A conjectura de Hodge

Dragomir Tsonev

Universidade Federal do Amazonas

XI Bienal de Matemática - São Carlos / SP

August 2, 2024

“Tudo deve ser o mais simples possível, mas não mais simples"

O único propósito desta palestra

PARA TENTAR CONVENCER A MINHA QUERIDA PLATEIA DE QUE ESTA É UMA CONJECTURA MUITO NATURAL

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

- Formas harmônicas

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

- Formas harmônicas
- Relações entre Geometria e EDP

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

- Formas harmônicas
- Relações entre Geometria e EDP
- Decomposição de Hodge

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

- Formas harmônicas
- Relações entre Geometria e EDP
- Decomposição de Hodge
- Relações topológicas entre geometria algebrica e geometria diferencial, especialmente no contexto de variadades de Kälher

Sir William Vallance Douglas Hodge (1903-1975)

Algumas contribuições na matemática:

- Formas harmônicas
- Relações entre Geometria e EDP
- Decomposição de Hodge
- Relações topológicas entre geometria algebrica e geometria diferencial, especialmente no contexto de variadades de Kälher

Aluno Notável: Sir Michael Francis Atiyah

Congresso Internacional de Matemáticos - 1950

W. V. D. Hodge. The Topological invariants of algebraic varieties. Proceedings ICM 1950, vol. 1,pp. 182-192. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1952)

Congresso Internacional de Matemáticos - 1950

W. V. D. Hodge. The Topological invariants of algebraic varieties. Proceedings ICM 1950, vol. 1,pp. 182-192. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1952)

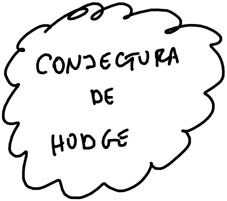
“Uma vez que as origens da geometria birracional das variedades algébricas remontam à teoria das funções algébricas de Riemann, não é surpreendente que as considerações topológicas tenham desempenhado um papel considerável na teoria das variedades algébricas definidas no corpo dos números complexos."

W. V. D. Hodge. The Topological invariants of algebraic varieties. Proceedings ICM 1950, vol. 1,pp. 182-192. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1952)

“Uma vez que as origens da geometria birracional das variedades algébricas remontam à teoria das funções algébricas de Riemann, não é surpreendente que as considerações topológicas tenham desempenhado um papel considerável na teoria das variedades algébricas definidas no corpo dos números complexos."

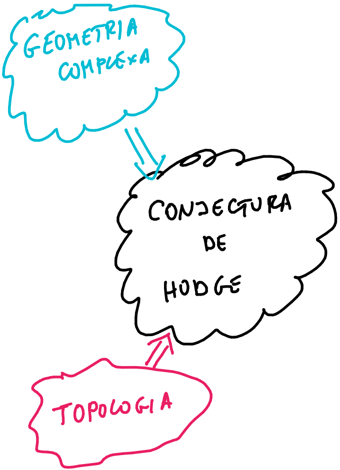
“Os resultados que descrevemos mostram que muitos dos invariantes clássicos de uma variedade algébrica V_m aparecem como invariantes da variedade complexa associada a ela, e que alguns são invariantes topológicos puros".

Arena para a conjectura de Hodge

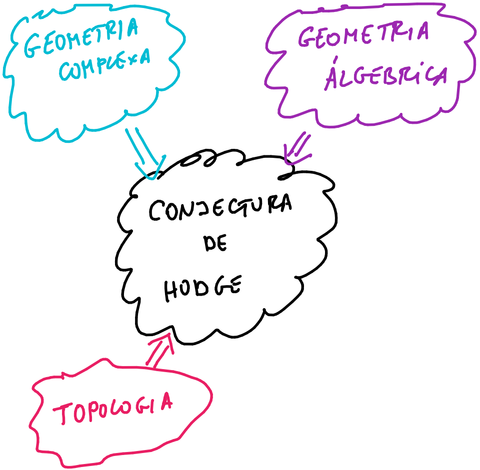


Arena para a conjectura de Hodge

Arena para a conjectura de Hodge



Arena para a conjectura de Hodge



A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

Pierre Deligne

Em uma variedade algébrica projetiva não singular sobre $\mathbb{C}$, qualquer classe de Hodge é uma combinação linear racional de classes $\mathrm{cl}\,(Z)$ de ciclos algébricos.

