X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

MINICURSO

Uma Introdução de Bolso de Jogos Topológicos

Andrade Lara, Dione[1]

Resumo:*Neste mini-curso veremos algumas propriedades topológicas através de outra abordagem conhecida como jogos topológicos. Esta técnica, além de representar propriedades topológicas, em alguns contextos serve como generalização de propriedades.*

No primeiro dia, vamos rever algumas propriedades básicas de espaços topológicos, e no segundo dia, daremos alguns exemplos de jogos topológicos básicos, e algumas aplicações.

Palavras-chave:*Jogos topológicos, Menger, Oxtobi, Rothberger, Topologia.*

1 Um pouco de topologia

Definição 1.1 *Dizemos que* (X, τ) *é um espaço topológico se* X *é um conjunto e* $\tau \subset \wp(X)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $X, \emptyset \in \tau$.
2. *Se* $A, B \in \tau$ *então* $A \cap B \in \tau$.
3. *Se* $\mathcal{A} \subset \tau$ *então* $\bigcup \mathcal{A} \in \tau$.[2]

Os elementos de τ *são chamados de* ***abertos***. *E chamamos* τ *de* ***topologia***.

Alguns problemas envolvendo topologias são um tanto quanto complicados usando esta definição. A fim de simplificar um pouco vamos definir uma base para uma topologia.

[1]ICTIN - UFLA

[2]A união de qualquer quantidade de elementos de τ pertence a τ.

Definição 1.2 *Seja (X,τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{B} \subset \wp(X)$ é uma **base** para (X,τ) se para cada $x \in X$ e $\forall A \in \tau$ com $x \in A$ $\exists B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$.*

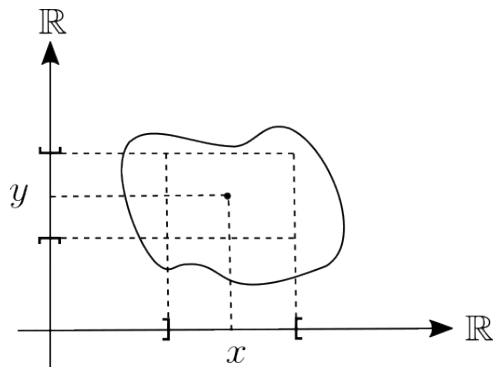
Note que se unirmos os elementos da base obteremos uma topologia. De fato, se $A \in \tau$ $\forall A \in \tau$ com $x \in A$ $\exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$ so $A = \bigcup_{x \in A} B_x$.

Exemplo 1.1 *Considere a reta real $\mathbb{R}$ e $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0$ tal que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A\}$. O espaço topológico $(\mathbb{R},\tau)$ é conhecido "topologia usual para $\mathbb{R}$". E o conjunto $\mathcal{B} = \{]a,b[: a,b \in \mathbb{R}\}$ é uma base para a topologia usual em $\mathbb{R}$.*

Seja $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0$ tal que $[x, x+\varepsilon[\subset A\}$. O espaço topológico $(\mathbb{R},\sigma)$ é conhecido como "reta de Sorgenfrey"[3].

Seja (X,τ) um espaço topológico. E seja $Y \subset X$ então podemos definir a **topologia do subespaço** em Y dada por (Y,ρ) onde $\rho = \{A \cap Y : A \in \tau\}$.

Definição 1.3 *Seja (X,τ) e (Y,σ) espaços topológicos. Considere $X \times Y$ e defina $\rho = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X \times Y : \forall (x,y) \in U \exists A \in \tau, \exists B \in \sigma$ tal que $x \in A, y \in B$ e $(x,y) \in A \times B \subset U\}$. Dizemos que $(X \times Y, \rho)$ é a **topologia produto** em $X \times Y$. Note que $\mathcal{B} = \{A \times B : A \in \tau, B \in \sigma\}$ forma uma base para ρ.*



Definição 1.4 *Seja (X,τ) um espaço topológico, dizemos que $\mathcal{S} \subset \tau$ é uma **sub-base** para τ se a intersecção de finitos elementos de $\mathcal{S}$ forma uma base para τ.*

Exemplo 1.2 *Ainda em $X \times Y$ considere $p_1 : X \times Y \to X$ como $p_1(x,y) = x$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ como $p_2(x,y) = y$ então $\mathcal{S} = \{p_1^{-1}[A] : A \in \tau\} \cup \{p_2^{-1}[B] : B \in \rho\}$ forma uma sub-base para a topologia produto em $X \times Y$.*

Como podemos intuir sobre "produtos cartesianos infinitos"?

