Hipótese de Riemann: 165 anos e contando...

Marco Aymone

UFMG, Brasil

XI Bienal de Matemática, UFSCar
01 de Agosto, 2024

Sumário

- História
- O Teorema do Número Primo
- Hipótese de Riemann e os Números Primos
- A função de Möbius
- Abordagem Probabilística para a Hipótese de Riemann

Teoria Multiplicativa dos Números

Teoria Multiplicativa dos Números

- É a parte da Matemática que se dedica a estudar as propriedades dos números naturais ou inteiros positivos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

Teoria Multiplicativa dos Números

- É a parte da Matemática que se dedica a estudar as propriedades dos números naturais ou inteiros positivos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

- Avanço tecnológico às civilizações: Tempo para pensar sobre questões relacionadas a esses números - Misticismo

Teoria Multiplicativa dos Números

- É a parte da Matemática que se dedica a estudar as propriedades dos números naturais ou inteiros positivos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$$

- Avanço tecnológico às civilizações: Tempo para pensar sobre questões relacionadas a esses números - Misticismo
- Santo Agostinho: *Deus criou o mundo em 6 dias porque 6 é um número perfeito.*

Teoria Multiplicativa dos Números

Teoria Multiplicativa dos Números

- A escola grega foi a primeira a classificar os números: pares, ímpares, primos, compostos...

Teoria Multiplicativa dos Números

- A escola grega foi a primeira a classificar os números: pares, ímpares, primos, compostos...
- p é um número primo se possui exatamente 2 divisores

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

Teoria Multiplicativa dos Números

- A escola grega foi a primeira a classificar os números: pares, ímpares, primos, compostos...
- p é um número primo se possui exatamente 2 divisores

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

- 300 a.c.: É lançada a coleção de 13 livros chamados *Elementos*, por Euclides

Teoria Multiplicativa dos Números

- A escola grega foi a primeira a classificar os números: pares, ímpares, primos, compostos...
- p é um número primo se possui exatamente 2 divisores

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...$$

- 300 a.c.: É lançada a coleção de 13 livros chamados *Elementos*, por Euclides
- No livro IX, Euclides provou que há infinitos primos.

O argumento de Euclides

O argumento: Tome qualquer coleção finita de primos, $p_1, p_2, ..., p_n$.

O argumento de Euclides

O argumento: Tome qualquer coleção finita de primos, $p_1, p_2, ..., p_n$.
O número

$$p_1 p_2 ... p_n + 1$$

é divisível por pelo menos um primo que não está nessa lista.

A distribuição dos Números Primos

A distribuição dos Números Primos

- Não há nenhuma função do Cálculo $f(n)$ tal que

$$f(n) = p_n,$$

para todo n.

A distribuição dos Números Primos

- Não há nenhuma função do Cálculo $f(n)$ tal que

$$f(n) = p_n,$$

para todo n.

- Isso motivou o estudo da função

$$\pi(x) = \text{quantidade de primos entre 2 e } x.$$

A distribuição dos Números Primos

- Não há nenhuma função do Cálculo $f(n)$ tal que

$$f(n) = p_n,$$

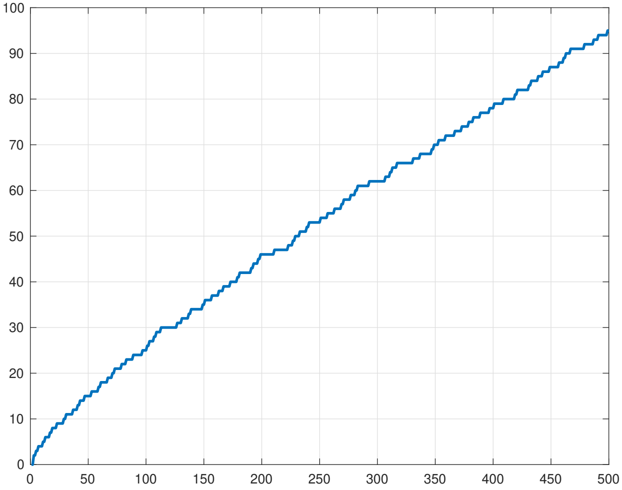
para todo n.

- Isso motivou o estudo da função

$$\pi(x) = \text{quantidade de primos entre 2 e } x.$$

Exemplo: $\pi(11) = \#\{2, 3, 5, 7, 11\} = 5$.

O gráfico de $\pi(x)$



Teoria Analítica dos Números

Teoria Analítica dos Números

- Parte dessa Teoria se dedica a aproximar funções de natureza aritimética com complexidade alta por funções mais elementares, isto é, de complexidade mais baixa.

Teoria Analítica dos Números

- Parte dessa Teoria se dedica a aproximar funções de natureza aritimética com complexidade alta por funções mais elementares, isto é, de complexidade mais baixa.
- Em geral funções que dependem da fatoração dos inteiros são de complexidade considerável.

