROBABILIDADE** de Encontrar a Partícula em $(t, \vec{r})$.

<u>Princípio de Incerteza de Heisenberg</u>: Desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathcal{H}$

EDO LINEAR de 1a ORDEM: com $c(x)$ integrável,

$y'(x) = c(x)y(x),$ Tem Sol. Geral $y(x) = const \exp\left\{\int c(x)\,dx\right\}$

<u>SEMI</u>-**GRUPO de EVOLUÇÃO no TEMPO**: Para $t \geq t_0$,

$\Psi(t,\vec{r}) = e^{-iH(t-t_0)}\,\Psi(t_0,\vec{r}),$ $(\mathbf{Isometria}$: Importante p/ Probabilidade)

H (Auto-Adjunto) é o **Gerador da Dinâmica** !

OBS: **Espectro** de H **Determina a Evolução Temporal**

(Fácil ver quando $\mathcal{H}$ é de dimensão finita, tal que o Espectro de H é do tipo Puro Ponto (só autovalores) e usamos a forma Complexa do Teorema Espectral, Assegurando a Existência de uma Autobase e Escrevemos ψ em termos da Autobase de H)

SIMILAR: GRUPO UNITÁRIO DE TRANSLAÇÕES no ESPAÇO $\mathbb{R}^{d-1}$. GERADOR é o OPERADOR de MOMENTO $\vec{P}$

$[\vec{P}, H] = 0 \implies \vec{P}$, H Diagonalizáveis Simultaneamente em $\mathcal{H}$

ESPECTRO CONJUNTO de H e $\vec{P}$: **ENERGIA-MOMENTO**

COMPLICAÇÕES: Em Muitos Problemas, $\dim \mathcal{H} = \infty$; o Potential $V(\vec{r})$ pode ser singular (e.g. Coulomb), etc

Conveniente: TEMPO IMAGINÁRIO (Euclideano) $it \to t$

$$\Psi(t, \vec{r}) = e^{-H(t-t_0)} \, \Psi(t_0, \vec{r})$$

Para ter uma CONTRAÇÃO (i.e. para $\|\Psi(t, \vec{r})\|$ não crescer com t) H Semi-Limitado Inferiormente i.e. $H > -c$, $c > 0$,

$\|\Psi(t, \vec{r})\|$ **Não Explode** (Importante para Manter a Interpretação Probabilística!)

Como $(-\Delta) \geq 0$, é suficiente tomar V Semi-Limitado Inferiormente, o que é Fisicamente Aceitável !

Usando a Fórmula de Produto de Lie-Trotter: Válida mesmo que $[A, B] = AB - BA \neq 0$,

$$e^{-(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{-A/n}\, e^{-B/n}\right)^n$$

Consideramos: $A = H_0$ e $B = V$ Semi-Limitados Inferiormente em $\mathcal{H}$, e tal que $H = H_0 + V$ seja **ESSENCIAMENTE AUTO-ADJUNTO** na Intersecção dos Domínios de H_0 e V

OBSERVAÇÃO: ESSENCIALMENTE AUTO-ADJUNTO definido como $\mathcal{O} = \mathcal{O}^{**}$ (Ref. Livro do Prof César Oliveira!)

O SEMI-GRUPO é FORTEMENTE CONTÍNUO $\Longrightarrow$ CONVERGÊNCIA $n \to \infty$ de Lie-Trotter (na Topologia Forte para Operadores)

FEYNMAN-KAC FORMULA: para a EVOLUÇÃO no TEMPO, de H_0, PERTURBADO por V, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

Se $\int_{\mathbb{R}^3} \equiv \lim_{R\to\infty} \int_{|\vec{x}|\leq R}$, com limite na norma $\mathcal{L}^2$,

$$\left(e^{-(H_0+V)t}\Phi\right)(\vec{x}) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{4\pi t}\right)^{\frac{3n}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} \cdots \int_{\mathbb{R}^3} e^{-t\, S_n(\vec{x},\vec{y}_1,..,\vec{y}_n)} \Phi(\vec{y}_n)\, d\vec{y}_1 \ldots d\vec{y}_n$$

$$S_n(\vec{x} \equiv \vec{y}_0, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4}\left(\frac{|\vec{y}_i - \vec{y}_{i-1}|}{t/n}\right)^2 - V(\vec{y}_i)\right]$$

INCORPORA o Princípio de Heisenberg: Os $\vec{y}$´s são integrados no ESPAÇO TODO. com Pontos Inicial/Final Fixos. CONSIDERAMOS TODOS os CAMINHOS POSSÍVEIS, com um PESO ESTATÍSTICO!

