

# Singularidades para as soluções das equações de Navier-Stokes (e Euler): onde estamos no Problema do Milênio

*Helena J. Nussenzveig Lopes*

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro



XI Bienal de Matemática  
São Carlos/SP

29 de julho a 02 de agosto de 2024

# Introdução

Modelo matemático para escoamentos incompressíveis em  $\mathbb{R}^N$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ |\mathbf{u}(x, t)| \rightarrow 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ \text{em } \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \\ \text{quando } |x| \rightarrow \infty, t > 0 \\ \text{em } \mathbb{R}^N \times \{t = 0\}. \end{array} \quad (1)$$

Acima, o campo  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$  representa a velocidade do escoamento;  $p$  é a pressão, *escalar*. O termo  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  é entendido como sendo:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_j = \sum_{i=1}^N u_i \partial_{x_i} u_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

O termo  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, t)$  é uma força externa, *p.explo.*  $\mathbf{F} = -g\mathbf{e}_N$ , força devida à gravidade.

$\nu > 0$ : Navier-Stokes, fluidos viscosos

$\nu = 0$ : Euler, fluidos ideais ou invíscidos

Estamos interessados em  $N = 2$  ou  $N = 3$ .

Primeira “equação” → lei de conservação de momento (2ª lei de Newton);

Segunda equação → incompressibilidade – campos de divergente nulo preservam volume.

Essas equações de servem de modelo para uma grande variedade de escoamentos, desde os mais suaves, laminares/potenciais, até escoamentos turbulentos.



Figure: Vórtices na esteira de um avião



Figure: Vórtices na grande mancha vermelha de Júpiter



Figure: Furacão Elena, Golfo do México, 1985



Figure: Tornado F5 em Elie, Manitoba (Canada), 2007



Figure: Leonhard Euler, 1707–1783

Equações de Euler: publicadas em 1757.

Curiosidade: o primeiro artigo de Euler contendo equações de dinâmica dos fluidos incompressível foi *Principia motus fluidorum* (Princípios dos movimentos de fluidos), escrito em 1752. Contudo, havia um erro (também feito por d'Alembert): tratava apenas escoamentos potenciais.

Em 1755 Euler submeteu outro trabalho, *Principes généraux du mouvement des fluides* (Leis gerais do movimento de fluidos), publicado em 1757. O primeiro trabalho só foi publicado em 1761.

PRINCIPES GÉNÉRAUX  
DU MOUVEMENT DES FLUIDES:  
PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précédent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverse qualité des fluides, que des forces qui y puissent agir; je me propose de traiter sur le même pied le mouvement des fluides, & de rechercher les principes généraux, sur lesquels toute la science du mouvement des fluides est fondée. On comprend aisément que cette matière est beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes: cependant j'espère d'en venir aussi heureusement à bout, de sorte que s'il y reste des difficultés, ce ne sera pas du côté du mécanisme, mais uniquement du côté de l'analytique: cette science n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui seroit nécessaire pour développer les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puisse déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il se trouve, & par quelques forces qu'il soit sollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui constituent le sujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide est supposée connue, dont il faut considérer les diverses espèces: le fluide est donc, ou incompressible, ou compressible. S'il n'est pas susceptible de compression, il faut distinguer deux cas, l'un où toute la masse est composée de parties homogènes, dont la densité est partout & demeure toujours la même, l'autre

tre

Primeiro parágrafo da página anterior, Euler diz (traduzindo):

“se restarem dificuldades, não será do lado da mecânica, mas unicamente do lado da análise: esta ciência não tendo atingido o grau de perfeição necessária para desenvolver fórmulas analíticas que contenham os princípios do movimento dos fluidos.”