Teoria Analítica dos Números

- Parte dessa Teoria se dedica a aproximar funções de natureza aritimética com complexidade alta por funções mais elementares, isto é, de complexidade mais baixa.
- Em geral funções que dependem da fatoração dos inteiros são de complexidade considerável.
- Gauss e Legendre conjecturaram independentemente que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

nesta palestra $\log x = \ln x$.

A distribuição dos números primos

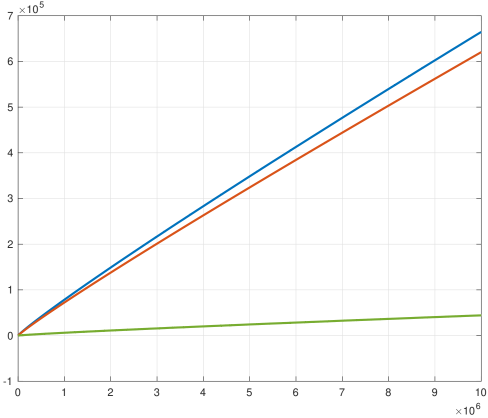
Uma simples manipulação de limites nos permite escrever

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \mathrm{Erro}(x),$$

onde a conjectura de Gauss-Legendre fica equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{Erro}(x)}{x/\log x} = 0.$$

Gráfico de $\pi(x)$



Azul: $\pi(x)$, Vermelho: $x/\log x$, Verde: $\pi(x) - x/\log x$

A distribuição dos números primos

A distribuição dos números primos

- A conjectura de Gauss-Legendre afirma que a densidade dos números primos – $\frac{\pi(x)}{x}$ – tende a 0 com velocidade logarítimica.

A distribuição dos números primos

- A conjectura de Gauss-Legendre afirma que a densidade dos números primos – $\frac{\pi(x)}{x}$ – tende a 0 com velocidade logarítimica.
  log, log log,... vão para infinito com muita dignidade
- Essa conjectura perdurou por aproximadamente 100 anos até ser provada independentemente por Hadamard e de La Vallée Poussin em 1896.

Teorema do Número Primo

A prova numa casca de noz

Análise de Fourier e Séries de Dirichlet

Análise de Fourier e Séries de Dirichlet

- Muitos problemas em análise como em equações diferenciais se resolvem por intermédio da Transformada de Fourier:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx.$$

Análise de Fourier e Séries de Dirichlet

- Muitos problemas em análise como em equações diferenciais se resolvem por intermédio da Transformada de Fourier:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{isx} dx.$$

- Dada uma sequência de números complexos $a_1, a_2, a_3, \ldots$, as propriedades da função

$$A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$$

está intimamente relacionada a série de Dirichlet correspondente

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Análise de Fourier e Séries de Dirichlet

- A série de Dirichlet $F(s)$ age como uma Transformada de Fourier da função $A(x)$ - A Transformada de Mellin: $s = \sigma + it$

$$F(s) = s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{1+s}} dx.$$

Análise de Fourier e Séries de Dirichlet

- A série de Dirichlet $F(s)$ age como uma Transformada de Fourier da função $A(x)$ - A Transformada de Mellin: $s = \sigma + it$

$$F(s) = s\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{1+s}}dx.$$

- Assim como a transformada de Fourier, a Transformada de Mellin pode ser invertida:

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(s)}{s}x^s ds.$$

Análise de Fourier aplicada a distribuição dos primos

- No caso da distribuição dos primos, note que podemos escrever

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é primo}, \\ 0, & \text{caso contrário}. \end{cases}$$

Análise de Fourier aplicada a distribuição dos primos

- No caso da distribuição dos primos, note que podemos escrever

$$\pi(x) = \sum_{n \leq x} a_n,$$

onde

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ é primo,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Assim, podemos entender $\pi(x)$ através da Transformada de Mellin associada

$$\sum_{p} \frac{1}{p^s}.$$

Um problema...

- Como conhecer propriedades da série

$$\sum_p \frac{1}{p^s}$$

sem conhecer explicitamente os números primos?

Um problema...

- Como conhecer propriedades da série

$$\sum_p \frac{1}{p^s}$$

sem conhecer explicitamente os números primos?

- Aí é que entra a função ζ de Riemann!

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

A função ζ e os números primos

A função ζ e os números primos

- Muito antes da conjectura de Gauss-Legendre, Euler descobriu que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \; s \text{ real e maior do que } 1,$$

satisfaz a fórmula Produto de Euler:

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)^{-1} \ldots \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

A função ζ e os números primos

- Muito antes da conjectura de Gauss-Legendre, Euler descobriu que

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ s \text{ real e maior do que } 1,$$

satisfaz a fórmula Produto de Euler:

$$\zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{5^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{7^s}\right)^{-1} \ldots$$
$$= \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

- Tomando o logaritimo e usando a aproximação de Taylor $\log(1+x) \approx x$ quando $|x| < 1$, obtemos que

$$\log \zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}.$$

A função ζ e os números primos

- A relação $\log \zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}$ nos permite entender as propriedades de $\pi(x)$ através do $\log \zeta(s)$.

