

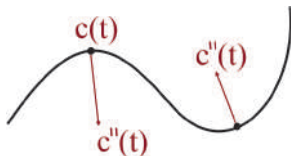
SUPERFÍCIES MÍNIMAS E DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Ana Menezes
Princeton University

XI Bienal de Matemática - UFSCar
2024

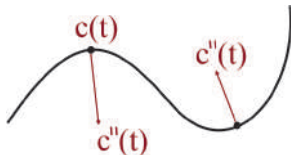
Curvatura de uma curva

Curvatura de uma curva



Considere $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, i.e., $\|c'(t)\| = 1$.

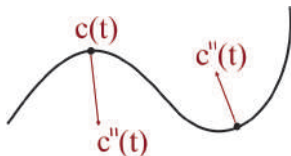
Curvatura de uma curva



Considere $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, i.e., $\|c'(t)\| = 1$. Para cada ponto $c(t)$, definimos o *vetor curvatura* neste ponto como:

$$\vec{\kappa}(t) = c''(t)$$

Curvatura de uma curva



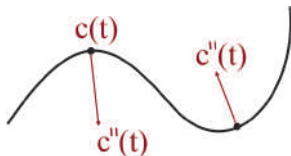
Considere $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, i.e., $\|c'(t)\| = 1$. Para cada ponto $c(t)$, definimos o *vetor curvatura* neste ponto como:

$$\vec{\kappa}(t) = c''(t)$$

e a *curvatura* neste ponto como:

$$\kappa(t) = \|c''(t)\|$$

Curvatura de uma curva

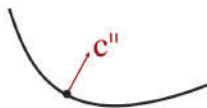
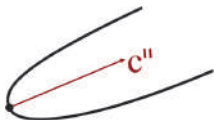


Considere $c : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, i.e., $\|c'(t)\| = 1$. Para cada ponto $c(t)$, definimos o *vetor curvatura* neste ponto como:

$$\vec{\kappa}(t) = c''(t)$$

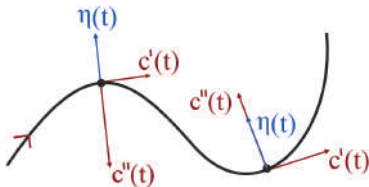
e a *curvatura* neste ponto como:

$$\kappa(t) = \|c''(t)\|$$



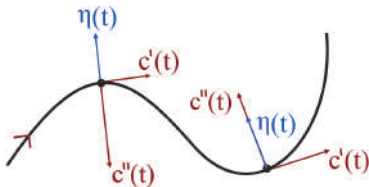
Curva Planar

Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .



Curva Planar

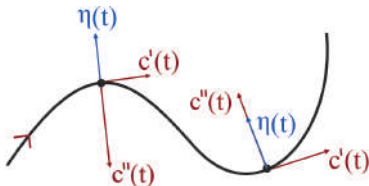
Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .



A curvatura com sinal no ponto $c(t)$ é definida como sendo o valor $\kappa(t)$ tal que $c''(t) = \kappa(t)\eta(t)$

Curva Planar

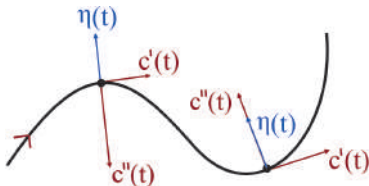
Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .



A curvatura com sinal no ponto $c(t)$ é definida como sendo o valor $\kappa(t)$ tal que $c''(t) = \kappa(t)\eta(t)$, ou seja, $\kappa(t) = \langle \vec{\kappa}(t), \eta(t) \rangle$.

Curva Planar

Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .

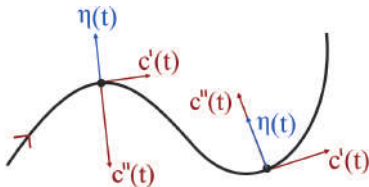


A curvatura com sinal no ponto $c(t)$ é definida como sendo o valor $\kappa(t)$ tal que $c''(t) = \kappa(t)\eta(t)$, ou seja, $\kappa(t) = \langle \vec{\kappa}(t), \eta(t) \rangle$.

$$c(t) \longleftrightarrow c(-t)$$

Curva Planar

Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .

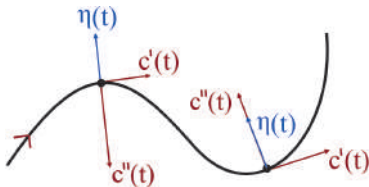


A curvatura com sinal no ponto $c(t)$ é definida como sendo o valor $\kappa(t)$ tal que $c''(t) = \kappa(t)\eta(t)$, ou seja, $\kappa(t) = \langle \vec{\kappa}(t), \eta(t) \rangle$.

$$\begin{aligned}c(t) &\longleftrightarrow c(-t) \\ \kappa(t) &= -\kappa(-t)\end{aligned}$$

Curva Planar

Dada uma curva planar $c(t)$, considere $\eta(t)$ o vetor normal unitário a $c'(t)$ tal que $\{c'(t), \eta(t)\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 .



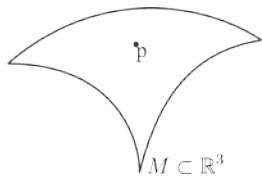
A curvatura com sinal no ponto $c(t)$ é definida como sendo o valor $\kappa(t)$ tal que $c''(t) = \kappa(t)\eta(t)$, ou seja, $\kappa(t) = \langle \vec{\kappa}(t), \eta(t) \rangle$.