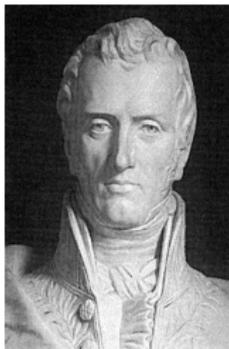


Figure: Claude-Louis Navier, 1785–1836



Figure: Sir George Stokes, 1819–1903

# Entre Navier 1822 e Stokes 1845 houve: Cauchy 1823, Poisson 1829, Saint-Venant 1837

Arch. Hist. Exact Sci. 56 (2002) 95–150. © Springer-Verlag 2002

## *Between Hydrodynamics and Elasticity Theory: The First Five Births of the Navier-Stokes Equation*

OLIVIER DARRIGOL

Communicated by J. Z. BUCHWALD

The Navier-Stokes equation is now regarded as the universal basis of fluid mechanics, no matter how complex and unpredictable the behavior of its solutions may be. It is also known to be the only hydrodynamic equation that is compatible with the isotropy and linearity of the stress-strain relation. Yet the early life of this equation was as fleeting as the foam on a wave crest. Navier's original proof of 1822 was not influential, and the equation was rediscovered or re-derived at least four times, by Cauchy in 1823, by Poisson in 1829, by Saint-Venant in 1837, and by Stokes in 1845. Each new discoverer either ignored or designated his predecessors' contribution. Each had his own way to justify the equation. Each judged differently the kind of motion and the nature of the system to which it applied.

Figure: O. Darrigol, The five births of Navier-Stokes

Parte do primeiro parágrafo da página anterior:

“Hoje em dia as equações de Navier-Stokes são vistas como a base universal da dinâmica dos fluidos, não importando quão complexo ou imprevisível possa ser o comportamento de suas soluções. (...) No entanto, o início da vida destas equações foi tão fugaz quanto a espuma da crista de uma onda. A demonstração original de Navier de 1822 não teve influência alguma e as equações foram re-descobertas ou re-deduzidas ao menos quatro vezes, por Cauchy em 1823, por Poisson em 1829, por Saint-Venant em 1837 e por Stokes em 1845. Cada novo descobridor ou ignorava ou denegria a contribuição de seu antecessor. Cada um tinha sua própria maneira de justificar as equações. Cada um julgava de modo diferente o tipo de movimento e a natureza do sistema a que se aplicava.”

# O Problema do Milênio para NS

Enunciado para escoamentos em  $\mathbb{R}^3$  – seja  $\nu > 0$ .  
Suponha que  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , *i.e.*

$$|\partial_x^\alpha \mathbf{u}_0(x)| \leq C_{\alpha,K}(1 + |x|)^{-K},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^3$ ,  $K \in \mathbb{N}$ .

Suponha que  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ , *i.e.*

$$|\partial_x^\alpha \partial_t \mathbf{F}(x, t)| \leq C_{\alpha,m,K}(1 + |x| + t)^{-K},$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^3$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \mathbb{N}$ .

### **Problema A: NS não forma singularidades em tempo finito:**

Mostre que, se  $\mathbf{F} \equiv 0$ , então existe uma solução

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)))^3$ ,  $p = p(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  de (1) tal que

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(x, t)|^2 dx \leq C < +\infty \text{ para todo } t \geq 0.$$

### **Problema C: NS forma singularidades em tempo finito: Mostre**

que, existe  $\mathbf{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  e  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ , para os quais não existe nenhuma solução  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) \in (C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)))^3$ ,  $p = p(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$  de (1) com essa força  $\mathbf{F}$  e esse dado inicial  $\mathbf{u}_0$  e que satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(x, t)|^2 dx \leq C < +\infty \text{ para todo } t \geq 0.$$

## O que sabemos

Existência local no tempo:

Caso  $N = 3$ .

Suponha  $\mathbf{u}_0 \in H^m(\mathbb{R}^3)$ ,  $\operatorname{div} u_0 = 0$ . Aqui,  $H^m$  é o espaço de funções de quadrado integrável e cujas “derivadas fracas” até ordem  $m$  são de quadrado integrável.

### Theorem (Kato, 1972)

*Se  $m > \frac{3}{2} + 2$  então, para algum  $T > 0$ , existe uma única solução  $\mathbf{u} \in C([0, T]; C^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1([0, T]; C(\mathbb{R}^3))$  das equações de Navier-Stokes/Euler.*

Em dimensão  $N = 2$  temos  $T = \infty$ .