A função ζ e os números primos

- A relação $\log \zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}$ nos permite entender as propriedades de $\pi(x)$ através do $\log \zeta(s)$.
- Em geral, transformada de Fourier suave (sem explosões), permite-nos deduzir boas propriedades para a função original.

A função ζ e os números primos

- A relação $\log \zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}$ nos permite entender as propriedades de $\pi(x)$ através do $\log \zeta(s)$.
- Em geral, transformada de Fourier suave (sem explosões), permite-nos deduzir boas propriedades para a função original.
- Pergunta: Quando que o logaritmo de uma função explode?

A função ζ e os números primos

- A relação $\log\zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}$ nos permite entender as propriedades de $\pi(x)$ através do $\log\zeta(s)$.
- Em geral, transformada de Fourier suave (sem explosões), permite-nos deduzir boas propriedades para a função original.
- Pergunta: Quando que o logaritmo de uma função explode? Explode nos pontos onde a função se anula!

A função ζ e os números primos

- A relação $\log\zeta(s) \approx \sum_p \frac{1}{p^s}$ nos permite entender as propriedades de $\pi(x)$ através do $\log\zeta(s)$.
- Em geral, transformada de Fourier suave (sem explosões), permite-nos deduzir boas propriedades para a função original.
- Pergunta: Quando que o logaritmo de uma função explode? Explode nos pontos onde a função se anula!
- Isso explica a conexão entre primos e zeros de Riemann.

A função de von Mangoldt

- Um problema técnico complexo Analítico: As singularidades de $\log \zeta(s)$ que correspondem aos zeros de $\zeta(s)$ são muito mal comportadas.

A função de von Mangoldt

- Um problema técnico complexo Analítico: As singularidades de $\log\zeta(s)$ que correspondem aos zeros de $\zeta(s)$ são muito mal comportadas.
- O remédio": Ao invés de contarmos primos com peso 1, contamos primos com peso $\log p$.

A função de von Mangoldt

- Um problema técnico complexo Analítico: As singularidades de $\log \zeta(s)$ que correspondem aos zeros de $\zeta(s)$ são muito mal comportadas.
- O remédio": Ao invés de contarmos primos com peso 1, contamos primos com peso $\log p$.
- Mais precisamente, definimos a função de von Mangoldt:

von Mangoldt

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & se\ n = p^k,\ para\ algum\ k \geq 1, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

A função de von Mangoldt

- Temos que
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p^k} \frac{\Lambda(p^k)}{p^{ks}}.$$

A função de von Mangoldt

- Temos que
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p^k} \frac{\Lambda(p^k)}{p^{ks}}.$$
- As singularidades de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ ainda correspondem aos zeros de $\zeta(s)$, porém elas são do tipo pólos.

A função de von Mangoldt

- Temos que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{p^k} \frac{\Lambda(p^k)}{p^{ks}}.$$

- As singularidades de $\zeta'(s)/\zeta(s)$ ainda correspondem aos zeros de $\zeta(s)$, porém elas são do tipo pólos.
- O Teorema do Número Primo fica equivalente a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{p^k \leq x} \Lambda(p^k) = 1.$$

A anatomia de ζ por Riemann

Riemann provou que:

- O domínio da função ζ pode ser extendido para todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Essa nova função definida nesse domínio maior continua sendo analítica.

A anatomia de ζ por Riemann

Riemann provou que:

- O domínio da função ζ pode ser extendido para todo $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Essa nova função definida nesse domínio maior continua sendo analítica.
- Para $s \neq 1$ com parte real maior do que 0,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx,$$

onde $\{x\}$ = parte fracionária de x.

A anatomia de ζ por Riemann

- Para outros valores de s, ζ pode ser refletida através da equação funcional
$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s),$$
onde
$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2)\Gamma(1-s),$$
onde Γ é a função de Euler que generaliza o fatorial.
- A função χ não se anula na faixa $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.

A anatomia de ζ por Riemann

- Para outros valores de s, ζ pode ser refletida através da equação funcional
$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s),$$
onde
$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2)\Gamma(1-s),$$
onde Γ é a função de Euler que generaliza o fatorial.
- A função χ não se anula na faixa $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$.
- Isso implica que nessa faixa os zeros de Riemann estão simetricamente relacionados em torno da linha $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

A hipótese de Riemann

Conjectura

Os zeros da função ζ *que tem parte real entre* 0 *e* 1 *estão alinhados verticalmente na linha* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

A hipótese de Riemann

Conjectura

Os zeros da função ζ que tem parte real entre 0 e 1 estão alinhados verticalmente na linha $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

- Oitavo problema da lista de Hilbert anunciada pelo próprio em 1900 no histórico Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris.