Definição 1.5 *Seja $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços topológicos. Definimos o produto como $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : A \to \bigcup_{x \in A} X_\alpha : x(\alpha) \in X_\alpha\}$. Podemos enxergar a sequência de elementos do produto $(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots) \in X$ como uma função $x : A \to \bigcup_{x \in A} X_\alpha$ dado por $x(\alpha_1) = x_{\alpha_1}, x(\alpha_2) = x_{\alpha_2}, x(\alpha_3) = x_{\alpha_3}, \ldots$ Uma base para a topologia produto em X é dada por $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in A} V_\alpha : V_\alpha$ é aberto, se $\alpha \in F, F \subset A$ finito, caso contrário $V_\alpha = X_\alpha\}$.*

[3] Ou topologia do limite inferior.

Vamos fixar algumas notações. Daqui em diante vamos denotar $\mathbb{N}$ por ω que representa o primeiro ordinal infinito[4]. Defina X^Y como o conjunto de todas as funções $f : Y \to X$ podemos ver X^Y também como $X \times X \times X \times \cdots$ ($|Y|$ vezes). Daí $\omega^\omega = \{f; f : \omega \to \omega\}$. Se considerarmos $n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ podemos definir $2^\omega = \{f; f : \omega \to 2 = \{0, 1\}\}$ e $\omega^n = \{f; f : n = \{0, ..., n-1\} \to \omega\}$. Seja $X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} X^n$ o conjunto dado pelas funções finitas $f : n \to X$, com $n \in \omega$.

Proposição 1.1 *Seja $s \in 2^n$ para $n \in \omega$ e defina $[s] = \{f \in 2^\omega : s \subset f\}$ (f estende s). Então $\{[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ é uma base para a topologia produto em 2^ω.*

Demonstração. Seja $f \in 2^\omega$ e V um aberto básico tal que $f \in V$. Note que $V = \prod_{n\in\omega} V_n$ onde $V_n = \{0\}$ ou $V_n = \{1\}$ para $n \in \{n_1, ..., n_k\}$ e $V_n = 2$ para $n \notin \{n_1, ..., n_k\}$. Sem perda de generalidade, suponha que $n_1 < \cdots < n_k$ e defina $s : n_k \to 2$ com $s(m) = f|_{s_k}(m)$. Portanto $f \in [s] \subset V$.

Existe uma outra maneira de definir a topologia produto em X.

Definição 1.6 *Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$ em que cada (Y_α, τ_α) é um espaço topológico. Chamamos de **topologia fraca** induzida (no sentido de induzir uma sub-base) por $f_\alpha^{-1}[V]$, $\alpha \in A$ e $V \in \tau_\alpha$.*

Se considerarmos a topologia fraca como uma sub-base podemos gerar a topologia produto.

Definição 1.7 *Seja (X, τ) um espaço topológico. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura** em X se $\bigcup \mathcal{A} = X$. Se os elementos de $\mathcal{A}$ são abertos dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **cobertura aberta**.*

Definição 1.8 *Um espaço topológico (X, τ) é dito ser **compacto** se dada uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ então existe uma sub-cobertura finita, ou seja $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ ($|\mathcal{A}| < \omega$) tal que $\bigcup \mathcal{A}' = X$.*

Exemplo 1.3 *Um exemplo de espaços compactos na reta são os intervalos fechados $[a, b]$. Espaços finitos também são compactos.*

Teorema 1.1 (Teorema de Tychonoff) *O produto qualquer de espaços compactos é compacto com respeito a topologia produto.*

Definição 1.9 *seja (X, τ) um espaço topológico. $F \subset X$ é um **fechado** se $X \setminus F$ é aberto.*

Definição 1.10 *Seja (X, τ) um espaço topológico. A coleção $\mathcal{C} \subset X$ possui a **propriedade da intersecção finita** (p.i.f.) se todo subconjunto finito $C \subset \mathcal{C}$ possui intersecção não vazia $\bigcap C \neq \emptyset$.*

[4] 0 é um número natural! Nunca se esqueça disso!

Proposição 1.2 *Seja (X, τ) um espaço topológico. X é compacto se, e somente, se a coleção de todos os conjuntos fechados com p.i.f. $\mathcal{C}$ em X implica que $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Demonstração. *Seja $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ tal que $\mathcal{C} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{A}\}$. Observe que:*

1. *$\mathcal{A}$ é uma coleção de abertos se, e somente, se $\mathcal{C}$ é uma coleção de fechados.*
2. *$\mathcal{A}$ cobre X se, e somente, se $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$, como $\bigcap \mathcal{C} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (X \setminus A) = X \setminus (\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A) = X \setminus X = \emptyset$.*
3. *O conjunto $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{A}$ é uma subcobertura se, e somente, se $\bigcap_{i=1}^{n} (X \setminus A_i) = \emptyset$.*

X é compact se:

Dada uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ existe uma sub-cobertura finita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}' = X$.