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

Pierre Deligne

Em uma variedade algébrica projetiva não singular sobre $\mathbb{C}$*, qualquer classe de Hodge é uma combinação linear racional de classes* $\mathrm{cl}\,(Z)$ *de ciclos algébricos.*

Clair Voisin

Seja X *uma variedade complexa projetiva. Então, para cada* k*, o espaço* Hdg^{2k} *é gerado sobre* $\mathbb{Q}$ *por classes* $[Z]$ *de subconjuntos algébricos fechados de* X *de codimensão* k*.*

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

James Lewis

Seja $C^k(X)$ *o grupo abeliano livre gerado pelas subvariades de codimensão* k *de* X*. Então,* $[-] : C^k(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{k,k}(X, \mathbb{Q})$ *é homomorfismo sobrejetivo para todo* k*.*

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

James Lewis

Seja $C^k(X)$ o grupo abeliano livre gerado pelas subvariades de codimensão k de X. Então, $[-] : C^k(X) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{k,k}(X, \mathbb{Q})$ é homomorfismo sobrejetivo para todo k.

Alexandre Grothendieck

Sejam X^{an} o espaço associado o esquema X e Filt^p a filtração de Hodge de cohomologia complexa $H^i(X^{an}, \mathbb{C}) = H^i(X^{an}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Então,

$$\mathrm{Filt}'^p H^i(X^{an}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Filt}^p H^i(X^{an}, \mathbb{C}) \cap H^i(X^{an}\mathbb{Q}).$$

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

Daniel Freed

Seja X uma variedade projetiva. Um ciclo topológico C em X é homólogo a uma combinação racional de ciclos algébricos se, e somente se, C tem rotação zero.

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

Daniel Freed

Seja X uma variedade projetiva. Um ciclo topológico C em X é homólogo a uma combinação racional de ciclos algébricos se, e somente se, C tem rotação zero.

“O segundo resultado de Lefschetz nos diz que uma condição necessária e suficiente para que um 2-ciclo Γ_2 em V_2 seja algébrico, isto é, homólogo a um ciclo definido por uma curva em V_2, é que as integrais duplas algébricas do primeiro tipo ligadas a V_2 devem ter período zero em Γ_2".

A Conjectura de Hodge - qual versão mesmo?

Daniel Freed

Seja X uma variedade projetiva. Um ciclo topológico C em X é homólogo a uma combinação racional de ciclos algébricos se, e somente se, C tem rotação zero.

!!!CH é falsa se os números racionais forem substituídos por inteiros!!! (Atiyah & Hirzebruch, 1962)

ESPAÇOS PROJETIVOS

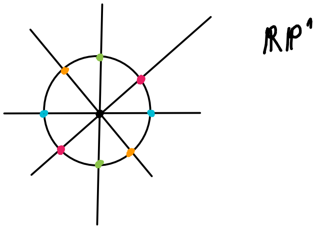
$\mathbb{RP}^1$

Problema: Partindo de espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ achar um novo espaço tal que cada duas retas se intersectam em um único ponto.

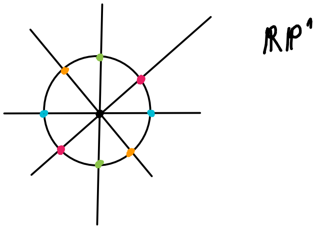
Problema: Partindo de espaço euclideano $\mathbb{R}^2$ achar um novo espaço tal que cada duas retas se intersectam em um único ponto.

Solução: $\mathbb{RP}^1 := \{\textit{retas pela origem } O \textit{ em } \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de pontos antípodas



$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de pontos antípodas



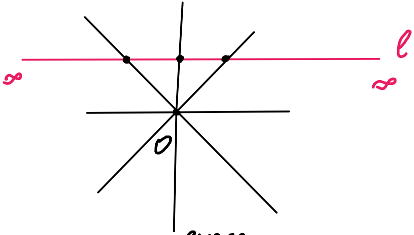
Conclusão: $\mathbb{RP}^1$ parece um círculo

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de compatificação de um ponto

$\mathbb{RP}^1$ é a compactificação de um ponto da reta afim.

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de compatificação de um ponto

$\mathbb{RP}^1$ é a compactificação de um ponto da reta afim.



$$\{\text{Retas pela } O\} \xleftrightarrow[1:1]{\text{quase}} \{\text{pontos de } \ell\}$$

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de introdução de coordendas

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de introdução de coordendas

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ e $Ax + By = 0$ a equação de uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de introdução de coordendas

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ e $Ax + By = 0$ a equação de uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^2$

Se $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, logo $(\lambda A)x + (\lambda B)x = 0$ será a equação da mesma reta!

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ e $Ax + By = 0$ a equação de uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^2$

Se $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, logo $(\lambda A)x + (\lambda B)x = 0$ será a equação da mesma reta!