A hipótese de Riemann

Conjectura

Os zeros da função ζ que tem parte real entre 0 e 1 estão alinhados verticalmente na linha $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

- Oitavo problema da lista de Hilbert anunciada pelo próprio em 1900 no histórico Congresso Internacional de Matemáticos, em Paris.
- Problema do Milênio anunciado pelo Instituto Clay em 2000, valendo 1 milhão de dólares para quem provar que a conjectura é correta.

De volta ao Teorema do Número primo

De volta ao Teorema do Número primo

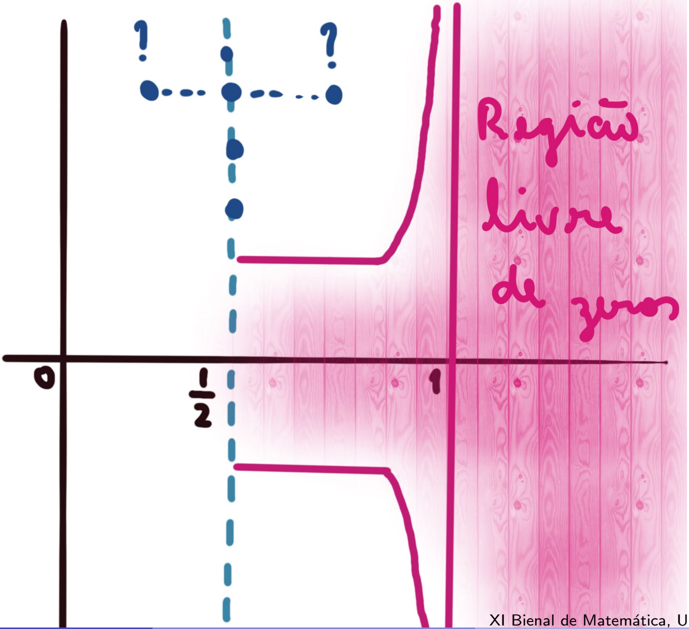
- O Teorema do Número primo é consequência do fato de que $\zeta(s)$ não se anula no semi-plano $\text{Re}(s) \geq 1$, na verdade um aberto contendo esse plano.

De volta ao Teorema do Número primo

- O Teorema do Número primo é consequência do fato de que $\zeta(s)$ não se anula no semi-plano $\mathrm{Re}(s) \geq 1$, na verdade um aberto contendo esse plano.
- Hoje em dia conhecemos uma forma quantitativa desse aberto, o que permitiu provar que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right).$$

O mapa dos zeros



Uma pausa

- Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ $(g > 0)$ se existe uma constante $C > 0$, tal que para todo x suficientemente grande,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Uma pausa

- Dizemos que $f(x) = O(g(x))$ $(g > 0)$ se existe uma constante $C > 0$, tal que para todo x suficientemente grande,

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

- Isso quer dizer que, f pode oscilar muito, mas essas oscilações ficam entre $\pm Cg$.

Outra pausa

- O Teorema do Número primo enunciava que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

Outra pausa

- O Teorema do Número primo enunciava que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

- e hoje em dia sabemos que

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right).$$

Outra pausa

- O Teorema do Número primo enunciava que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1,$$

- e hoje em dia sabemos que

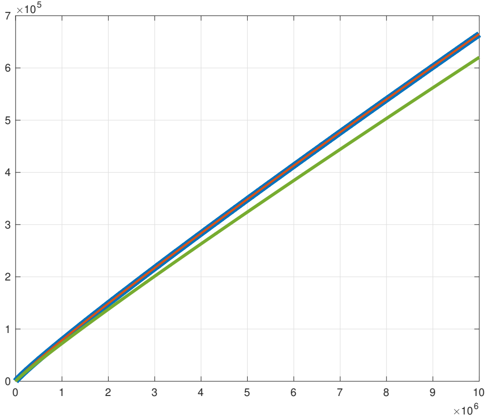
$$\pi(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}+O\left(\frac{x}{\exp(c\sqrt{\log x})}\right).$$

- A chamada integral logarítimica satisfaz

$$\mathrm{li}(x)=\int_2^x\frac{dt}{\log t}=\frac{x}{\log x}+O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right),$$

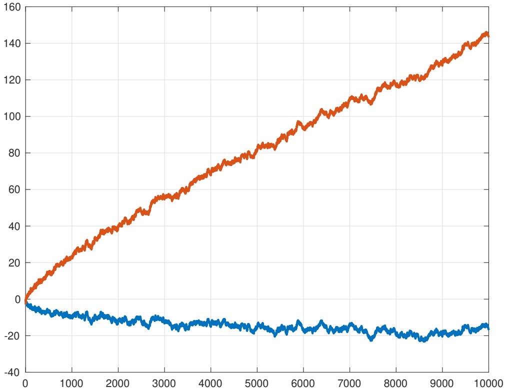
entretanto, vemos que $\mathrm{li}(x)$ é uma melhor aproximação para $\pi(x)$.