Dada uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ se toda sub-cobertura finita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ tal que $\bigcup \mathcal{A}' \neq X$ implica que $\mathcal{A}$ não cobre X.

Dada qualquer coleção de fechados $\mathcal{C}$ de X se X possui p.i.f. então $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Definição 1.11 *Um espaço topológico X é um **espaço de Lindelöf** se satisfaz a seguinte propriedade: Toda cobertura possui uma sub-cobertura enumerável.*

Exemplo 1.4 *Todo compacto é Lindelöf. A reta real é de Lindelöf mas não é compacta.*

Definição 1.12 *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $A \subset X$. Definimos o **fecho** de A como $\overline{A} = \bigcap \{F \subset X : F$ F é fechado e $A \subset F\}$. Essa definição é equivalente a seguinte afirmação: $\forall x \in A$ e para todo aberto U tal que $x \in U$ implica que $U \cap A \neq \emptyset$.*

Definição 1.13 *X é um espaço **separável** se existe um subconjunto enumerável $D \subset X$ e **denso** em X, i.e, $\overline{D} = X$ ($\overline{D} = X$ é o mesmo em dizer que para todo aberto não vazio U teremo $U \cap D \neq \emptyset$.).*

Alguns axiomas de separação:

T_2 (Hausdorff): Para quaisquer $x, y \in X$ existem A, B abertos tais que $x \in A, y \in B$ com $A \cap B = \emptyset$.

T_3 (Regular): Para cada $x \in X$ e cada conjunto fechado $F \subset X$ tal que $x \notin F$ existem A, B abertos tais que $x \in A, F \subset B$ com $A \cap B = \emptyset$.

Proposição 1.3 *(X, τ) é um espaço regular se, e somente, se para todo $x \in X$ e para todos os abertos V tal que $x \in V$ existe um aberto A tal que $x \in A \subset \overline{A} \subset V$.*

Proposição 1.4 *Se (X, τ) é um espaço compacto Hausdorff então X é regular também.*

Teorema 1.2 (Teorema de Baire) *A intersecção de uma coleção enumerável de abertos densos ainda é densa em um espaço compacto Hausdorff.*

Demonstração. *Seja* $(A_n)_{n\in\omega}$ *uma família de abertos densos e* $V \neq \emptyset$ *um aberto. Vamos mostrar que* $V \cap (\bigcap_{n\in\omega} A_n) \neq \emptyset$.

Vamos começar tomando um aberto denso A_0 *então* $A_0 \cap V$ *é um aberto não vazio, então existe um* $x_0 \in A_0 \cap V$ *(*X *é regular) existe um conjunto* $V_0 \subset X$ *com* $x_0 \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset A_0 \cap V$. *Agora, repetimos o procedimento com* A_1 *e* V_0. *No passo* $n+1$ *faremos o mesmo com* A_{n+1} *e* V_n. *Então, existe um* $x_{n+1} \in A_{n+1} \cap V_n$ *(*X *é regular) existe um aberto* $V_{n+1} \subset X$ *com* $x_{n+1} \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}} \subset A_{n+1} \cap V_n$. *Continuamos para* $n \in \omega$.

Note que a coleção $(\overline{V_n})_{n\in\omega}$ *possui p.i.f. e* X *é compacto, então* $\bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n} \neq \emptyset$. *logo, existe um* $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{V_n}$ *(*$\overline{V_n} \subset A_n$*) então* $x \in A_n$ *para qualquer* $n \in \omega$, *assim* $x \in V \cap (\bigcap_{n\in\omega} A_n)$.

Definição 1.14 *Chamamos* (X, τ) *de* ***espaço de Baire*** *se toda intersecção de enumeráveis abertos densos é densa em* X.

2 Exemplos de jogos topológicos

Para os exemplos de jogos topológicos que apresentaremos, considere dois jogadores, que indicaremos como Jogador I e Jogador II. O nosso "tabuleiro" será um espaço topológico (X, τ) e o Jogador I e II poderão jogar (dependendo do jogo) pontos, abertos, coberturas abertas etc. Os jogos topológicos que iremos abordar terão uma quantidade infinita enumerável de rodadas[5]. Depois de todas as rodadas existe uma regra que determina quem vence.