O problema de formação de singularidades se coloca também para Euler!

O “remédio”: enfraquecer a noção de solução.

### Theorem (Leray, 1934 – Hopf, 1951)

Suponha  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$  e  $\mathbf{F} = 0$ . Então existe (ao menos uma) solução fraca  $\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty((0, +\infty); L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2((0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^3))$  das equações de Navier-Stokes com dado inicial  $\mathbf{u}_0$ . Para estas soluções vale

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(x, T)|^2 dx + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |D\mathbf{u}(x, t)|^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}_0(x)|^2 dx.$$

Leray chamou estas soluções de “soluções turbulentas”

Unicidade é um problema em aberto!

E a pressão??? Multiplicador de Lagrange, recupera-se a pressão a posteriori.

O que é uma solução fraca?

## Definition

Seja  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$  e  $\mathbf{F} = 0$ . Dizemos que  $\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty((0, +\infty); L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2((0, +\infty); H^1(\mathbb{R}^3))$  é uma *solução fraca de Leray-Hopf* das equações de Navier-Stokes com dado inicial  $\mathbf{u}_0$  se:

❶ para todo  $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ ,  $\operatorname{div} \Phi(\cdot, t) = 0$ , tivermos

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \Phi \cdot \mathbf{u} + [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Phi] \cdot \mathbf{u} + \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\cdot, 0) \cdot \mathbf{u}_0 \\ &= \nu \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{Tr}[D\Phi(D\mathbf{u})^t], \end{aligned}$$

❷  $\operatorname{div} \mathbf{u}(\cdot, t) = 0$  no sentido das distribuições, para quase todo  $t > 0$ ,

❸ e se, para todo  $t \geq 0$ , valer a desigualdade de energia:

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2}^2 - 2\nu \int_0^t \|D\mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds.$$

Em 2011 também foram obtidas soluções fracas globais para Euler:

### Theorem (Wiedemann, 2011)

Suponha  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{T}^3)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$  e  $\mathbf{F} = 0$ . Então existe (infinitas!) soluções fracas  $\mathbf{u} \in L_{loc}^\infty((0, +\infty); L^2(\mathbb{T}^3))$  com este dado inicial. Mais ainda,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} |\mathbf{u}(x, t)|^2 dx \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

As soluções obtidas por Wiedemann são muito exóticas: extremamente irregulares e seguem de uma construção bastante *ad hoc*, chamada integração convexa. Não são soluções fisicamente razoáveis.

## Qual é a natureza da dificuldade?

A equação mais parecida com Navier-Stokes em uma dimensão é Burgers:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \varepsilon \partial_{xx}^2 u.$$

Sabemos que, se  $\varepsilon = 0$ , então *forma choques em tempo finito*. I.e.  $\partial_x u \rightarrow +\infty$  em tempo finito.

Se  $\varepsilon > 0$  então a solução é global no tempo.

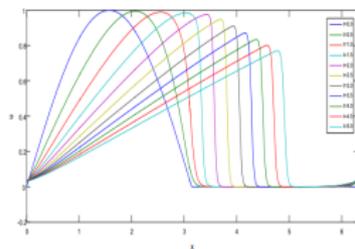


Fig. 4 Plot of numerical solutions of Example 2 at different time levels for  $N = 300$ ,  $\epsilon = 0.01$  and  $\Delta t = 0.001$

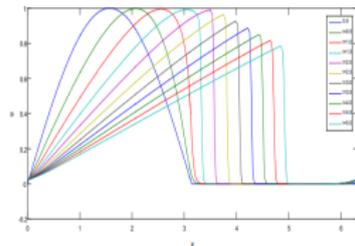


Fig. 5 Plot of numerical solutions of Example 2 at different time levels for  $N = 300$ ,  $\epsilon = 0.005$  and  $\Delta t = 0.001$

Figure: R.C. Mittal, Rajni Rohila, Int. J. Appl. Comput. Math (2018) 4:150

Vamos introduzir a vorticidade:

$$\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

Vorticidade é *medida de rotação infinitesimal*.