O gráfico de $\pi(x)$ revisitado



Azul: $\pi(x)$, Vermelho: $\text{li}(x)$, Verde: $x/\log x$

O gráfico dos erros



Azul: $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, Vermelho: $\pi(x) - x/\log x$

A hipótese de Riemann e os números primos

A hipótese de Riemann é equivalente a provar que as flutuações de

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ficam entre uma constante vezes $\pm\sqrt{x}\log x$, isto é:

A hipótese de Riemann e os números primos

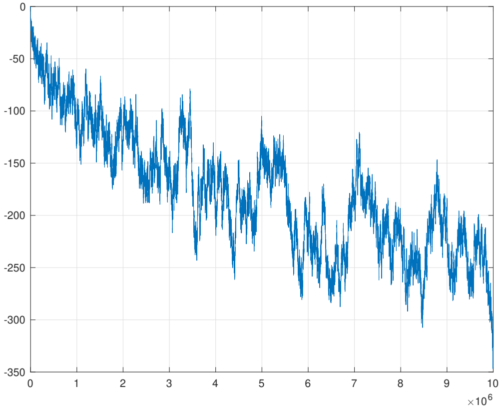
A hipótese de Riemann é equivalente a provar que as flutuações de

$$\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ficam entre uma constante vezes $\pm\sqrt{x}\log x$, isto é:

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + O(\sqrt{x}\log x).$$

O gráfico de $\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\log t}$



Por que nos importamos em melhorar o erro?

Por que nos importamos em melhorar o erro?

- Incondicionalmente, sabemos que para todo X suficientemente grande, sempre existe um primo entre

$$[X, X + X^{0.6}], \text{ (Heath-Brown, 1988).}$$

Por que nos importamos em melhorar o erro?

- Incondicionalmente, sabemos que para todo X suficientemente grande, sempre existe um primo entre

$$[X, X + X^{0.6}], \text{ (Heath-Brown, 1988).}$$

- Se pudermos melhorar o erro e então provar a Hipótese de Riemann, concluiríamos que sempre existe um primo entre

$$[X, X + \sqrt{X}\log^2 X]. \text{ (Selberg, 1943).}$$

Por que nos importamos em melhorar o erro?

- Incondicionalmente, sabemos que para todo X suficientemente grande, sempre existe um primo entre

$$[X, X + X^{0.6}], \text{ (Heath-Brown, 1988).}$$

- Se pudermos melhorar o erro e então provar a Hipótese de Riemann, concluiríamos que sempre existe um primo entre

$$[X, X + \sqrt{X} \log^2 X]. \text{ (Selberg, 1943).}$$

- Certos tipos de Criptografia se baseiam em encontrar primos grandes.

Uma pausa

Um outro ângulo sobre a Hipótese de Riemann

- Uma função muito importante em Teoria dos Números é chamada a função de Möbius μ:

Um outro ângulo sobre a Hipótese de Riemann

- Uma função muito importante em Teoria dos Números é chamada a função de Möbius μ:
- Sendo $\omega(n)$ a quantidade de primos distintos que dividem n,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{se } n = 1 \text{ ou se é produto de primos distintos,} \\ 0, & \text{se } n \text{ tem primos repetidos em sua fatoração.} \end{cases}$$

Um outro ângulo sobre a Hipótese de Riemann

- Uma função muito importante em Teoria dos Números é chamada a função de Möbius μ:
- Sendo $\omega(n)$ a quantidade de primos distintos que dividem n,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{se } n = 1 \text{ ou se é produto de primos distintos,} \\ 0, & \text{se } n \text{ tem primos repetidos em sua fatoração.} \end{cases}$$

Exemplo: $\mu(1) = 1$.

Um outro ângulo sobre a Hipótese de Riemann

- Uma função muito importante em Teoria dos Números é chamada a função de Möbius μ:
- Sendo $\omega(n)$ a quantidade de primos distintos que dividem n,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{se } n = 1 \text{ ou se é produto de primos distintos,} \\ 0, & \text{se } n \text{ tem primos repetidos em sua fatoração.} \end{cases}$$

Exemplo: $\mu(1) = 1$.
Se p é primo, $\mu(p) = -1$.

Um outro ângulo sobre a Hipótese de Riemann

- Uma função muito importante em Teoria dos Números é chamada a função de Möbius μ:
- Sendo $\omega(n)$ a quantidade de primos distintos que dividem n,

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)}, & \text{se } n = 1 \text{ ou se é produto de primos distintos,} \\ 0, & \text{se } n \text{ tem primos repetidos em sua fatoração.} \end{cases}$$

Exemplo: $\mu(1) = 1$.
Se p é primo, $\mu(p) = -1$.
$\mu(6) = 1$.