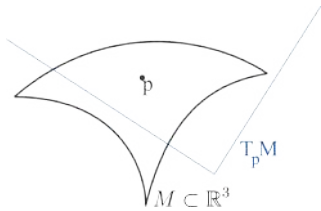
$$c(t) \longleftrightarrow c(-t)$$

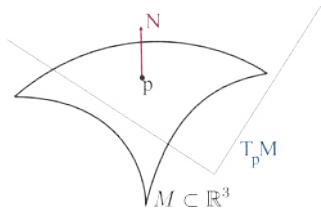
$$\kappa(t) = -\kappa(-t)$$

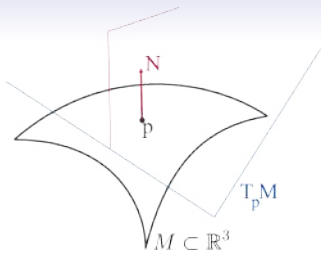
$$\vec{\kappa}(t) = \vec{\kappa}(-t)$$

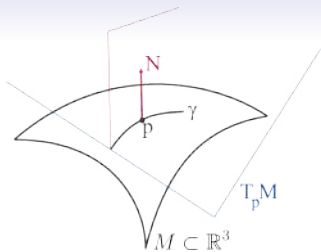


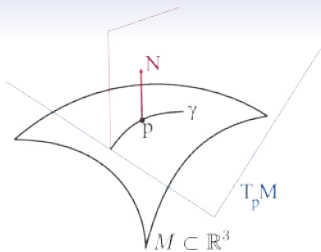




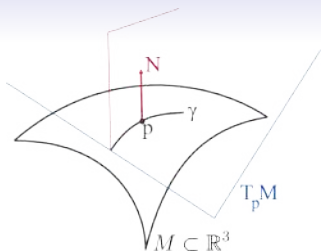








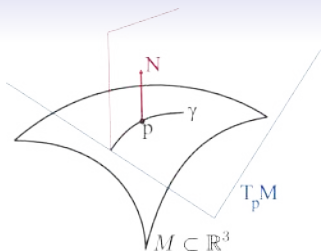
$$\kappa_\gamma = \langle \vec{\kappa}_\gamma, N \rangle$$



$$\kappa_\gamma = \langle \vec{\kappa}_\gamma, N \rangle$$

As curvaturas principais de M em p são definidas como

$$\kappa_1(p) = \max_\gamma \kappa_\gamma(p) \text{ e } \kappa_2(p) = \min_\gamma \kappa_\gamma(p).$$



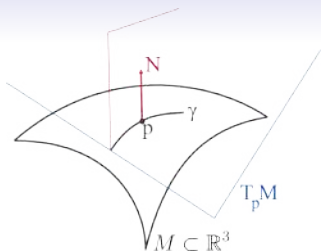
$$\kappa_\gamma = \langle \vec{\kappa}_\gamma, N \rangle$$

As curvaturas principais de M em p são definidas como

$$\kappa_1(p) = \max_\gamma \kappa_\gamma(p) \quad \text{e} \quad \kappa_2(p) = \min_\gamma \kappa_\gamma(p).$$

- *Curvatura de Gauss* de M em p : $K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$.

- *Curvatura Média* de M em p : $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$.



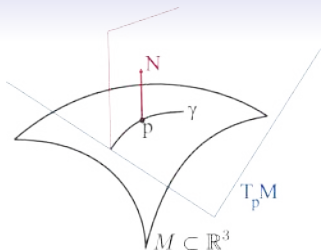
$$\kappa_\gamma = \langle \vec{\kappa}_\gamma, N \rangle$$

As curvaturas principais de \$M\$ em \$p\$ são definidas como

$$\kappa_1(p) = \max_\gamma \kappa_\gamma(p) \text{ e } \kappa_2(p) = \min_\gamma \kappa_\gamma(p).$$

- Curvatura de Gauss de \$M\$ em \$p\$: $K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$.
- Curvatura Média de \$M\$ em \$p\$: $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$.

Observação: Dizemos que \$M\$ tem *curvatura média constante \$H\$* se $H(p) = H$, em todo ponto $p \in M$.



$$\kappa_\gamma = \langle \vec{\kappa}_\gamma, N \rangle$$

As curvaturas principais de M em p são definidas como

$$\kappa_1(p) = \max_\gamma \kappa_\gamma(p) \quad \text{e} \quad \kappa_2(p) = \min_\gamma \kappa_\gamma(p).$$

- *Curvatura de Gauss* de M em p : $K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)$.

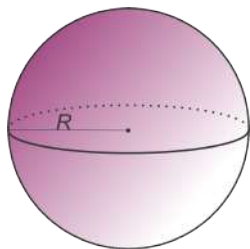
- *Curvatura Média* de M em p : $H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$.

Observação: Dizemos que M tem *curvatura média constante* H se $H(p) = H$, em todo ponto $p \in M$. Quando $H \equiv 0$, dizemos que M é uma *superfície mínima*.