Portanto, $\mathbb{RP}^1$ pode ser descrito por pares (A, B) com $(A, B) \sim (\lambda A, \lambda B),\ \forall \lambda \neq 0$

$\mathbb{RP}^1$- Descrição através de introdução de coordendas

Sejam $A, B \in \mathbb{R}$ e $Ax + By = 0$ a equação de uma reta passando pela origem em $\mathbb{R}^2$

Se $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, logo $(\lambda A)x + (\lambda B)x = 0$ será a equação da mesma reta!

Portanto, $\mathbb{RP}^1$ pode ser descrito por pares (A, B) com $(A, B) \sim (\lambda A, \lambda B), \ \forall \lambda \neq 0$

Notação: $\mathbb{RP}^1 := \left\{[x : y] | [\lambda x : \lambda y] \sim [x : y], \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

$$\mathbb{RP}^n := \left\{[x_0 : x_1 \cdots : x_n] | [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] \sim [x_0 \cdots : x_n],\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathbb{RP}^n := \left\{ [x_0 : x_1 \cdots : x_n] | [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] \sim [x_0 \cdots : x_n], \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{A}^{n+1} / \sim$

$\mathbb{RP}^n$

$$\mathbb{RP}^n := \left\{[x_0 : x_1 \cdots : x_n] | [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] \sim [x_0 \cdots : x_n],\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{A}^{n+1} / \sim$
- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \sim$ pontos antípodos

$$\mathbb{RP}^n := \left\{[x_0 : x_1 \cdots : x_n] | [\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] \sim [x_0 \cdots : x_n],\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{A}^{n+1} / \sim$
- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{S}^n / \sim$ pontos antípodos
- $\mathbb{RP}^n := \mathbb{A}^n \bigcup \{\infty\}$ compactificação

- Plano Cartesiano complexo $\mathbb{C}^2 := \{(x, y)|x = \alpha + i\beta,\ y = \delta + i\gamma\}$

$\mathbb{CP}^n$

- Plano Cartesiano complexo $\mathbb{C}^2 := \{(x, y) | x = \alpha + i\beta,\ y = \delta + i\gamma\}$
- Reta: $Ax + By + C = 0,\ \ x, y \in \mathbb{C}$ e A, B, C reais ou possivelmente complexos

- Plano Cartesiano complexo $\mathbb{C}^2 := \{(x, y)|x = \alpha + i\beta,\ y = \delta + i\gamma\}$
- Reta: $Ax + By + C = 0,\ \ x, y \in \mathbb{C}$ e A, B, C reais ou possivelmente complexos
- Círculo: $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0,\ \ x, y \in \mathbb{C}$, P, Q, R reais ou possivelmente complexos

- Plano Cartesiano complexo $\mathbb{C}^2 := \{(x, y)|x = \alpha + i\beta,\ y = \delta + i\gamma\}$
- Reta: $Ax + By + C = 0,\ \ x, y \in \mathbb{C}$ e A, B, C reais ou possivelmente complexos
- Círculo: $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0,\ \ x, y \in \mathbb{C}$, P, Q, R reais ou possivelmente complexos

$\mathbb{CP}^n := \{[x_0 : x_1 \cdots : x_n]|[\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n] \sim [x_0 \cdots : x_n],\ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, onde $x_0, ..., x_n \in \mathbb{C}$.

CICLOS ÁLGEBRICOS

Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{S}^1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

Reta: $Ax + By + C = 0$

Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

O sistema reduz para $ax^2 + bx + c = 0$

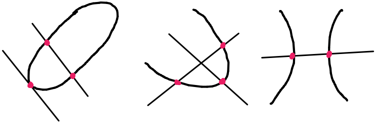
Intersecção de curvas em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

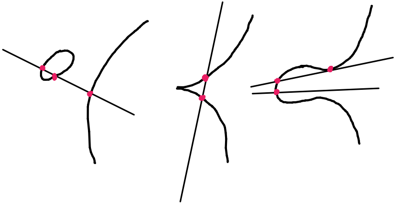
O sistema reduz para $ax^2 + bx + c = 0$
Três possibilidades:

- 2 soluções reais
- 1 solução real
- 0 soluções reais

Interseção de curvas em $\mathbb{R}^2$



cônicas (grau 2)



cúbicas (grau 3)

De $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^n$

Def: Um ciclo algébrico em $\mathbb{CP}^n$ é um conjunto de soluções de algum polinômio.

De $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^n$

Def: Um ciclo algébrico em $\mathbb{CP}^n$ é um conjunto de soluções de algum polinômio.