No limite $n \nearrow \infty$, para $\Omega_{\vec{x}}$ denotando o Conjunto de Caminhos ω com $\omega(0) = \vec{x}$,

$$\left(e^{-(H_0+V)t}\,\Phi\right)(\vec{x}) = \int_{\Omega_{\vec{x}}} e^{-tS(\omega)}\,\Phi(\omega(t))\,d\omega\,.$$

com uma MEDIDA de WIENER Sobre Processos Aleatórios.

TEORIA QUÂNTICA RELATIVISTA DE CAMPOS (QFT):

- COMBINA Relatividade Especial com Mecânica Quântica

- Com Tempo Imaginário, Similar a Mecânica Estatística Clássica para Sistemas no Equilíbrio

- CAMPOS LOCAIS, definidos em cada $x \in \mathbb{R}^4$, são as VARIÁVEIS do PROBLEMA!

- INFINITOS PONTOS $\Longrightarrow$ NÚMERO ∞ de Graus de Liberdade

Modelo de QFT: Definido por uma INTEGRAL FUNCIONAL sobre o **ESPAÇO dos CAMPOS**

- $\Phi(x)$: Processo Aleatório em $x \in \mathbb{R}^4$ (x é um parâmetro!)

- $\Phi(x)$ pode estar definido em Espaços Complicados (Grupos, Espaços Anti-Comutativas, Espaços Spinoriais, etc)

CORRELAÇÕES NORMALIZADAS: Seja $\ell \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

$$S_\ell^{norm}(x_1, \ldots, x_\ell) = \frac{1}{Z} S_\ell(x_1, \ldots, x_\ell),$$

Função de Partição: Normalização $Z \equiv S_0$

Correlações Não NORMALIZADAS: Momentos de uma MEDIDA de Probabilidade do TIPO GIBBS

$$S_\ell(x_1, \ldots, x_\ell) = \int \Phi(x_1) \cdots \Phi(x_\ell) \, d\nu(\Phi),$$

of the Measure $d\nu(\Phi) = \exp\left\{\int [-\lambda V(\Phi(z))] \, d^d z\right\} d\mu_C(\Phi)$.

$d\mu_C(\Phi)$ Medida GAUSSIANA Normalizada, com Média Zero & Covariância C.

$S_\ell^{norm}(x_1, \ldots, x_\ell)$ é o ℓ-Momento da Medida de Probabilidade $\dfrac{d\nu(\Phi)}{Z}$

Para QED e QCD, grosseiramente, tomamos C como o Operador num dado espaço com núcleo integral $C(x, y)$ como acima

QED e QCD: APRESENTAM SINGULARIDADES IR e UV

DENINIÇÂO do MODELO: **NECESSITA REGULADORES** (CUTOFFS) para Pequenas Distâncias e, Se Massa NULA, para Grandes Distâncias Também

RENORMALIZAÇÃO para ELIMINAR SINGULARIDADES

EXISTÊNCIA = FINITUDE MATEMÁTICA do MODELO de QFT: Finitude de $S_\ell^{norm}(x_1, \ldots, x_\ell)$ Quando os CUTOFFS são Retirados num Processo de Limite

Uma Fórmula de Feynman-Kac IDENTIFICA PRODUTOS INTERNOS DE VETORES em $\mathcal{H}$ com os $S_\ell^{norm}(x_1, \ldots, x_\ell)$

ACEITABILIDADE FÍSICA: No Formalismo com Tempo Imaginário, devemos VERIFICAR o Conjunto de **AXIOMAS de OSTERWALDER-SCHRADER**!