Exemplos

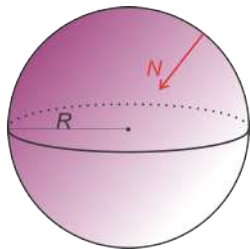
Exemplos

1. Esfera de raio R :



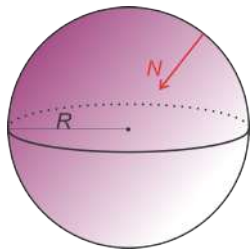
Exemplos

1. Esfera de raio R :



Exemplos

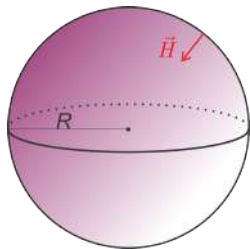
1. Esfera de raio R :



$$H = \frac{1}{R}$$

Exemplos

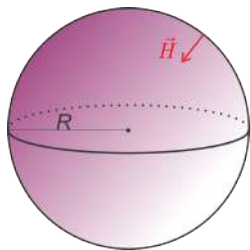
1. Esfera de raio R :



$$H = \frac{1}{R}$$

Exemplos

1. Esfera de raio R :



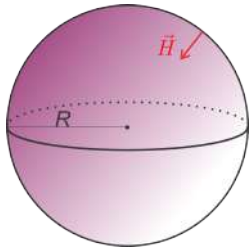
$$H = \frac{1}{R}$$

2. Plano



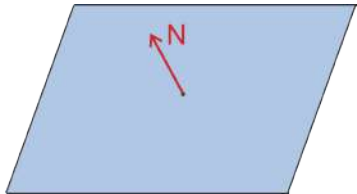
Exemplos

1. Esfera de raio R :



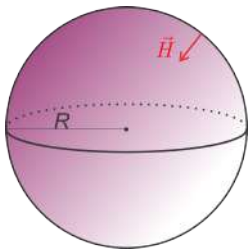
$$H = \frac{1}{R}$$

2. Plano



Exemplos

1. Esfera de raio R :



$$H = \frac{1}{R}$$

2. Plano



$$H = 0$$

Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

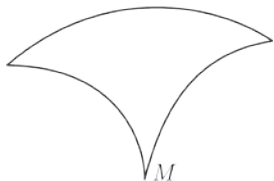
Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

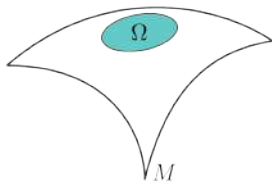
Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, considere uma família a um parâmetro de imersões $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com suporte compacto, i.e., o vetor variacional $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ satisfaz $X \equiv 0$ em $M \setminus \text{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto.



Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

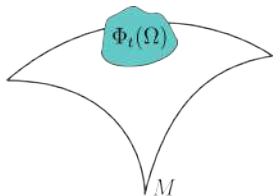
Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, considere uma família a um parâmetro de imersões $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com suporte compacto, i.e., o vetor variacional $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ satisfaz $X \equiv 0$ em $M \setminus \text{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto.



Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, considere uma família a um parâmetro de imersões $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com suporte compacto, i.e., o vetor variacional $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ satisfaz $X \equiv 0$ em $M \setminus \text{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto.



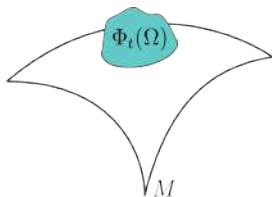
Defina o **Funcional Área** como:

$$\mathcal{A}(t) = \text{area}(\Phi_t(\Omega)).$$

Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, considere uma família a um parâmetro de imersões $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com suporte compacto, i.e., o vetor variacional $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ satisfaz $X \equiv 0$ em $M \setminus \text{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto.



Defina o **Funcional Área** como:

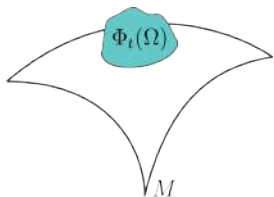
$$\mathcal{A}(t) = \text{area}(\Phi_t(\Omega)).$$

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = \int_{\Omega} \langle \vec{H}, X \rangle d\sigma$$

Superfícies Mínimas: Outros Pontos de Vista

1. Pontos Críticos para o Funcional Área

Dada uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$, considere uma família a um parâmetro de imersões $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ com suporte compacto, i.e., o vetor variacional $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ satisfaz $X \equiv 0$ em $M \setminus \text{int}(\Omega)$, onde $\Omega \subset M$ é um domínio compacto.



Defina o **Funcional Área** como:

$$\mathcal{A}(t) = \text{area}(\Phi_t(\Omega)).$$

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = \int_{\Omega} \langle \vec{H}, X \rangle d\sigma$$

M é um ponto crítico para o funcional área $\iff M$ mínima

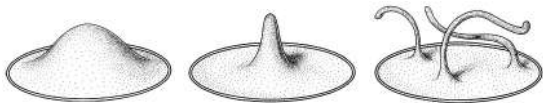
2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

Lagrange (1760): Considere uma curva fechada simples em \mathbb{R}^3 .
Encontre a superfície de menor area cujo bordo é essa curva.

2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

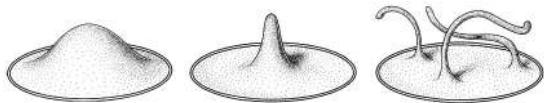
Lagrange (1760): Considere uma curva fechada simples em \mathbb{R}^3 .
Encontre a **superfície de menor area** cujo bordo é essa curva.