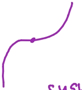
Um ciclo é suave se for localmete plano (flat)

De $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^n$

Def: Um ciclo algébrico em $\mathbb{CP}^n$ é um conjunto de soluções de algum polinômio.
Um ciclo é suave se for localmete plano (flat)

$y^2 = x^3$

não é suave

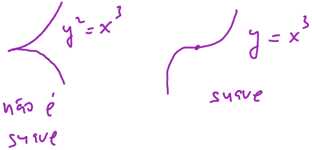


$y = x^3$

suave

De $\mathbb{CP}^2$ a $\mathbb{CP}^n$

Def: Um ciclo algébrico em $\mathbb{CP}^n$ é um conjunto de soluções de algum polinômio.
Um ciclo é suave se for localmete plano (flat)



Obs: Um ciclo algébrico suave em $\mathbb{CP}^n$ é naturalmente uma (sub)variedade projetiva de $\mathbb{CP}^n$.

Contando pontos de intersecção em $\mathbb{CP}^n$

Teorema de Bezout: Uma curva de grau m intersecta uma curva de grau n em mn pontos.

Mais uma generalização - Variedades Projetivas

Uma variedade projetiva X é definida por equações (suaves) polinomiais:

$$X : P_1(x^1, x^2, ..., x^n) = P_2(x^1, x^2, ..., x^n) = \cdots = P_s(x^1, x^2, ..., x^n) = 0$$

Mais uma generalização - Variedades Projetivas

Uma variedade projetiva X é definida por equações (suaves) polinomiais:

$$X : P_1(x^1, x^2, ..., x^n) = P_2(x^1, x^2, ..., x^n) = \cdots = P_s(x^1, x^2, ..., x^n) = 0$$

Um ciclo algébrico C em X é dado por equações adicionais:

$$C : Q_1(x^1, x^2, ..., x^n) = Q_2(x^1, x^2, ..., x^n) = \cdots = Q_t(x^1, x^2, ..., x^n) = 0$$

Mais uma generalização - Variedades Projetivas

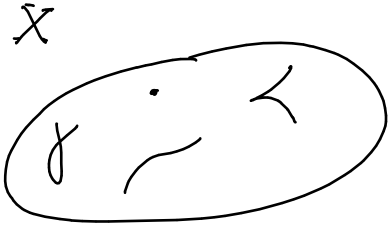
Uma variedade projetiva X é definida por equações (suaves) polinomiais:

$$X : P_1(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = P_2(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = \cdots = P_s(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = 0$$

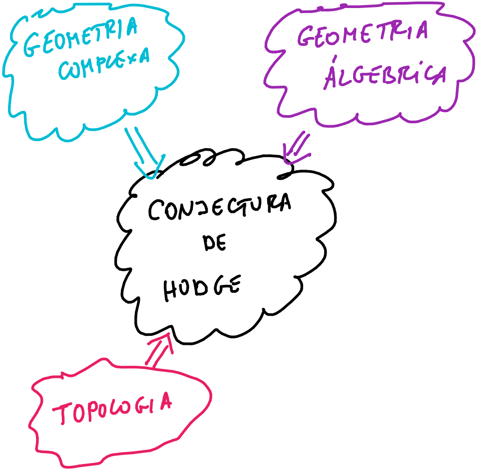
Um ciclo algébrico C em X é dado por equações adicionais:

$$C : Q_1(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = Q_2(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = \cdots = Q_t(x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n) = 0$$

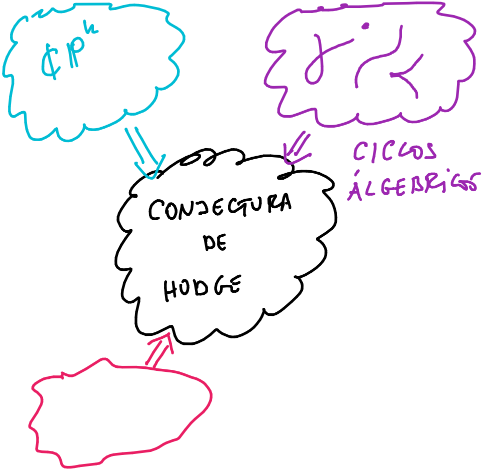
Um ciclo algébrico em uma variedade algébrica V é uma combinação linear formal de subvariedades de V.


X

Reprise


GEOMETRIA COMPLEXA
GEOMETRIA ÁLGEBRICA
CONJECTURA DE HODGE
TOPOLOGIA

Reprise



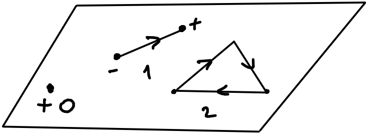
Reprise

Conjectura de Hodge

Seja X uma variedade projetiva. Um ciclo topológico C em X é homólogo a uma combinação racional de ciclos algébricos se, e somente se, C tem rotação zero.