Möbius e a Hipótese de Riemann

- Sabemos que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \; \mathrm{Re}(s) > 1$$

Möbius e a Hipótese de Riemann

- Sabemos que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \ \mathrm{Re}(s) > 1$$

- A hipótese de Riemann é equivalente ao seguinte cancelamento nas somas parciais

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \ \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Möbius e a Hipótese de Riemann

- Sabemos que

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \ \mathrm{Re}(s) > 1$$

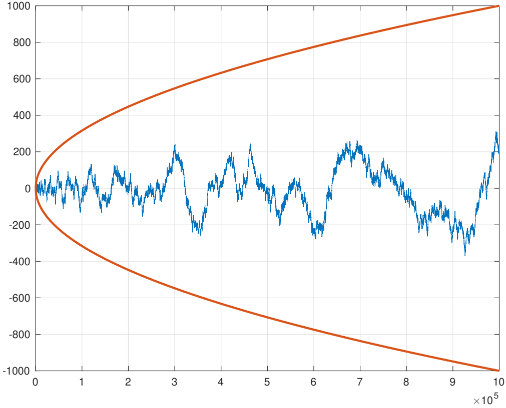
- A hipótese de Riemann é equivalente ao seguinte cancelamento nas somas parciais

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

- O Teorema do Número primo é equivalente a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \mu(n) = 0.$$

Somas parciais da função de Möbius



Azul: $x \mapsto \sum_{n \leq x} \mu(n)$, Vermelho: $\pm\sqrt{x}$

Nosso conhecimento sobre a função de Möbius

- Mesmo assumindo a hipótese de Riemann, não entendemos a ordem maximal das flutuações das somas parciais de μ.

Nosso conhecimento sobre a função de Möbius

- Mesmo assumindo a hipótese de Riemann, não entendemos a ordem maximal das flutuações das somas parciais de μ.
- Soundararajan (2009) provou, assumindo RH, que, removendo o termo $+\epsilon$ em $x^{1/2+\epsilon}$ temos:

$$\sum_{n\leq x}\mu(n) = O(\sqrt{x}\exp((\log x)^{1/2}(\log\log x)^{14}))$$

Nosso conhecimento sobre a função de Möbius

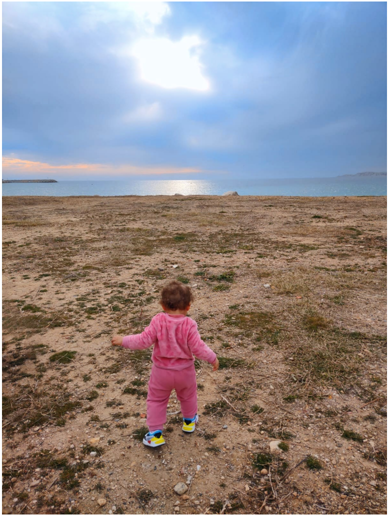
- Mesmo assumindo a hipótese de Riemann, não entendemos a ordem maximal das flutuações das somas parciais de μ.
- Soundararajan (2009) provou, assumindo RH, que, removendo o termo $+\epsilon$ em $x^{1/2+\epsilon}$ temos:

$$\sum_{n\leq x}\mu(n) = O(\sqrt{x}\exp((\log x)^{1/2}(\log\log x)^{14}))$$

- Assumindo outras propriedades plausíveis sobre os zeros de Riemann, Gonek e Ng conjecturaram que

$$\sum_{n\leq x}\mu(n) = O(\sqrt{x}(\log\log\log x)^{5/4}).$$

Um novo amanhã



- *Deus não joga dados com o universo, mas algo está acontecendo com os números primos.*
  P. Erdös.

- *Deus não joga dados com o universo, mas algo está acontecendo com os números primos.*
  P. Erdös.
- *A forma probabilística de pensar é uma grande contribuição, ela remodelou a forma de raciocinar em muitas áreas da Matemática, e além.*
  N. Alon, Centenário do Erdös, Budapest 2013.

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- O fato de que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \mu(n) = 0$$
mostra que estatisticamente, os valores ± 1 na sequencia $(\mu(n))_n$ são equiprováveis.

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- O fato de que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \mu(n) = 0$$
mostra que estatisticamente, os valores ± 1 na sequencia $(\mu(n))_n$ são equiprováveis.
- Na mesma época em que era provada a equivalência entre HR e somas parciais de Möbius, os primeiros Teoremas em Probabilidade eram provados:

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- O fato de que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leq x} \mu(n) = 0$$

  mostra que estatisticamente, os valores ± 1 na sequencia $(\mu(n))_n$ são equiprováveis.