(Figura do livro Geometric Measure Theory - Frank Morgan)

2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

Lagrange (1760): Considere uma curva fechada simples em \mathbb{R}^3 .
Encontre a superfície de menor área cujo bordo é essa curva.

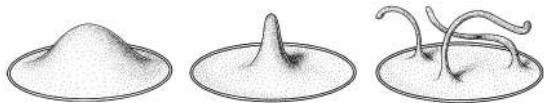


(Figura do livro Geometric Measure Theory - Frank Morgan)

Superfície mínima \iff Minimizante de área local.

2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

Lagrange (1760): Considere uma curva fechada simples em \mathbb{R}^3 .
Encontre a superfície de menor área cujo bordo é essa curva.



(Figura do livro Geometric Measure Theory - Frank Morgan)

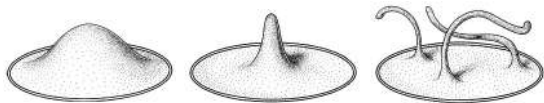
Superfície mínima \iff Minimizante de área local.

O físico e matemático Plateau (1870) fez experimentos com películas de sabão para mostrar a existência de tal superfície.



2. Películas de Sabão: Problema de Plateau

Lagrange (1760): Considere uma curva fechada simples em \mathbb{R}^3 .
Encontre a superfície de menor área cujo bordo é essa curva.



(Figura do livro Geometric Measure Theory - Frank Morgan)

Superfície mínima \iff Minimizante de área local.

O físico e matemático Plateau (1870) fez experimentos com películas de sabão para mostrar a existência de tal superfície.

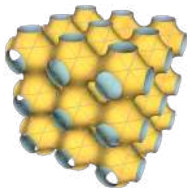


Douglas (1930), Radó (1930): Prova da existência para qualquer curva fechada simples.

Aplicações

Aplicações

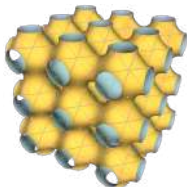
Exemplos de superfícies mínimas triplamente periódicas são abundantes na natureza.



Superfície Schwarz P

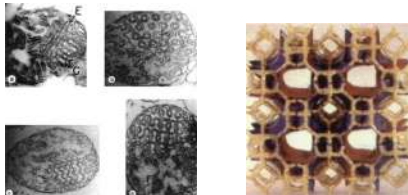
Aplicações

Exemplos de superfícies mínimas triplamente periódicas são abundantes na natureza.

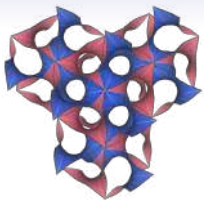


Superfície Schwarz P

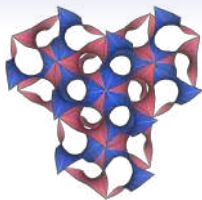
- Membranas em plantas e amebas. Compostos químicos.



Amebas e Zeólito

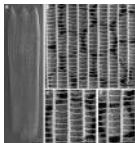
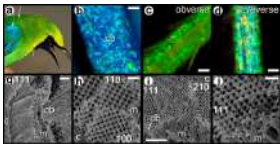


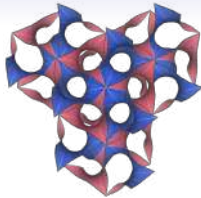
Giróide



Giróide

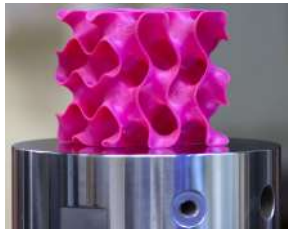
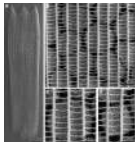
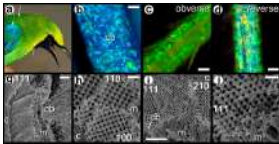
- Padrões nas cores de pássaros e borboletas.





Giróide

- Padrões nas cores de pássaros e borboletas.
- Estruturas de grafeno



Artes



Triune - Robert Engman.
Pensilvânia, EUA

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Mergulhada: A superfície não tem auto-intersecção.

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Mergulhada: A superfície não tem auto-intersecção.

Topologia Finita:

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Mergulhada: A superfície não tem auto-intersecção.

Topologia Finita:

- **Gênero:** *Número máximo de curvas fechadas que você pode retirar da superfície sem torná-la desconexa.*

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Mergulhada: A superfície não tem auto-intersecção.

Topologia Finita:

- **Gênero:** *Número máximo de curvas fechadas que você pode retirar da superfície sem torná-la desconexa.*
- **Fim:** *“O que sobra da superfície depois de retirar um compacto suficientemente grande”.*

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

Completa: Pra qualquer ponto $p \in M$ e todo vetor tangente $v \in T_pM$, existe uma geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida em todo \mathbb{R} tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Mergulhada: A superfície não tem auto-intersecção.

Topologia Finita:

- **Gênero:** *Número máximo de curvas fechadas que você pode retirar da superfície sem torná-la desconexa.*
- **Fim:** *“O que sobra da superfície depois de retirar um compacto suficientemente grande”.*

Uma superfície tem **topologia finita** se tem **gênero finito** e uma **quantidade finita de fins**.