Equação de evolução de vorticidade:

$$\partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} (= D\mathbf{u}\omega) + \nu \Delta \omega, \quad (2)$$

acoplada à relação entre o campo de divergente nulo  $\mathbf{u}$  e  $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ .

(OBS. Em dimensão 2, no caso  $\nu = 0$ , o lado direito se anula  $\rightarrow$  a vorticidade é *transportada*:

$$\omega = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1;$$

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0.)$$

Considerando que:

- $Du$  e  $\omega$  são termos de *mesma ordem de regularidade* ( $Du$  é operador integral singular, traço nulo, ordem 0, em termos de  $\omega$ )
- Ao longo de trajetórias do campo de velocidades o lado direito nada mais é que uma derivada temporal:

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u \cdot \nabla,$$

parece razoável supor que a vorticidade (no caso  $\nu = 0$ ) se comporte do mesmo modo que as soluções de uma equação do tipo

$$\dot{W} = W^2. \quad (3)$$

Isto quer dizer formação de singularidades em tempo finito!

(O caso  $\nu > 0$  também forma singularidades em tempo finito  $\rightarrow$  equação de reação-difusão.)

## Uma dificuldade importante: *não-localidade*

Contudo, a vida nem sempre é local...!!!

Formulação velocidade:  $\rightarrow$  para evoluir pressão é necessário resolver

$$-\Delta p = \operatorname{div} \operatorname{div} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}),$$

para cada instante  $t > 0$ .

Formulação vorticidade:  $\rightarrow \mathbf{u} = K[\omega]$ ,  $K = \operatorname{rot} (-\Delta)^{-1}$ .

# Modelos não-locais para a equação de vorticidade

Modelo unidimensional para equação de vorticidade (“*baby vorticity equation*”), caso  $\nu = 0$ :

$$\partial_t \omega = \mathcal{H}(\omega)\omega, \quad (4)$$

onde  $\mathcal{H}(\omega)$  é a *transformada de Hilbert* de  $\omega$ ,

$$\mathcal{H}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)(x, t) = \frac{1}{\pi} VP \int \frac{\omega(y, t)}{x - y} dy,$$

com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ .

A integral  $VP$  (valor principal) é um limite simétrico em torno da singularidade.

## Theorem

(Constantin-Lax-Majda, 1985) Suponha  $\omega_0 = \omega(\cdot, 0) \in H^1(\mathbb{R})$ . Assuma também que

$$\{x \mid \mathcal{H}(\omega_0) > 0\} \neq \emptyset.$$

Seja  $\omega = \omega(x, t)$  a solução da “baby vorticity”. Então existe  $T > 0$  tal que  $\omega(x, t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow T$ .

É fácil produzir exemplos de tais  $\omega_0$ .

Versão viscosa: adicione  $\nu \partial_x^2 \omega$  do lado direito da “baby vorticity”. Então as soluções desta versão viscosa também formam singularidades em tempo finito (Schochet, 1986).

Modelo em dimensão 2 – dinâmica de contorno; caso  $\nu = 0$ .

Considere um “patch” de vorticidade em dimensão 2:

$\omega = \omega(x, t) = \chi_{\mathcal{D}(t)}$ , onde  $\mathcal{D}(t)$  é um *domínio material* (se move com o escoamento).

Descrição da fronteira do “patch”:  $z = z(\alpha, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Equação de evolução do *contorno* do “patch”,  $\partial\mathcal{D}(t)$ :

$$\frac{dz}{dt}(\alpha, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |z(\alpha, t) - z(\alpha', t)| z_{\alpha}(\alpha', t) d\alpha'. \quad (5)$$

Após alguns cálculos,

$$\frac{dz_\alpha}{dt}(\alpha, t) = \mathcal{V}(z_\alpha)z_\alpha, \quad (6)$$

onde

$$\mathcal{V}(z_\alpha) = -\frac{1}{2\pi} VP \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} z_\alpha(\alpha', t) \otimes \frac{z(\alpha, t) - z(\alpha', t)}{|z(\alpha, t) - z(\alpha', t)|^2} d\alpha'.$$

O operador  $\mathcal{V}$  é *operador integral singular*, traço nulo, ordem 0. Novamente, “se parece” com a equação de vorticidade.