- Na mesma época em que era provada a equivalência entre HR e somas parciais de Möbius, os primeiros Teoremas em Probabilidade eram provados:

- Se $X_n = \pm 1$ com probabilidade $\mathbb{P} = 1/2$ em cada instância, e se essa sequência é independente, então com probabilidade 100%

$$\sum_{n\leq x} X_n = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- Infelizmente, a hipótese de independência retira qualquer significado aritmético desse resultado de Probabilidade:

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- Infelizmente, a hipótese de independência retira qualquer significado aritmético desse resultado de Probabilidade:
- A função μ tem o que chamamos de dependência multiplicativa, isto é,

$$\mu(nm) = \mu(n)\mu(m),$$

sempre que n e m são coprimos.

Probabilidade e a Hipótese de Riemann

- Infelizmente, a hipótese de independência retira qualquer significado aritmético desse resultado de Probabilidade:
- A função μ tem o que chamamos de dependência multiplicativa, isto é,

$$\mu(nm) = \mu(n)\mu(m),$$

  sempre que n e m são coprimos.
- Uma função f definida sobre os inteiros positivos com essa propriedade se chama função multiplicativa.

Funções multiplicativas aleatórias

- Em 1944, Wintner considerou o seguinte modelo para μ: Nos primos, definimos de forma independente sinais aleatórios $X_p = \pm 1$ com probabilidade igual a $1/2$ em cada instância.

Funções multiplicativas aleatórias

- Em 1944, Wintner considerou o seguinte modelo para μ: Nos primos, definimos de forma independente sinais aleatórios $X_p = \pm 1$ com probabilidade igual a $1/2$ em cada instância.
- No restante dos naturais, definimos

$$f(n) = \mu^2(n) \prod_{p|n} X_p.$$

A função f resultante, hoje em dia, se chama função multiplicativa aleatória de Rademacher.

Funções Multiplicativas Aleatórias

- Wintner provou em 1944, que com probabilidade 100%

$$\sum_{n\leq x} f(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

Funções Multiplicativas Aleatórias

- Wintner provou em 1944, que com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

e isso tem significado aritimético.

Funções Multiplicativas Aleatórias

- Wintner provou em 1944, que com probabilidade 100%

$$\sum_{n\leq x} f(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

  e isso tem significado aritimético.
- Entretanto, a probabilidade de sortear $f = \mu$ é zero, pois nos primos $\mu(p) = -1$.

Funções Multiplicativas Aleatórias

- Wintner provou em 1944, que com probabilidade 100%

$$\sum_{n\leq x} f(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0,$$

  e isso tem significado aritimético.
- Entretanto, a probabilidade de sortear $f = \mu$ é zero, pois nos primos $\mu(p) = -1$.
- Esse tópico possui uma vasta literatura, tendo sido 90% dela produzida nos últimos 10 anos.

Uma simulação da função multiplicativa de Rademacher

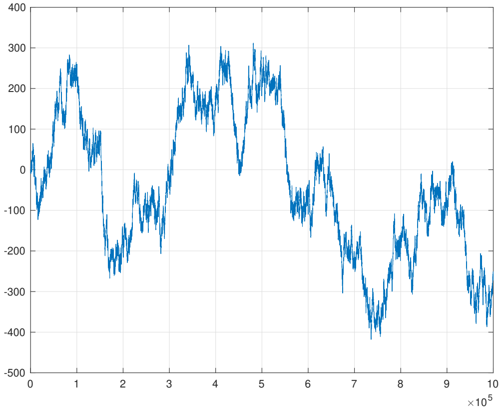


Gráfico de $x \mapsto \sum_{n \leq x} f(n)$

Uma abordagem para a Hipótese de Riemann

- Nos primos, $\mu(p) = -1$.

Uma abordagem para a Hipótese de Riemann

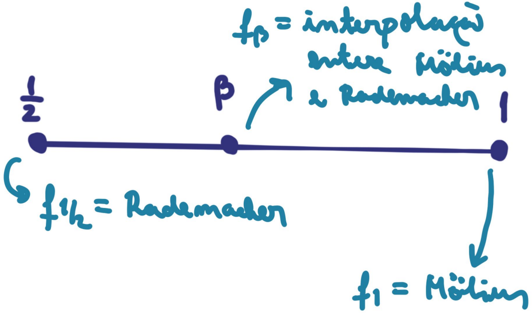
- Nos primos, $\mu(p) = -1$.
- Nos primos, $f(p) = \pm 1$ com probabilidade $1/2$.

Uma abordagem para a Hipótese de Riemann

- Nos primos, $\mu(p) = -1$.
- Nos primos, $f(p) = \pm 1$ com probabilidade $1/2$.
- E se definirmos

$$f_\beta(p) = -1, \text{ com probabilidade } \beta > 1/2?$$

Diagrama da interpolação



Abordagem para a Hipótese de Riemann

- Questão 1: É possível provar que para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0?$$

Abordagem para a Hipótese de Riemann

- Questão 1: É possível provar que para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0?$$

- Questão 2: Supondo afirmativa a resposta para a Questão anterior, seria possível com isso deduzir a legitimidade da Hipótese de Riemann?