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

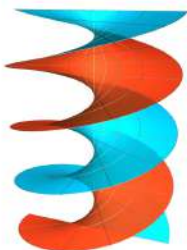
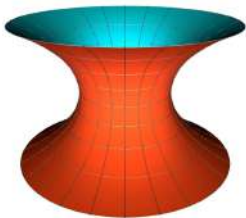
Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

1. Plano

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

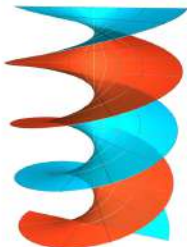
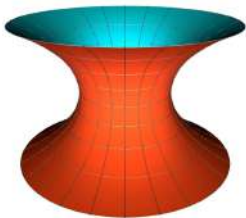
1. Plano

2. Catenóide and Helicóide: Euler (1744) and Euler-Meusnier (~ 1774).



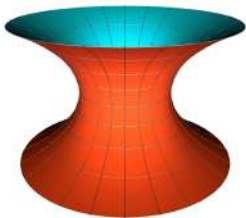
Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

1. Plano: $g = 0$ e $f = 1$.
2. Catenóide and Helicóide: Euler (1744) and Euler-Meusnier (~ 1774).

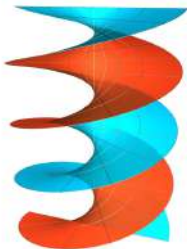


Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

1. Plano: $g = 0$ e $f = 1$.
2. Catenóide and Helicóide: Euler (1744) and Euler-Meusnier (~ 1774).

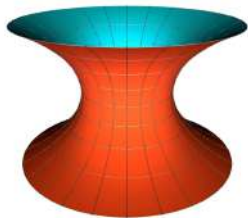


$$g = 0 \text{ e } f = 2$$

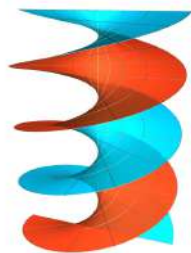


Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas em \mathbb{R}^3 com Topologia Finita

1. Plano: $g = 0$ e $f = 1$.
2. Catenóide and Helicóide: Euler (1744) and Euler-Meusnier (~ 1774).

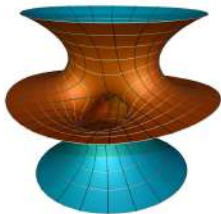


$$g = 0 \text{ e } f = 2$$

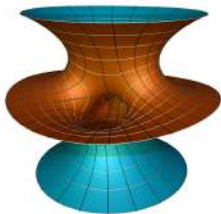


$$g = 0 \text{ e } f = 1$$

3. Superfície de Costa: Celso Costa (1982).

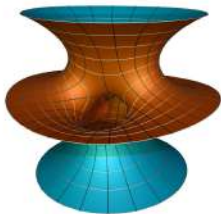


3. Superfície de Costa: Celso Costa (1982).



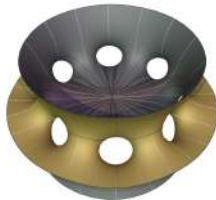
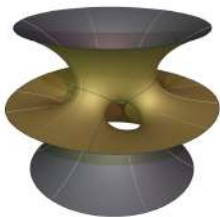
$$g = 1 \text{ e } f = 3$$

3. Superfície de Costa: Celso Costa (1982).



$$g = 1 \text{ e } f = 3$$

4. Família Costa-Hoffman-Meeks (1984): qualquer número de gênero e 3 fins.



Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π .

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π . Além disso, se a curvatura total é -4π , então a superfície (mergulhada) é o catenóide.

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π . Além disso, se a curvatura total é -4π , então a superfície (mergulhada) é o catenóide.

Geometrias de Thurston

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3$$

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, Nil_3, \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$$

$$Sol_3$$

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π . Além disso, se a curvatura total é -4π , então a superfície (mergulhada) é o catenóide.

Geometrias de Thurston

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3 \quad \dim(\text{Iso}) = 6$$

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}_3, \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{Sol}_3$$

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π . Além disso, se a curvatura total é -4π , então a superfície (mergulhada) é o catenóide.

Geometrias de Thurston

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3 \quad \dim(\text{Iso}) = 6$$

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}_3, \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad \dim(\text{Iso}) = 4$$

$$\text{Sol}_3$$

Superfícies Mínimas Completas Mergulhadas com Curvatura Total Finita

Curvatura total finita: $\int_M K d\sigma < \infty$

Teorema (Osserman, 80's): Se M é uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 com **curvatura total finita**, então sua curvatura total é um múltiplo de 2π . Além disso, se a curvatura total é -4π , então a superfície (mergulhada) é o catenóide.

Geometrias de Thurston

$$\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3 \quad \dim(\text{Iso}) = 6$$

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}_3, \widetilde{PSL}_2(\mathbb{R}) \quad \dim(\text{Iso}) = 4$$

$$\text{Sol}_3 \quad \dim(\text{Iso}) = 3$$

Teorema (Hauswirth, M.): Se $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}/G$ é uma superfície mínima completa com curvatura total finita, então

$$\int_M K d\sigma = 2\pi(2 - 2g - f).$$

Teorema (Hauswirth, M.): Se $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}/G$ é uma superfície mínima completa com curvatura total finita, então

$$\int_M K d\sigma = 2\pi(2 - 2g - f).$$

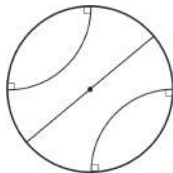
Teorema (Hauswirth, M. , Rodríguez):

Seja $M \subset \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ (ou em $\widetilde{PSL}_2(\mathbb{R})$) uma superfície mínima completa com topologia finita. Se os fins são assintóticos a um polígono no infinito, então M tem curvatura total finita.

