PÔSTER

Grupos de Isotopia e Espaços de Moduli de Superfícies de Riemann

Costa, Sidnei Furtado[1]

Resumo: *Neste trabalho apresentaremos as ideias principais sobre os Grupos de Isotopia e os Espaços de Moduli de superfícies de Riemann, e como eles conectam Álgebra, Geometria e Topologia. O grupo de isotopia* $Mod(S)$ *de uma superfície de Riemann* S*, é o grupo das classes de isotopia de homeomorfismos de* S *que preservam orientação. O espaço de moduli* $\mathcal{M}(S)$ *das superfícies de Riemann homeomorfas a* S *é um objeto extremamente importante em matemática e é possível descrever boa parte de suas caracteristicas topológicas usando o grupo de isotopia de* S*. Mostraremos os detalhes da relação entre a estrutura algébrica de* $Mod(S)$ *e a topologia de* $\mathcal{M}(S)$*, examinaremos exemplos concretos, resultados importantes e possíveis aplicações dessa teoria.*

Palavras-chave: *moduli, superfície, isotopia, teichmüller.*

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a relação entre o grupo de isotopia e o espaço de moduli das estruturas geométricas de uma superfície de Riemann. Inicialmente, são introduzidos os conceitos essenciais e alguns resultados fundamentais sobre superfícies de Riemann. Em seguida, discutimos sobre espaços de moduli e espaços de isotopia, com a apresentação de exemplos, alguns resultados importantes e a relação entre esses dois espaços.

2 Superfícies de Riemann

Uma superfície de Riemann S é uma variedade complexa de dimensão um, ou seja, S vem equipada com um atlas de cartas para $\mathbb{C}$ com mapas de transição biholomorfos, i.e., os mapas de transição são holomorfos com inversas holomorfas.

[1]Universidade do Estado de Santa Catarina.

O teorema a seguir apresenta uma importante relação entre a geometria e a topologia de uma superfície de Riemann.

Teorema. Seja S uma superfície de Riemann. If $\chi(S) < 0$, então S admite uma métrica hiperbólica. Se $\chi(S) = 0$, então S admite uma métrica euclidiana.

3 Espaços de Moduli e Grupos de Isotopia

Espaços de moduli são espaços que representam coleções de objetos matemáticos com certas propriedades ou características em comum. O termo *moduli* foi introduzido por Riemann in 1857.

Vejamos alguns exemplos de espaços de moduli:

- O espaço de moduli de todos os conjuntos finitos, a menos de bijeção, é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais;
- o espaço projetivo real de dimensão um é o espaço de moduli das retas em $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem.
- o espaço de moduli de todas as retas em $\mathbb{R}^2$ é uma fita de Mobius.
- O espaço de moduli de todos os triângulos no plano $\mathbb{R}^2$, a menos de semelhança, é um triângulo.

Uma das principais características dos espaços de moduli de um espaço X é que pontos próximos no espaço de moduli devem corresponder a objetos geométricos próximos em X.

Um dos exemplos mais famosos de espaços de moduli é o espaço das superfícies de Riemann compactas de gênero $g \geq 1$. É possível definir uma relação de equivalência no conjunto S_g de todas as superfícies de Riemann compactas de gênero g da seguinte forma: duas superfícies de Riemann em S_g são equivalentes se existir um mapa biholomorfo entre elas. O conjunto S_g por essa relação de equivalência é o espaço de moduli de tais superfícies de Riemann [1]. Esse espaço é denotado por $\mathcal{M}(S_g)$.

Um dos resultados mais relevantes a respeito do espaço $\mathcal{M}(S_g)$ é o seguinte

Teorema: Para $g \geq 1$, o espaço $\mathcal{M}(S_g)$ é um orbifold cujo recobrimento universal é contrátil.

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [2].

Seja S uma superfície de Riemann. Uma *isotopia* entre dois homeomorfismos $f, g : S \to S$ é uma homotopia $h : S \times I \to S$ tal que para todo $t \in I$, a aplicação $x \mapsto h(x,t)$ é um homeomorfismo de S. Quando uma tal isotopia existe, dizemos que f e g são isotópicas. O grupo de isotopia de S, denotado por $\mathrm{Mod}(S)$ é o conjunto de todas as classes de isotopia de homeorfismos de S que preservam orientação com a operação induzida pela composição de homeomorfismos. Se $\mathrm{Hom}^+(S)$ é o grupo dos homeomorfismos de S que preservam orientação e $\mathrm{Hom}_0(S)$ é o subgrupo de tais homeomorfismos que são isotópicos à identidade, é fácil ver que $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Hom}^+(S)/\mathrm{Hom}_0(S)$ [2, 3].

Vejamos alguns exemplos de grupos de isotopia:

- o grupo de isotopia do disco aberto no plano é trivial.
- o grupo de isotopia do toro é o grupo modular $SL(2,\mathbb{Z})$.
- o grupo de isotopia da esfera é trivial.

O espaço de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ de uma superfície de Riemann S com $\chi(S) < 0$, é o conjunto $\mathcal{H}(S)$ das estruturas hiperbólicas em S a menos de isotopia, ou seja,

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{H}(S)/\mathrm{Hom}_0(S).$$

A ação de $\mathrm{Hom}^+(S)$ em $\mathcal{H}(S)$ induz uma ação de $\mathrm{Mod}(S)$ em $\mathcal{T}(S)$. A aplicação quociente de $\mathcal{T}(S)$ para $\mathcal{M}(S)$, induz uma bijeção

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)/\mathrm{Mod}(S)$$

Os detalhes sobre deste fato podem ser encontrados em [4].

4 CONCLUSÕES

Este trabalho explorou as relações entre o grupo de isotopia e o espaço de moduli de uma superfície de Riemann. Observamos que existe uma estreita relação entre a estrutura algébrica do grupo de isotopia $\mathrm{Mod}(S)$ e a topologia do espaço de moduli $\mathcal{M}(S)$. Essa abordagem oferece perspectivas úteis para futuras investigações e aplicações em geometria e topologia.

Bibliografia

[1] JI, L., **The story of Riemanns moduli space**, ICCM Not. 3 (2015), no. 2.

[2] FARB, B., MARGALIT, D., **A Primer on Mapping Class Groups**,‘ Princeton University Press, 2012

[3] LIMA, E. L., **Grupos de Isotopia**, Gazeta, No 66, pág. 2, 1966

[4] RATCLIFFE, J. G., **Foundations of Hyperbolic Manifolds**, Springer Cham, 2019