Formam-se singularidades no contorno em tempo finito?

## Theorem

(Chemin, 1993) Assume que  $\partial\mathcal{D}_0 \in C^{1,\gamma}$ ,  $0 < \gamma < 1$ . Então  $\partial\mathcal{D}(t) \in C^{1,\gamma}$ , para todo  $t \geq 0$ .

Mais ainda, a curvatura e o comprimento do contorno são estimáveis por uma exponencial dupla  $\exp(\exp t)$ .

Isso mostra que a vida não é tão simples! (Nem tudo que parece a equação de vorticidade forma singularidades.)

Outros modelos – equação quase-geostrófica, caso  $\nu = 0$ :

$$\partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = 0, \quad \mathbf{u} = \nabla^\perp (-\Delta)^{-1/2} (-\theta). \quad (7)$$

Acima,  $\nabla^\perp = (-\partial_{x_2}, \partial_{x_1})$ .

Derivando, obtemos

$$\partial_t \nabla^\perp \theta + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla^\perp \theta = D\mathbf{u} \nabla^\perp \theta, \quad (8)$$

logo  $\nabla^\perp \theta$  faz o papel da vorticidade.

Caso dissipativo: adicione  $\nu(-\Delta)^\alpha$  ao lado *esquerdo* de (7),  $\alpha \geq 0$ .

Caso crítico:  $\alpha = 1/2$ . Kiselev *et alli* e Caffarelli *et alli* mostraram (2007) que não há formação de singularidades em tempo finito *para o caso crítico* dissipativo. (OBS.  $\alpha > 1/2$  é mais fácil mostrar que não forma singularidade.)

Em aberto: sem dissipação.

## Scaling e criticalidade

Considere  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $t > 0$ , solução de Navier-Stokes.

Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Então

$$\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{u}_\lambda(x, t) \equiv \lambda \mathbf{u}(\lambda x, \lambda^2 t)$$

$$p_\lambda = p_\lambda(x, t) \equiv \lambda^2 p(\lambda x, \lambda^2 t)$$

também são soluções de Navier-Stokes.

Essa invariância por *scaling* sugere “espaços críticos de dados iniciais”.

Seja  $\mathbf{u}_0$  dado inicial. Então o scaling de  $\mathbf{u}_0$  é:

$$(\mathbf{u}_0)_\lambda = (\mathbf{u}_0)_\lambda(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{u}_0(\lambda \mathbf{x}).$$

Exemplo:

- Se  $N = 2$  então  $\mathbf{u}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \implies \|\mathbf{u}_0\|_{L^2} = \|(\mathbf{u}_0)_\lambda\|_{L^2}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Se  $N = 3$  então  $\mathbf{u}_0 \in L^3(\mathbb{R}^3) \implies \|\mathbf{u}_0\|_{L^3} = \|(\mathbf{u}_0)_\lambda\|_{L^3}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Então os espaços críticos onde tomar dados iniciais são:  $L^2$  em dimensão  $N = 2$  e  $L^3$  em dimensão  $N = 3$ .

Ao mesmo tempo, observamos dificuldade adicional em dimensão  $N = 3$  relativamente a  $N = 2$ , pois  $L^2$  é um *bom espaço* – preservado pela evolução – enquanto  $L^3$  *não* é preservado.

Seja  $X_T$  o espaço dos campos com  $\|\cdot\|_{X_T}$  finita, onde

$$\|\mathbf{u}\|_{X_T} \equiv \sup_{t \in (0, T)} t^{1/4} \|u(\cdot, t)\|_{L^6}.$$

### Theorem (Kato 1984)

Seja  $\mathbf{u}_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ . Então existe  $T > 0$  e uma única solução  $\mathbf{u} \in C(0, T; L^3(\mathbb{R}^3)) \cap X_T$  das equações de Navier-Stokes, com dado inicial  $\mathbf{u}_0$ .