OBSERVAÇÃO: Em particular o AXIOMA da **Positividade por Reflexão** Garante que EXISTE um ESPAÇO de HILBERT $\mathcal{H}$ Quântico Subjacente

OBSERVAÇÃO: TRABALHAR numa INICIALMENTE numa **REDE** (**Reticulado**) **FINITO** $\Lambda \subset a\mathbb{Z}^4$, $a \in (0,1]$ é muito **CONVENIENTE**

POSITIVIDADE GARANTIDA!

Tomar o **Limite TERMODINÂMICO** $\Lambda \nearrow a\mathbb{Z}^4$ e depois o **Limite do CONTÍNUO** $a \searrow 0$ no Final.

SE Modelo EXISTE e Verifica OS: **TEOREMA da RECONSTRUÇÃO** $\Longrightarrow$ EXISTE um Modelo Físico Correspondente no Espaço de MINKOWSKI, Obedecendo aos **Axiomas de Haag-Ruelle-Wightman**

OBSERVAÇÃO: Físicos Teóricos consideram "somente" Tratamento Perturbativo, expandem $e^{-\lambda V}$ em Série de Taylor (CONVERGE ???)

QCD: Teoria de Gauge com Grupo NÃO-ABELIANO SU(3)

Incorpora os Quarks e Anti-Quarks: Em cada $x \in \mathbb{R}^4$ são Variáveis Aleatórias (SPIN 1/2) definidas Numa Álgebra de Grassmann de Dim ∞ Anticomutativa $AB = -BA$

Como na QED: GLUON $A_\mu(x)$ tem massa $m = 0$ e, para cada $x \in \mathbb{R}^4$, é uma MATRIZ 3×3 na álgebra de Lie $su(3)$

TENSOR de CAMPO: $g > 0$ é mede a intensidade da força forte,

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x + ig\,[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

Novidade: Termo com COMUTADOR na Álgebra de Lie $su(3)$

(Inexistente na QED: U(1) é Abeliano e o Comutador é ZERO!)

Esquecendo os QUARKS/ANTIQUARKS, **YANG-MILLS PURO**: $\text{Tr}\,[F^{\mu\nu}(x)\,F_{\mu\nu}(x)]$ (curvatura escalar) é sua $\int dx$ são invariantes por Transformações de Gauge Local de SU(3)

$U \in$ SU(3). Com $U \equiv U(x) = \exp\left[ig\,\sum_{c=1}^{8}\,\alpha^c(x)\,\theta^c\right]$, $\alpha^c(x) \in \mathbb{R}$,

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow U\,F_{\mu\nu}\,U^{-1}$$

Resulta a partir de

$$A_\mu(x) = A^c_\mu(x)\,\theta^c \longrightarrow U A_\mu(x) U^{-1} + U\partial_\mu U^{-1}$$

Fácil ver que se $U \in$ U(1) esta transformação dá, como antes,

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

Fácil Incorporar QUARKS/ANTIQUARKS nesse Contexto

PROBLEMA:

1) MOSTRAR que o MODELO EXISTE MATEMATICAMENTE. Inicialmente na **REDE** Λ, Mostrar que as CORRELAÇÕES EXISTEM quando $\Lambda \nearrow a\mathbb{Z}^4$ e, depois, quando $a \searrow 0$

2) MOSTRAR que no ESPAÇO de HILBERT há um MASS GAP no SETOR GLUÔNICO. Sem Vetores Associados a um ÚNICO GLUON

3) MOSTRAR INCORPORANDO QUARKS e ANTIQUARKS que Estas PARTÍCULAS FERMIÔNICAS LIVRES TAMBÉM NÃO EXISTEM, APENAS SEUS ESTADOS LIGADOS

OUTRAMENTE: Em $\mathcal{H}$, HÁ APENAS VETORES INVARIANTES de GAUGE. LOW-LYING SPECTRUM constituído de:

MÉSONS: $M_{\vec{\alpha}\vec{f}} \equiv \{\, \bar{\psi}^a_{\alpha_1,f_1}(x)\psi^a_{\alpha_2,f_2}(x)\,\}$,

BÁRIONS: $B_{\vec{\alpha},\vec{f}}(x) \equiv \{\, \epsilon_{abc}\psi^a_{\alpha_1,f_1}(x)\psi^b_{\alpha_2,f_2}(x)\psi^c_{\alpha_3,f_3}(x)\}$,