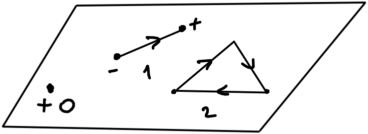
CICLOS TOPOLÓGICOS, INTEGRAÇÃO, STOKES, DE RHAM E TUDO ISSO

Simplexos - formas básicas em espaços topológicos



Ciclos topológicos

Simplexos - formas básicas em espaços topológicos



Os simplexos são caracterizados por sua dimensão

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1) - \mathit{simplexo}$

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1) - simplexo$
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i \sigma_i$ de k-simplexos

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1) - simplexo$
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i\sigma_i$ de k-simplexos
- O bordo $\partial\sigma$ de simplexo σ é a cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)j[v_0, ...\hat{v}_j..., v_n]$$

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1)-$ *simplexo*
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i \sigma_i$ de k-simplexos
- O bordo $\partial\sigma$ de simplexo σ é a cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)j[v_0, ...\hat{v}_j..., v_n]$$

- C_k o grupo abeliano de k-cadeias

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1) - simplexo$
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i \sigma_i$ de k-simplexos
- O bordo $\partial\sigma$ de simplexo σ é a cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)j[v_0, ...\hat{v}_j..., v_n]$$

- C_k o grupo abeliano de k-cadeias
- Operador de bordo $\partial_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ homomorfismo

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1)-$ *simplexo*
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i \sigma_i$ de k-simplexos
- O bordo $\partial\sigma$ de simplexo σ é a cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n} (-1)j[v_0, ...\hat{v}_j..., v_n]$$

- C_k o grupo abeliano de k-cadeias
- Operador de bordo $\partial_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ homomorfismo
- $Z_k := \ker \partial_k$ ciclos

Ciclos topológicos

- $\sigma = [v_0, v_1, v_2, ..., v_n]$ n-simplexo afim orientado
- Cada face de σ é um $(n-1) - simplexo$
- Uma k-cadeia de simplexos é a soma formal $\sum_{i=1}^{N} c_i\sigma_i$ de k-simplexos
- O bordo $\partial\sigma$ de simplexo σ é a cadeia

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^{n}(-1)j[v_0, ...\hat{v}_j..., v_n]$$

- C_k o grupo abeliano de k-cadeias
- Operador de bordo $\partial_k : C_k \longrightarrow C_{k-1}$ homomorfismo
- $Z_k := \mathrm{ker}\partial_k$ ciclos
- $B_k := \mathrm{Im}\partial_{k+1}$ bordos

Ciclos topológicos - Homologia simplicial

- Seja S simplicial complex. Definimos $H_k(S) := Z_k/B_k$

Ciclos topológicos - Homologia simplicial

- Seja S simplicial complex. Definimos $H_k(S) := Z_k/B_k$
- Uma Definição prática: Um ciclo é uma cadeia sem bordo

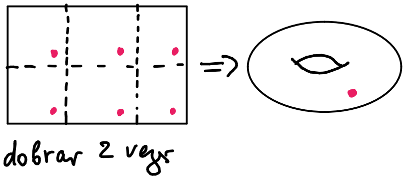
Ciclos topológicos - Homologia simplicial

- Seja S simplicial complex. Definimos $H_k(S) := Z_k/B_k$
- Uma Definição prática: Um ciclo é uma cadeia sem bordo
- Os ciclos topológicos são homólogos se sua “diferença" for um bordo

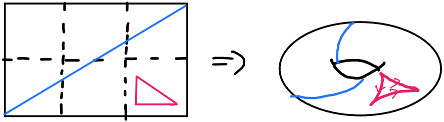
Ciclos topológicos - Homologia simplicial

- Seja S simplicial complex. Definimos $H_k(S) := Z_k/B_k$
- Uma Definição prática: Um ciclo é uma cadeia sem bordo
- Os ciclos topológicos são homólogos se sua “diferença" for um bordo
- Ciclos topológicos ao menos uma equivalência compreendem uma classe de homologia

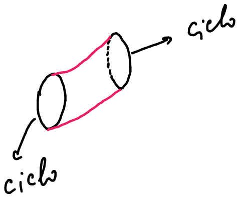
Ciclos topológicos - alguns desenhos



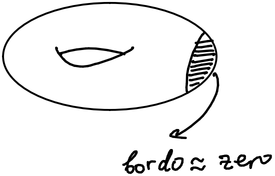
Ciclos topológicos - alguns desenhos



Ciclos topológicos - alguns desenhos



Ciclos topológicos - alguns desenhos



Intersecção de ciclos topológicos e invariantes topológicos

Os métodos topológicos desenvolvidos por Lefschetz e aplicados em variedades projetivas resultarem, entre outros, em