Mais ainda, existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, se  $\|\mathbf{u}_0\|_{L^3} < \varepsilon_0 \nu$ , então podemos tomar  $T = +\infty$ .

Outros espaços críticos com resultados semelhante:  $\dot{H}^{1/2}$  (Fujita Kato 1964),  $BMO^{-1}$  (Koch Tataru 2001), sendo o espaço  $BMO^{-1}$  o maior espaço crítico possível.

Os teoremas de existência são, invariavelmente, *locais* para dados arbitrários, *globais* para dados pequenos. São resultados baseados em teoremas do ponto fixo via duas normas.

A “solução” no teorema de Kato é do tipo “mild”:

$$\mathbf{u} = e^{\nu\Delta t}\mathbf{u}_0 - \int_0^t e^{\nu(t-s)\Delta}\mathbb{P}[(\mathbf{u}(\cdot, s) \cdot \nabla)\mathbf{u}(\cdot, s)] ds.$$

Acima,  $e^{\nu\Delta t}$  é o *semigrupo do calor*, de modo que, se  $V = e^{\nu\Delta t}v_0$  então  $V$  satisfaz a equação do calor com dado inicial  $v_0$ :

$$\partial_t V = \nu\Delta V,$$

e  $V(\cdot, 0) = v_0$ .

A solução mild é obtida aplicando o princípio de Duhamel para resolver um problema do tipo

$$\partial_t V = \nu\Delta V + F,$$

com  $F = -\mathbb{P}[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]$ , e onde  $\mathbb{P}$  é a projeção nos campos de divergente nulo.

Notemos que  $\|\mathbf{u}\|_{X_T} < +\infty$  significa

$$\|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^6} \leq Ct^{-1/4},$$

de modo que, eventualmente,  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  se torna pequeno em  $L^6$ . Resultados parecidos com Kato 1984 são até mais fáceis em  $L^p$ ,  $p > 3$ , de modo que, se  $\mathbf{u}(\cdot, t)$  se tornar *suficientemente pequeno* em  $L^6$ , seguir-se-á existência global.

Este tipo de observação se aplica a vários outros espaços e nos leva a concluir que

O PROBLEMA DE FORMAÇÃO DE SINGULARIDADES PARA NAVIER-STOKES É UM PROBLEMA DE “TEMPOS INTERMEDIÁRIOS”!!!

# Critérios para singularidades

O critério mais simples de formação de singularidades é devido a Serrin:

## Theorem (Serrin 1962)

Seja  $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$ . Seja  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R}^3))$  solução de Navier-Stokes, onde  $T < T_{max}$ . Então, se  $T_{max} < +\infty$  então

$$\lim_{T \rightarrow T_{max}^-} \int_0^T \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_{L^q}^p dt = +\infty,$$

sempre que

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1, \quad 2 \leq p \leq +\infty.$$

## Theorem (Beale, Kato, Majda, 1984)

- Se  $\int_0^T \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds$  for limitada, como função de  $T$ , então Euler (ou Navier-Stokes) não forma singularidade;
- Se Euler (ou Navier-Stokes) formar singularidade em tempo  $T_{max}$  então  $\int_0^T \|\omega(\cdot, s)\|_{L^\infty} ds \rightarrow +\infty$  quando  $T \nearrow T_{max}^-$ .

O critério BKM é muito valioso em simulações numéricas.

Outro critério: direção de vorticidade  $\xi \equiv \omega/|\omega|$ . Enquanto

$$\int_0^T \|D\xi(\cdot, s)\|_{L^\infty}^2 ds$$

for limitada não há formação de singularidades (Constantin, Fefferman, Majda, 1996).

Os problemas de formação de singularidades para Euler e Navier-Stokes estão intimamente relacionados.