GLUEBALLS, suas Misturas e suas Anti-Partículas

OBSERVAÇÃO: Utilizando Representações Espectrais para os Operadores (QUE COMUTAM ENTRE SI!) de ENERGIA e MOMENTO em $\mathcal{H}$, é possível Associas **SINGULARIDADES** de Certas Transformadas de Fourier das Correlações com Pontos no Espectro de ENERGIA-MOMENTO. Assim, determinamos o Low-Lying ESPECTRO de EM

OBSERVAÇÃO: Por PALEY-WIENER, o **ALCANCE FINITO das INTERAÇÕES FORTES REQUER O GAP DE MASSA em YANG-MILLS**

MUITO OBRIGADO !!!

PS: Deixo-lhes umas páginas extras abaixo com uma definição precisa do modelo numa rede/reticulado Λ dada acima, a qual é uma aproximação do Espaço-Tempo $\mathbb{R}^4$ que engloba uma boa forma de definir o modelo com CUTOFFS. Esta forma é devido a K. Wilson, prêmio Nobel de Física.

THE LQCD MODEL and SOME BASICS: Lattice $\Lambda \equiv a\mathbb{Z}^4$, $a \in (0,1]$, with L (EVEN) Sítes in EACH SIDE

Statistical Mechanical **Partition Function**

$$Z = \int e^{-S(\psi,\bar\psi,g)}\, d\psi\, d\bar\psi\, d\mu(g)\,,$$

and for a function $F(\bar\psi,\psi,g)$, the **Normalized Correlations** are denoted by

$$\langle F\rangle \;=\; \frac{1}{Z}\int F(\bar\psi,\psi,g)\, e^{-S(\psi,\bar\psi,g)}\, d\psi\, d\bar\psi\, d\mu(g)\,.$$

The **Model ACTION** $S \equiv S(\psi,\bar\psi,g)$ is the **Improved Wilson** action (**no fermion doubling!**). For $d = 2,3,4$,

$$\begin{aligned} S \;=\; & \frac{\kappa}{2} a^d \sum \bar\psi_{a,\alpha,f}(u)\Gamma^{\sigma e^\mu}_{\alpha\beta}(g_{u,u+\sigma e^\mu})_{ab}\psi_{b,\beta,f}(u+\sigma e^\mu) \\ & + a^d \sum_{u\in\mathbb{Z}_o^{d+1}} \bar\psi_{a,\alpha,f}(u) M_{\alpha\beta}\psi_{a,\beta,f}(u) - \frac{a^{d-4}}{g_0^2}\sum_p \chi(g_p)\,, \end{aligned}$$

where, besides the sum over repeated indices α, $\beta = 1,2,3,4$ (spin), $a = 1,2,3$ (color) and $f = 1,2,3 \equiv u,d,s$ (isospin), the first sum runs over $u = (u^0,\vec u) = (u^0,u^1,u^2,u^3) \in \mathbb{Z}_o^{d+1} \equiv \{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2 ...\} \times \mathbb{Z}^3$, $\sigma = \pm 1$ and $\mu = 0,1,2,3$.

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & \frac{\kappa}{2} a^d \sum \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) \Gamma^{\sigma e^\mu}_{\alpha\beta} (g_{u,u+\sigma e^\mu})_{ab} \psi_{b,\beta,f}(u+\sigma e^\mu) \\
& + a^d \sum_{u \in \mathbb{Z}_o^{d+1}} \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) M_{\alpha\beta} \psi_{a,\beta,f}(u) - \frac{a^{d-4}}{g_0^2} \sum_p \chi(g_p)\,,
\end{aligned}
$$

PARAMETERS: **Hopping Parameter** $\kappa > 0$, the **Pure Gauge Strength** $\beta \equiv (g_0^2)^{-1} > 0$, **Fermion Masses** $M_{\alpha\beta} \equiv M_{\alpha\beta}(m, \kappa) > 0$, $m > 0$ is the Bare Fermion Mass.