Intersecção de ciclos topológicos e invariantes topológicos

Os métodos topológicos desenvolvidos por Lefschetz e aplicados em variedades projetivas resultarem, entre outros, em

- Ciclos de dimensões complemntares têm número de intersecção que depende APENAS de suas classes de homologia

Intersecção de ciclos topológicos e invariantes topológicos

Os métodos topológicos desenvolvidos por Lefschetz e aplicados em variedades projetivas resultarem, entre outros, em

- Ciclos de dimensões complemntares têm número de intersecção que depende APENAS de suas classes de homologia
- Teorema de Bezout é topológico

Intersecção de ciclos topológicos e invariantes topológicos

Os métodos topológicos desenvolvidos por Lefschetz e aplicados em variedades projetivas resultarem, entre outros, em

- Ciclos de dimensões complemntares têm número de intersecção que depende APENAS de suas classes de homologia
- Teorema de Bezout é topológico
- O grau de uma curva algebrica em $\mathbb{CP}^2$ é topológico

Intersecção de ciclos topológicos e invariantes topológicos

Os métodos topológicos desenvolvidos por Lefschetz e aplicados em variedades projetivas resultarem, entre outros, em

- Ciclos de dimensões complemntares têm número de intersecção que depende APENAS de suas classes de homologia
- Teorema de Bezout é topológico
- O grau de uma curva algebrica em $\mathbb{CP}^2$ é topológico
- Muitos dos invariantes de superficies descobertos no século XIX são topológicos

Um problema natural

Sejam X uma variedade projetiva e C um ciclo topológico. Quando C é homólogo a uma soma formal de ciclos algébricos?

Integração e ciclos topológicos

- Teorema de Stokes $\int_{\partial C} \omega = \int_C \mathrm{d}\,\omega$

Integração e ciclos topológicos

- Teorema de Stokes $\int_{\partial C} \omega = \int_C \mathrm{d}\,\omega$
- d age de forma análoga a ∂

Integração e ciclos topológicos

- Teorema de Stokes $\int_{\partial C} \omega = \int_C \mathrm{d}\,\omega$
- d age de forma análoga a ∂
- Objetos locais carregam informações globais

Integração e ciclos topológicos

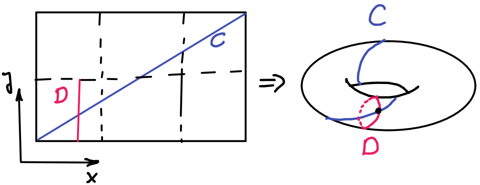
- Teorema de Stokes $\int_{\partial C} \omega = \int_C \mathrm{d}\,\omega$
- d age de forma análoga a ∂
- Objetos locais carregam informações globais
- Há dualidade entre classes de homologia de ciclos topológicos e classes e equivalência de formas diferencias

Integração e ciclos topológicos

Os números de intersecção = integrais de formas diferenciais sobre ciclos topológicos suaves

Integração e ciclos topológicos

Os números de intersecção = integrais de formas diferenciais sobre ciclos topológicos suaves



$$\int dx = C \cdot D = 3$$

número de intersecções de C com D

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

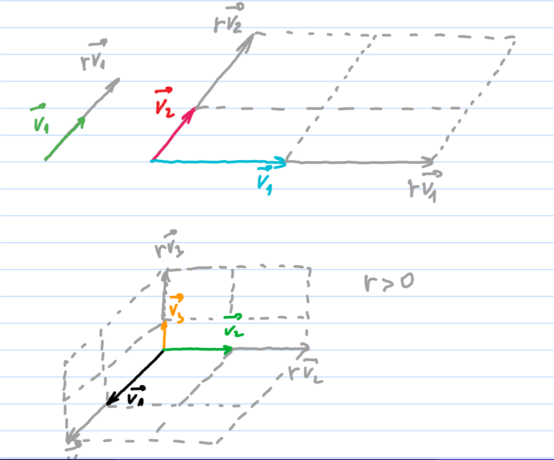
Redimensionar na geometria euclidiana pode ser não vantajoso!

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

Redimensionar na geometria euclidiana pode ser não vantajoso!
Se $r > 0$ e $v \mapsto rv \implies L \mapsto rL,\ A \mapsto r^2 A,\ V \mapsto r^3 V$

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

Redimensionar na geometria euclidiana pode ser não vantajoso!
Se $r > 0$ e $v \mapsto rv \implies L \mapsto rL,\ A \mapsto r^2 A,\ V \mapsto r^3 V$



Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

O redimensionamento em geometria complexa é dado naturalmente pela rotação!