Plano Hiperbólico \mathbb{H}^2

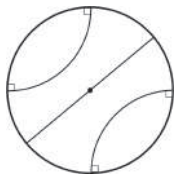
Plano Hiperbólico \mathbb{H}^2

1. Modelo de Poincaré: $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}^2(1)$, $g = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$.

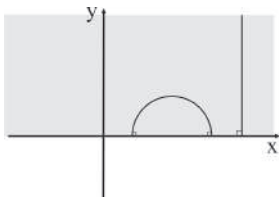


Plano Hiperbólico \mathbb{H}^2

1. Modelo de Poincaré: $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}^2(1)$, $g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$.

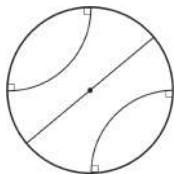


2. Modelo do Semi-plano: $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : y > 0\}$, $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.

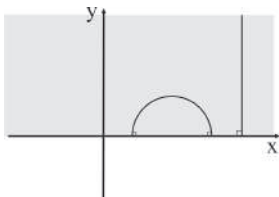


Plano Hiperbólico \mathbb{H}^2

1. Modelo de Poincaré: $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}^2(1)$, $g = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$.



2. Modelo do Semi-plano: $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) : y > 0\}$, $g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$.



$$(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, g = g_{\mathbb{H}^2} + dt^2)$$

Pergunta (~ 1984):

O **Helicóide** é a única superfície mínima mergulhada **simplesmente conexa** diferente do plano em \mathbb{R}^3 ?

Pergunta (~ 1984):

O **Helicóide** é a única superfície mínima mergulhada **simplesmente conexa** diferente do plano em \mathbb{R}^3 ?

Simplesmente conexa: *Toda curva fechada pode ser contraída a um ponto na superfície.*

Pergunta (~ 1984):

O **Helicóide** é a única superfície mínima mergulhada **simplesmente conexa** diferente do plano em \mathbb{R}^3 ?

Simplesmente conexa: *Toda curva fechada pode ser contraída a um ponto na superfície.*

Rosenberg-Meeks (2005): Sim!

Pergunta (~ 1984):

O **Helicóide** é a única superfície mínima mergulhada **simplesmente conexa** diferente do plano em \mathbb{R}^3 ?

Simplesmente conexa: *Toda curva fechada pode ser contraída a um ponto na superfície.*

Rosenberg-Meeks (2005): Sim!

M. (2013): Em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ podemos “perturbar” o helicóide.

Superfícies Mínimas com Bordo Livre

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$).

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$). Dizemos que M é uma *superfície mínima com bordo livre* em \mathbb{B}^3 se

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$). Dizemos que M é uma *superfície mínima com bordo livre* em \mathbb{B}^3 se

(i) M é uma superfície mínima (i.e., $\vec{H} = 0$);

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$). Dizemos que M é uma *superfície mínima com bordo livre* em \mathbb{B}^3 se

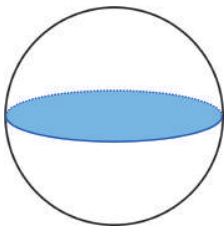
- (i) M é uma superfície mínima (i.e., $\vec{H} = 0$);
- (ii) M encontra $S^2 = \partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente ao longo de ∂M (i.e., $\nu \perp S^2$).

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$). Dizemos que M é uma *superfície mínima com bordo livre* em \mathbb{B}^3 se

- (i) M é uma superfície mínima (i.e., $\vec{H} = 0$);
- (ii) M encontra $S^2 = \partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente ao longo de ∂M (i.e., $\nu \perp S^2$).



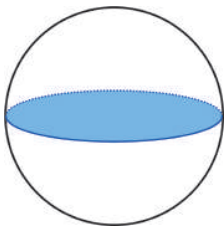
Disco Equatorial

Superfícies Mínimas com Bordo Livre em \mathbb{B}^3

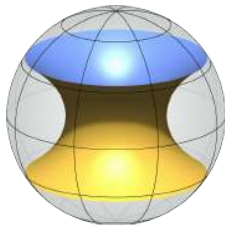
$$\mathbb{B}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq 1\}$$

Definição: Seja M uma superfície compacta propriamente imersa em \mathbb{B}^3 (i.e., $M \cup \partial\mathbb{B}^3 = \partial M$). Dizemos que M é uma *superfície mínima com bordo livre* em \mathbb{B}^3 se

- (i) M é uma superfície mínima (i.e., $\vec{H} = 0$);
- (ii) M encontra $\mathbb{S}^2 = \partial\mathbb{B}^3$ ortogonalmente ao longo de ∂M (i.e., $\nu \perp \mathbb{S}^2$).