Abordagem para a Hipótese de Riemann

A hipótese de Marco Aymone: Para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Abordagem para a Hipótese de Riemann

A hipótese de Marco Aymone: Para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Teorema $\sqrt{-1}$

A Hipótese de Marco Aymone implica a Hipótese de Riemann.

Abordagem para a Hipótese de Riemann

A hipótese de Marco Aymone: Para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Teorema $\sqrt{-1}$

A Hipótese de Marco Aymone implica a Hipótese de Riemann.

Teorema 1

A Hipótese de Marco Aymone é falsa.

Abordagem para a Hipótese de Riemann

A hipótese de Marco Aymone: Para cada $1/2 < \beta < 1$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Teorema $\sqrt{-1}$

A Hipótese de Marco Aymone implica a Hipótese de Riemann.

Teorema 1

A Hipótese de Marco Aymone é falsa. Com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\beta(n) \neq O(x^{1-\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Um gráfico

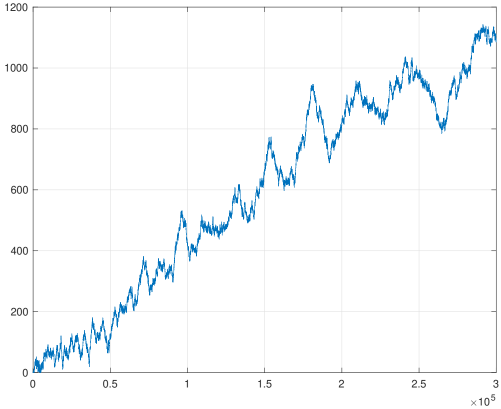


Gráfico de $x \mapsto \left|\sum_{n\leq x} f_{3/4}(n)\right|$

Vizinhança de $f_{1/2}$ e μ

- Próxima investigação natural: Estudar o que acontece quando

$$\mathbb{P}(f(p) = -1) = \frac{1}{2} + \epsilon_p,$$

onde:

Vizinhança de $f_{1/2}$ e μ

- Próxima investigação natural: Estudar o que acontece quando

$$\mathbb{P}(f(p) = -1) = \frac{1}{2} + \epsilon_p,$$

onde:

- Vizinhança da Rademacher:

$$\epsilon_p \to 0^+.$$

Vizinhança de $f_{1/2}$ e μ

- Próxima investigação natural: Estudar o que acontece quando

$$\mathbb{P}(f(p) = -1) = \frac{1}{2} + \epsilon_p,$$

onde:

- Vizinhança da Rademacher:

$$\epsilon_p \to 0^+.$$

- Vizinhança da Möbius:

$$\epsilon_p \to \frac{1}{2}^-.$$

Intuição natural

- Extender o cancelamento raíz quadrático de Wintner na vizinhança de Rademacher.

Intuição natural

- Extender o cancelamento raíz quadrático de Wintner na vizinhança de Rademacher.
- Extender o critério para a Hipótese de Riemann na vizinhança de Möbius.

Teorema 2 (Aymone-Sidoravicius)

Considere o modelo de função multiplicativa aleatória f_α onde

$$\mathbb{P}(f_\alpha(p) = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^\alpha}.$$

Então a Hipótese de Riemann é equivalente a seguinte Afirmação:

Teorema 2 (Aymone-Sidoravicius)

Considere o modelo de função multiplicativa aleatória f_α *onde*

$$\mathbb{P}(f_\alpha(p) = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^\alpha}.$$

Então a Hipótese de Riemann é equivalente a seguinte Afirmação:Para cada $0 < \alpha < 1/2$, *com probabilidade* 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\alpha(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \ \textit{para todo } \epsilon > 0.$$

Teorema 2 (Aymone-Sidoravicius)

Considere o modelo de função multiplicativa aleatória f_α onde

$$\mathbb{P}(f_\alpha(p) = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^\alpha}.$$

Então a Hipótese de Riemann é equivalente a seguinte Afirmação:Para cada $0 < \alpha < 1/2$, com probabilidade 100%

$$\sum_{n \leq x} f_\alpha(n) = O_\epsilon(x^{1/2+\epsilon}), \text{ para todo } \epsilon > 0.$$

Para $\alpha \geq 1/2$ já sabemos que a Afirmação é verdadeira.

Journal of Number Theory 172 (2017) 343–382

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Number Theory

www.elsevier.com/locate/jnt

ELSEVIER

Partial sums of biased random multiplicative functions

CrossMark

M. Aymone[a,*], V. Sidoravicius[b,c,d]

[a] *Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627, CEP 31270-901, Belo Horizonte, MG, Brazil*
[b] *Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, United States*
[c] *NYU-ECNU Institute of Mathematical Sciences at NYU Shanghai, China*
[d] *CEMADEN, Avenida Doutor Altino Bondensan, 500, São José dos Campos, SP, 12247-016, Brazil*

Muito Obrigado!