$v \mapsto \lambda v$, $\lambda = re^{i\theta}$

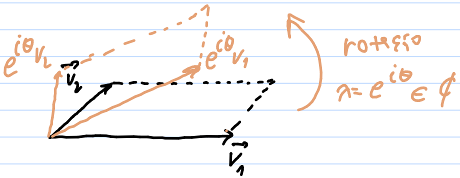
Caso $r = 1$, as medições são invariantes!

Uma vantagem de geometria complexa - a perspicácia de Hodge

O redimensionamento em geometria complexa é dado naturalmente pela rotação!

$v \mapsto \lambda v$, $\lambda = re^{i\theta}$

Caso $r = 1$, as medições são invariantes!



A perspicácia de Hodge

Hodge:

- enfatizou o uso de medição em variedades projetivas

A perspicácia de Hodge

Hodge:

- enfatizou o uso de medição em variedades projetivas
- introduziu número de rotação de formas diferenciais em variedades projetivas

A perspicácia de Hodge

Hodge:

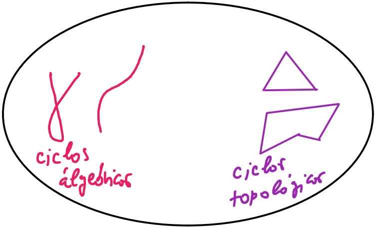
- enfatizou o uso de medição em variedades projetivas
- introduziu número de rotação de formas diferenciais em variedades projetivas
- Ciclos algébricos têm número de rotação zero: medição invariante sob rotação

A perspicácia de Hodge

Hodge:

- enfatizou o uso de medição em variedades projetivas
- introduziu número de rotação de formas diferenciais em variedades projetivas
- Ciclos algébricos têm número de rotação zero: medição invariante sob rotação
- Inspirou-se nos trabalhos de Abel, Riemann, Picard e Lefschetz sobre integraçõ em Geometria Complexa

O resumo da opera



X - variedade projetiva

O resumo da opera

Conjectura de Hodge

Seja X uma variedade projetiva. Um ciclo topológico C em X é homólogo a uma combinação racional de ciclos algébricos se, e somente se, C tem rotação zero.

Será que a conjectura de Hodge é verdadeira?

“Esta conjectura é bastante plausível e (desde que não seja refutada!) deveria certamente ser considerada como a conjectura mais profunda na teoria “analítica” das variedades algébricas."
Alexandre Grothendieck (1969)

Será que a conjectura de Hodge é verdadeira?

“Esta conjectura é bastante plausível e (desde que não seja refutada!) deveria certamente ser considerada como a conjectura mais profunda na teoria “analítica” das variedades algébricas."
Alexandre Grothendieck (1969)

Alexandre Grothendieck

Sejam X^{an} o espaço associado o esquema X e Filt^p a filtração de Hodge de cohomologia complexa $H^i(X^{an}, \mathbb{C}) = H^i(X^{an}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Então,

$$\mathrm{Filt}'^p H^i(X^{an}, \mathbb{Q}) = \mathrm{Filt}^p H^i(X^{an}, \mathbb{C}) \cap H^i(X^{an}\mathbb{Q}).$$

Será que a conjectura de Hodge é verdadeira?

“Esta “conjectura de Hodge" já alcançou um status considerável, quase no mesmo nível da hipótese de Riemann ou da conjectura de Poincaré. A sua importância central é plenamente reconhecida, mas não há solução à vista e poderemos ter de esperar muitos anos pela resposta."

Sir Michael Atiyah (1976)

Será que a conjectura de Hodge é verdadeira?

“A questão colocada pela “conjectura de Hodge" é muito natural... Infelizmente, apesar da palavra “conjectura", não há, até onde eu sei, a sombra de uma razão para acreditar nela; Estaríamos prestando um serviço aos geômetras se pudéssemos resolver a questão por meio de um contra-exemplo."

André Weil (1979)

Será que a conjectura de Hodge é verdadeira?

“O matemático sempre diz para si mesmo: “Seria ótimo” se isto e aquilo fossem verdade. Às vezes ele verifica isso sem muita dificuldade; outras vezes, ele logo percebe seu erro. Se a sua intuição resiste por algum tempo aos seus esforços, ele tende a falar de uma “conjectura”, mesmo que em si mesma tenha pouca importância. Na maioria das vezes é prematuro... Em todos os casos, se eu fosse dar um conselho não solicitado, recomendaria que a palavra “conjectura" fosse usada com um pouco mais de cautela do que nos últimos tempos."