2007: reunião científica para celebrar os 250 anos da publicação das equações de Euler (*Euler equations: 250 years on*).

Houve sessão de discussão sobre o Problema de Singularidades; alguns dias antes foi realizada uma pesquisa de opinião. O resultado foi:

Actually, the topic of Euler blow up is intimately connected with the problem of singularities in the Navier–Stokes equations, which is one of the famous Millennium Prize problems of the Clay Mathematics Institute. During the EE250 conference an informal poll among the participants on the problem of finite-time singularities was conducted by C. Bardos and E.S. Titi. The question was: how confident are you, on a 0–10 scale, that solutions to the Euler (Navier–Stokes) equations can develop finite-time singularities? The results are given in the following table.

<i>Response</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	<i>Tot.</i>
<i># of votes (Euler)</i>	<b>8</b>	2	2	4	2	<b>9</b>	0	3	3	3	<b>7</b>	43
<i># of votes (N.-S.)</i>	<b>20</b>	8	4	0	1	<b>5</b>	0	1	0	0	2	41

Highest peaks are marked in bold.

## Figure: Singularidades: Euler $\times$ Navier-Stokes

É evidente que ninguém tinha um bom palpite do que ocorre com Euler!

Mas a maioria achava que Navier-Stokes não forma singularidade.

# Conclusões a partir de simulações numéricas – histórico elaborado por R. Kerr.

CSCAMM: Challenges of Incompressible at High Re

## HISTORY OF EULER

Method, then YES or NO on singularity

- 1975 Early Taylor-Green. Inconclusive.
- 1979 Pade of Taylor-Green. Yes
- 1983 DNS of Taylor-Green for Euler No
- 1984 Beale-Kato-Majda. Bounds for Euler
- 1986 Chorin/Siggia. Vortex filaments. Yes
- DNS = Direct numerical simulation
  - 1987 Early: NO too much flattening
  - 1989 Spectral: YES too crude
  - 1990 Nested DNS: NO bad numerics
  - 1993 Filtered initial conditions: YES  $\|\omega\|_\infty \approx 18/(T-t)$
  - 1998 Cylindrical vortex [Grauer *et al.*(1998)] YES with  $\|\omega\|_\infty \approx 18/(T-t)$
  - 2006 Hou and Li, filtered spectral: NO
  - 2006 Orlandi and Carnevale, new claims of singular behavior with unresolved problems

## Onde estamos atualmente?

Em outubro/2022 e maio/2023 Jiajie Chen e Tom Hou anunciaram uma *demonstração assistida por computador* de formação de singularidades para Euler.

### Theorem (Chen Hou 2022, 2023)

*Existe uma família de dados iniciais suaves,  $(\theta_0, \omega_0)$ , para os quais 2D Boussinesq e 3D Euler formam singularidades estáveis e quase auto-similares em tempo finito.*

A assistência do computador é necessária para construir os perfis auto-similares com erro pequeno e também para o cálculo de majorantes ótimos para as constantes no estudo de estabilidade. O trabalho completo ainda não foi aceito para publicação.

Em 2024 os mesmos autores anunciaram que esta configuração sugere singularidade potencial também para 3D Navier-Stokes. Há simulações numéricas para corroborar mas não há uma demonstração, nem mesmo assistida por computador.

O ponto de partida é uma configuração axisimétrica e escoamento "ímpar", isto é, a componente de rodópio da vorticidade tem simetria ímpar.

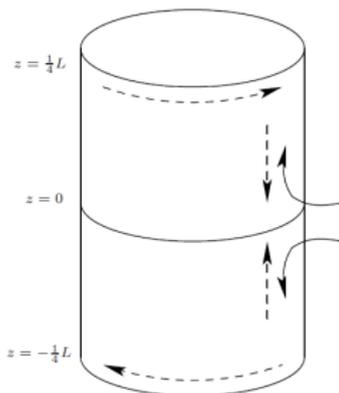


Figure: Vorticity kinematics of the 3D Euler singularity; solid: vortex lines; straight dashed lines: axial flow; curved dash lines: vortical circulation.