Disco Equatorial

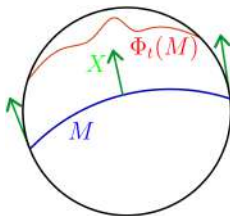


Catenóide Crítico

Pontos Críticos para o Funcional Área com Bordo Livre

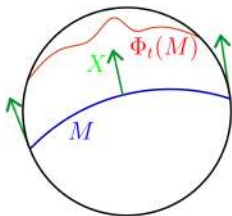
Pontos Críticos para o Funcional Área com Bordo Livre

- Seja $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{B}^3$ uma família a um parâmetro de imersões para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\Phi_t(\partial M) \subset \mathbb{S}^2$.
- Denote $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ($X|_{\partial M}$ é tangente a \mathbb{S}^2).



Pontos Críticos para o Funcional Área com Bordo Livre

- Seja $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{B}^3$ uma família a um parâmetro de imersões para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\Phi_t(\partial M) \subset \mathbb{S}^2$.
- Denote $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ($X|_{\partial M}$ é tangente a \mathbb{S}^2).

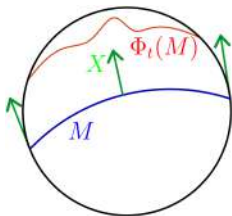


A primeira fórmula da variação nos diz que:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Area}(\Phi_t(M)) = - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \langle \nu, X \rangle ds.$$

Pontos Críticos para o Funcional Área com Bordo Livre

- Seja $\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{B}^3$ uma família a um parâmetro de imersões para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $\Phi_t(\partial M) \subset \mathbb{S}^2$.
- Denote $X = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ($X|_{\partial M}$ é tangente a \mathbb{S}^2).



A primeira fórmula da variação nos diz que:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Area}(\Phi_t(M)) = - \int_M \langle \vec{H}, X \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \langle \nu, X \rangle ds.$$

Ponto Crítico $\iff \vec{H} = 0$ e $\nu \perp \mathbb{S}^2$.

Outra Caracterização

Outra Caracterização

(i) $M \subset \mathbb{R}^3$ é mínima \iff as funções coordenadas x_j de \mathbb{R}^3 são *funções harmônicas* em M .

Outra Caracterização

(i) $M \subset \mathbb{R}^3$ é mínima \iff as funções coordenadas x_i de \mathbb{R}^3 são *funções harmônicas* em M .

(ii) $\nu \perp \mathbb{S}^2 \iff \frac{\partial x_i}{\partial \nu} = x_i, i = 1, 2, 3.$

Outra Caracterização

(i) $M \subset \mathbb{R}^3$ é mínima \iff as funções coordenadas x_i de \mathbb{R}^3 são *funções harmônicas* em M .

(ii) $\nu \perp \mathbb{S}^2 \iff \frac{\partial x_i}{\partial \nu} = x_i, i = 1, 2, 3.$

Teorema: Seja $M \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície com $\partial M \subset \mathbb{S}^2$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) M é uma superfície mínima de bordo livre (i.e., $\vec{H} = 0$ e $\nu \perp \mathbb{S}^2$).

(2) M é um ponto crítico do funcional área com a condição de bordo livre.

(3) As funções coordenadas x_i de \mathbb{R}^3 são funções harmônicas em M e satisfazem $\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = x_i$ ao longo do bordo ∂M .

Outra Caracterização

(i) $M \subset \mathbb{R}^3$ é mínima \iff as funções coordenadas x_i de \mathbb{R}^3 são *funções harmônicas* em M .

(ii) $\nu \perp \mathbb{S}^2 \iff \frac{\partial x_i}{\partial \nu} = x_i, i = 1, 2, 3.$

Teorema: Seja $M \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície com $\partial M \subset \mathbb{S}^2$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) M é uma superfície mínima de bordo livre (i.e., $\vec{H} = 0$ e $\nu \perp \mathbb{S}^2$).

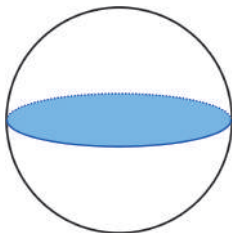
(2) M é um ponto crítico do funcional área com a condição de bordo livre.

(3) As funções coordenadas x_i de \mathbb{R}^3 são funções harmônicas em M e satisfazem $\frac{\partial x_i}{\partial \nu} = x_i$ ao longo do bordo ∂M .

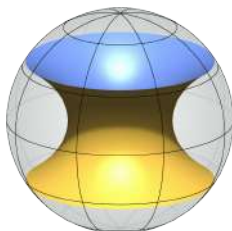
(As funções coordenadas são autofunções de Steklov com autovalor 1)

Exemplos

Exemplos



Disco Equatorial



Catenóide Crítico

Problemas de Unicidade

Problemas de Unicidade

Teorema (Nitsche, 1985)

Os únicos discos mínimos de bordo livre em \mathbb{B}^3 são os discos equatoriais.

Problemas de Unicidade

Teorema (Nitsche, 1985)

Os únicos discos mínimos de bordo livre em \mathbb{B}^3 são os discos equatoriais.

Conjectura (Fraser-Li, 2012)

O catenóide crítico é o único anel mínimo mergulhado de bordo livre em \mathbb{B}^3 .

Problemas de Unicidade

Teorema (Nitsche, 1985)

Os únicos discos mínimos de bordo livre em \mathbb{B}^3 são os discos equatoriais.