André Weil (1979)

Alguns progressos pequenos

Alguns progressos pequenos

- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-$*ciclos* em variadede projetiva X^{2n}

Alguns progressos pequenos

- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-$ *ciclos* em variadede projetiva X^{2n}
- "O segundo resultado de Lefschetz nos diz que uma condição necessária e suficiente para que um 2-ciclo Γ_2 em V_2 seja algébrico, isto é, homólogo a um ciclo definido por uma curva em V_2, é que as integrais duplas algébricas do primeiro tipo ligadas a V_2 devem ter período zero em Γ_2".

Alguns progressos pequenos

- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-ciclos$ em variadede projetiva X^{2n}
- Outro resultado de Lefschetz mostra que CH para $(2p)-ciclos$ implica HC para $(2n-2p)-ciclos$ en X^{2n}, onde $2p > n$

Alguns progressos pequenos

- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-$ *ciclos* em variadede projetiva X^{2n}
- Outro resultado de Lefschetz mostra que CH para $(2p)-$ *ciclos* implica HC para $(2n-2p)-$ *ciclos* en X^{2n}, onde $2p > n$
- CH vale em dimensões 2,4,6

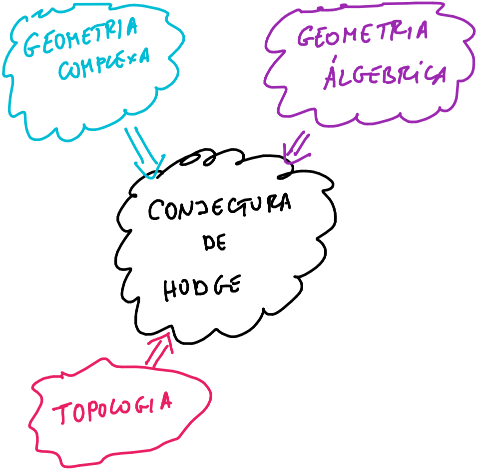
Alguns progressos pequenos

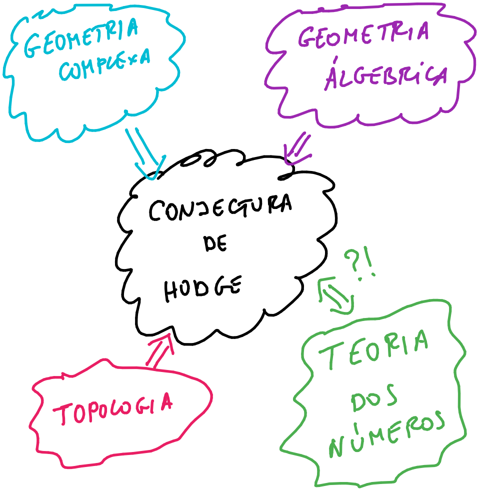
- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-$*ciclos* em variadede projetiva X^{2n}
- Outro resultado de Lefschetz mostra que CH para $(2p)-$*ciclos* implica HC para $(2n-2p)-$*ciclos* en X^{2n}, onde $2p > n$
- CH vale em dimensões 2,4,6
- CH verificada em alguns exemplos en dimensões ≥ 8

Alguns progressos pequenos

- Teorema de Lefschetz (1923) - caso particular da CH para $(2n-2)-$ *ciclos* em variadede projetiva X^{2n}
- Outro resultado de Lefschetz mostra que CH para $(2p)-$ *ciclos* implica HC para $(2n-2p)-$ *ciclos* en X^{2n}, onde $2p > n$
- CH vale em dimensões 2,4,6
- CH verificada em alguns exemplos en dimensões ≥ 8
- Algumas consequências da CH alcançadas

UMA PAISAGEM MAIOR...


GEOMETRIA COMPLEXA
GEOMETRIA ÁLGEBRICA
CONJECTURA DE HODGE
TOPOLOGIA


GEOMETRIA COMPLEXA
GEOMETRIA ÁLGEBRICA
CONJECTURA DE HODGE
?!
TOPOLOGIA
TEORIA DOS NÚMEROS

Conjectura do Tate - 1963

Esta conjectura:

- Propõe descrever ciclos algébricos em termos da representação de Galois na cohomologia étale
- É virtualmente o análogo aritmético da conjectura de Hodge
- Para alguns casos especiais está intimamente relacionada com a conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer
- Implicaria maioria das conjecturas padrão (Standard Conjectures) de Grothendiek sobre ciclos algébircos

SEXTOU, MAS HOJE COM A CONJECTURA DE HODGE!