A singularidade nasce na fronteira do domínio.

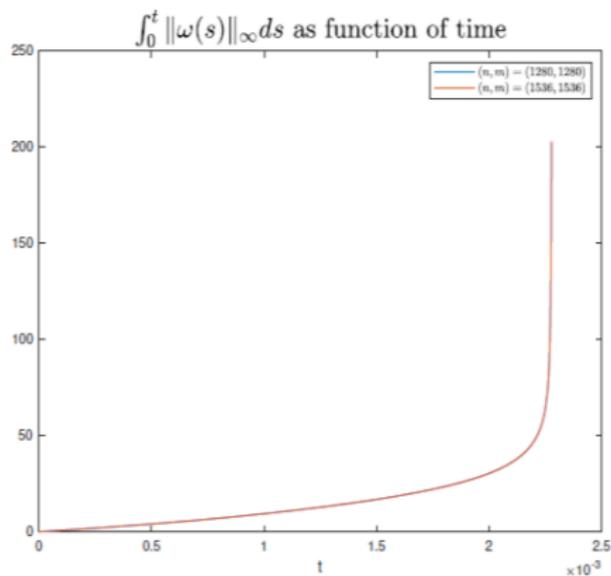
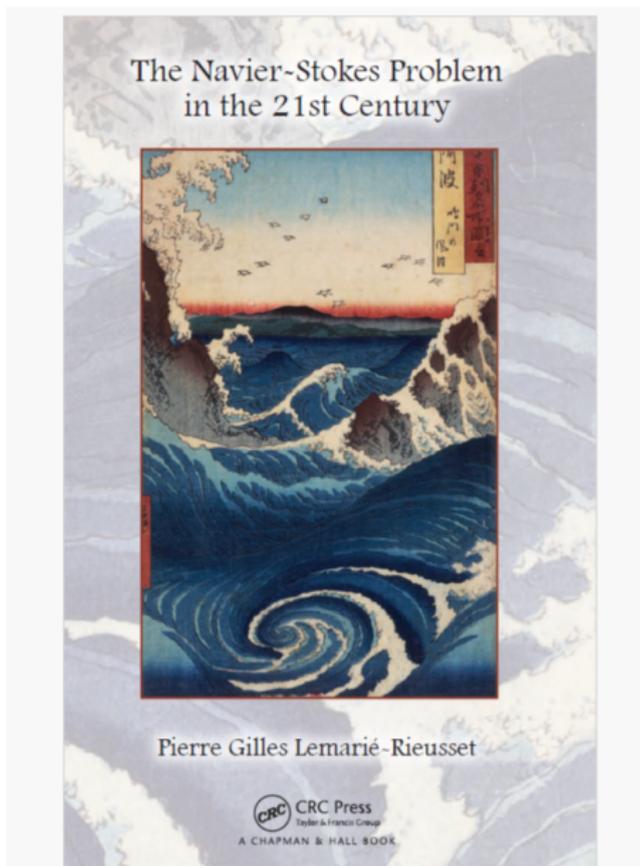


Figure: De acordo com o critério BKM aparece singularidade em tempo finito

## Conclusões e conexões

- Os problemas de singularidades para Euler e Navier-Stokes são importantes e atuais.
- As ferramentas de análise usadas são modernas e sofisticadas: análise harmônica (operadores integrais singulares, decomposição de Littlewood-Paley, “wavelets”, etc), análise funcional (espaços de funções), análise microlocal (cálculo paradiferencial, etc).
- Esta área depende, de modo não-trivial, de sinergia entre análise, experimentos e simulações numéricas, na melhor tradição de matemática aplicada.
- Uma resposta definitiva ajudará a compreender vários outros problemas importantes de mecânica dos fluidos, tais como transição para turbulência, modelagem de escoamentos turbulentos e dissipação de energia, etc.
- Em resumo, trata-se de uma área rica em problemas, interdisciplinar e extremamente ativa.

## Leitura recomendada:



Obrigada!