Conjectura (Fraser-Li, 2012)

O catenóide crítico é o único anel mínimo mergulhado de bordo livre em \mathbb{B}^3 .

Teorema (Fernández-Mira-Hauswirth, 2023)

Há exemplos de anéis mínimos **imersos** de bordo livre em \mathbb{B}^3 .

Mais exemples

Mais exemplos

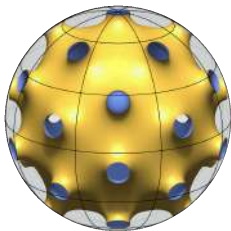
- Fraser-Schoen (2012)

Exemplos com gênero zero e $k \geq 3$ componentes de bordo.

Mais exemplos

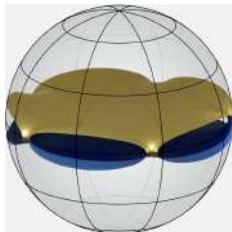
- Fraser-Schoen (2012)

Exemplos com gênero zero e $k \geq 3$ componentes de bordo.

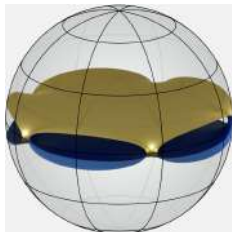


- Folha-Pacard-Zolotareva (2017)
 - Exemplos com *gênero zero* e um número grande de componentes no bordo.

- Folha-Pacard-Zolotareva (2017)
 - Exemplos com *gênero zero* e um número grande de componentes no bordo.



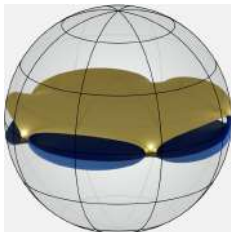
- Folha-Pacard-Zolotareva (2017)
 - Exemplos com *gênero zero* e um número grande de componentes no bordo.



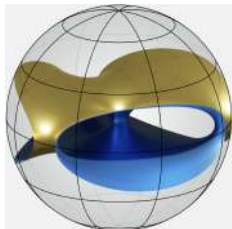
- Exemplos com *gênero um* e um número grande de componentes no bordo.

- Folha-Pacard-Zolotareva (2017)

- Exemplos com *gênero zero* e um número grande de componentes no bordo.

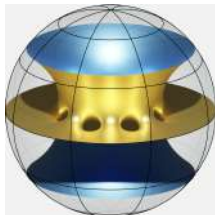


- Exemplos com *gênero um* e um número grande de componentes no bordo.

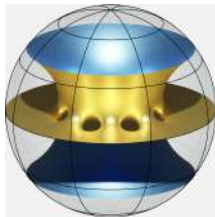


- Ketover (2016) e Kapouleas-Li (2017)
Exemplos com três componentes no bordo e gênero grande.

- Ketover (2016) e Kapouleas-Li (2017)
Exemplos com três componentes no bordo e gênero grande.

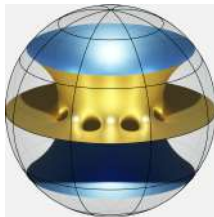


- Ketover (2016) e Kapouleas-Li (2017)
Exemplos com três componentes no bordo e gênero grande.

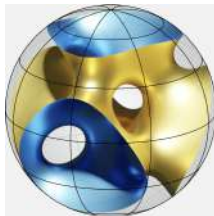


- Ketover (2016)
Exemplos com simetrias de sólidos platônicos (cubo, tetraedro e dodecahedro)

- Ketover (2016) e Kapouleas-Li (2017)
Exemplos com três componentes no bordo e gênero grande.



- Ketover (2016)
Exemplos com simetrias de sólidos platônicos (cubo, tetraedro e dodecahedro)

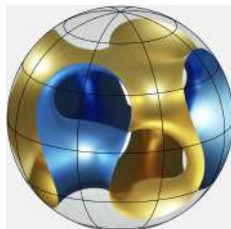


- Kapouleas-Wyigul (2017) e Carlotto-Franz-Schulz (2020)
Exemplos com qualquer gênero e uma componente no bordo.

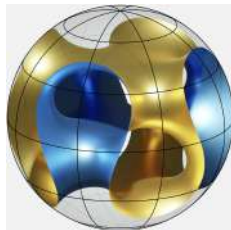
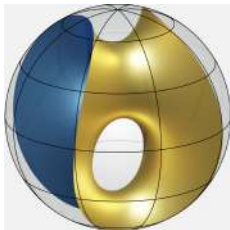
- Kapouleas-Wyigul (2017) e Carlotto-Franz-Schulz (2020)
Exemplos com qualquer gênero e uma componente no bordo.



- Kapouleas-Wyigul (2017) e Carlotto-Franz-Schulz (2020)
Exemplos com qualquer gênero e uma componente no bordo.



- Kapouleas-Wyigul (2017) e Carlotto-Franz-Schulz (2020)
Exemplos com qualquer gênero e uma componente no bordo.



Figuras feitas por Mario Schulz.

A Propriedade Dois-Pedaços

A Propriedade Dois-Pedaços

Teorema (Lima-M., 2023)

Seja M uma superfície mínima mergulhada de bordo livre em \mathbb{B}^3 .
Então dado qualquer disco equatorial D , ou $M = D$ ou D divide M
em exatamente duas componentes.

Obrigada por sua atenção.