QUARKS & ANTIQUARKS:

At each site $u \in \mathbb{Z}_o^{d+1}$, there are fermionic Grassmann Quark fields $\psi_{a\alpha f}(u)$ and Antiquark fields $\bar{\psi}_{a\alpha f}(u)$, carrying a Dirac Spin index $\alpha = 1,2,3,4$, an SU(3)$_c$ Color index $a = 1,2,3$ and Flavor $f = 1,2,3$.

GAUGE FIELDS: For each nearest neighbor oriented lattice bond $< u, u \pm e^\mu >$ there is an SU(3)$_c$ matrix $U(g_{u,u\pm e^\mu}) \equiv g_{u,u\pm e^\mu}$ satisfying $U(g_{u,u+e^\mu})^{-1} = U(g_{u+e^\mu,u})$.

PLAQUETTES: p (**Oriented Square with Four Bonds**) there is a **Plaquette Variable** U_p given by the ordered product of bond matrices of SU(3)$_c$. χ **is the Real Part of the Trace**.

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & \frac{\kappa}{2} a^d \sum \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) \Gamma^{\sigma e^\mu}_{\alpha\beta} (g_{u,u+\sigma e^\mu})_{ab} \psi_{b,\beta,f}(u+\sigma e^\mu) \\
& + a^d \sum_{u \in \mathbb{Z}_o^{d+1}} \bar{\psi}_{a,\alpha,f}(u) M_{\alpha\beta} \psi_{a,\beta,f}(u) - \frac{a^{d-4}}{g_0^2} \sum_p \chi(g_p)\,,
\end{aligned}
$$

FERMION MASSES: Choose $m > 0$ such that $M_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

DIRAC-GAUGE MATRICES: For $\mu = 0, 1, 2, 3$, $\Gamma^{\pm e^\mu} = -I_4 \pm \gamma^\mu$, γ_μ are the 4×4 Dirac matrices.

$$
\langle F \rangle \;=\; \frac{1}{Z} \int F(\bar{\psi}, \psi, g)\, e^{-S(\psi, \bar{\psi}, g)}\, d\psi\, d\bar{\psi}\, d\mu(g)\,.
$$

GAUGE FIELD MEASURE: The measure $d\mu(g)$ is the product of Bond Normalized SU(3)$_c$ Haar measures.

GRASSMANN INTEGRALS: Grassmann Integrals are **Berezin** Integrals!

FERMION INTEGRATION ELEMENTS: $d\psi\, d\bar{\psi}$ is the product measure, $\prod_{u,\ell} d\psi_\ell(u)\, d\bar{\psi}_\ell(u)$.

GAUSSIAN FERMION INTEGRATION: BEREZIN Usual. With a normalization $\mathcal{N}_1 = \langle 1 \rangle$, we have

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\ell_1}(x)\,\bar\psi_{\ell_2}(y)\rangle &= \tfrac{1}{\mathcal{N}_1}\int \psi_{\ell_1}(x)\,\bar\psi_{\ell_2}(y)\,e^{-\sum_{u,\ell_3,\ell_4}\bar\psi_{\ell_3}(u)O_{\ell_3\ell_4}\psi_{\ell_4}(u)}\,d\psi\,d\bar\psi \\ &= O^{-1}_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_{a_1a_2}\delta_{f_1f_2}\delta(x-y) \end{aligned},$$

Setting $\kappa = 0$, we have **UNIT COVARIANCE**.

LOCAL GAUGE INVARIANCE: The Wilson action is invariant by (for $x \in \mathbb{Z}_o^{d+1}$ and $h(x) \in \mathrm{SU}(3)_c$)

$$\begin{aligned} \psi(x) &\mapsto h(x)\,\psi(x)\,, \\ \bar\psi(x) &\mapsto \bar\psi(x)\,[h(x)]^{-1}\,, \\ U(g_{x+e^\mu,x}) &\mapsto h(x+e^\mu)\,U(g_{x+e^\mu,x})\,[h(x)]^{-1}\,. \end{aligned}$$

GLOBAL FLAVOR SYMMETRY: $\mathrm{SU}(3)_f$. Includes $[\mathrm{SU}(2)\times \mathrm{U}(1)] \subset \mathrm{SU}(3)_f$ is the **ISOSPIN** & **HYPERCHARGE** Subgroup