Nestes jogos, definimos o conceito de estratégia[6]. De maneira intuitiva, uma estratégia para o Jogador I é um conjunto de respostas para as jogadas do Jogador II (de maneira análoga definimos estratégia para o Jogador II). Se a estratégia garante a vitória no jogo dizemos que é uma estratégia vencedora. Considere o jogo arbitrário G e vamos usar a notação I $\uparrow G$ para representar "Jogador I possui estratégia vencedora em G" (assim como II $\uparrow G$ representa "Jogador II possui estratégia vencedora em G") e a notação I $\not\uparrow G$ representa que "Jogador I não possui estratégia vencedora em G (de maneira similar II $\not\uparrow G$ representa "Jogador II não possui uma estratégia vencedora em G").

2.1 Jogo de Baker

Seja $S \subset [0,1]$ e considere o seguinte jogo: O Jogador I escolhe $a_1 \in]0,1[$ e o Jogador II responde com $b_1 \in]a_1, 1[$, o Jogador I responde com $a_2 \in]a_1, b_1[$, e II joga $b_2 \in]a_2, b_1[$, e assim por diante. Na n-ésima rodada o Jogador I joga $a_n \in]a_{n-1}, b_{n-1}[$ e II responde com $b_n \in]a_n, b_{n-1}[$. Observe que $(a_n)_{n\in\omega}$ é uma sequência crescente e limitada, então $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, vamos chamá-lo de α. Dizemos que o Jogador I vence se $\alpha \in S$, caso contrário II vence.

[5]Existem jogos com uma quantidade não enumerável de rodadas

[6]Fique a vontade para dizer "estratégia" em diversos idiomas.

Proposição 2.1 *Se S é enumerável, então o Jogador II possui estratégia vencedora.*

Demonstração. *Tome a seguinte enumeração para $S = \{s_1, s_2, s_3, ...\}$. Considere a seguinte estratégia para o Jogador II: na n-ésima rodada com $n \geq 1$ II joga $b_n = s_n$ se for uma jogada válida, caso contrário II escolhe qualquer número para b_n. (Outra alternativa de jogada para II seria escolher o mínimo de S maior que a última jogada de I se possível, caso contrário II escolhe qualquer ponto que configure uma jogada válida). Por $\alpha < b_n$ para todo $n > 1$ segue que $\alpha \neq b_n$ para todo $n > 1$, e portanto $\alpha \notin S$.*

Note que, se $S = [0, 1]$, então não importa as jogadas feitas que o Jogador I sempre vence. Portanto podemos concluir que:

Corolário 2.1 *O intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ é não enumerável.*

2.2 Jogo de Banach-Mazur

Jogo de Banach-Mazur $BM(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio. Vamos definir o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga um aberto não vazio A_0 e o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$. Na próxima rodada, o Jogador I joga, novamente, um aberto não vazio $A_1 \subset B_0$ e o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_1 \subset A_1$. E assim por diante. Depois de terminar a partida teremos $A_0 \supset B_0 \supset A_0 \supset B_0 \supset \cdots$. O Jogador II vence no jogo de Banach-Mazur se $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} B_n \neq \emptyset$.

Exemplo 2.1 *Observe que o jogador II vence em $BM(\mathbb{R})$ e $BM(\mathbb{N})$ e o Jogador I vence em $BM(\mathbb{Q})$. Para verificar que I vence em $BM(\mathbb{Q})$ considere o seguinte jogo: O jogador I começa jogando $A_0 = \mathbb{Q}$ e II escolhe $B_0 \subset A_0$ Então, o Jogador I responde com $A_1 = B_0 \setminus \{x_0\}$ com $x_0 \in B_0$. Na $n + 1$-ésima rodada, o Jogador I responde $A_{n+1} = B_n \setminus \{x_n\}$ com $x_n \in B_n$. Então $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} B_n = \emptyset$.*

O jogo de Banach-Mazur nos proporciona uma outra maneira de enxergarmos um espaço de Baire.

Teorema 2.1 (Teorema de Oxtoby) *O espaço X é de Baire se, e somente, se o Jogador I não possui uma estratégia vencedora.*

Demonstração. *Suponha que X não é de Baire e vamos mostrar que o Jogador I possui estratégia vencedora. Então, existe um conjunto não vazio $A_0 \subset X$ e uma família de abertos densos $(G_n)_{n\in\omega}$ em X tal que $A_0 \cap (\bigcap_{n\in\omega} G_n) = \emptyset$. O primeiro movimento do Jogador I é A_0 então o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$, note que $B_0 \cap G_0 \neq \emptyset$ (já que G_0 é denso em X). Na próxima rodada o Jogador I joga $A_1 = (B_0 \cap G_0) \subset B_0$ e o Jogador II escolhe $B_1 \subset A_1$, novamente $B_1 \cap G_1 \neq \emptyset$ (gracas à G_1 ser denso em X). E o Jogador I continua seguindo esse procedimento. Assim, $\bigcap_{n\in\omega} A_n = A_0 \cap ((\bigcap_{n\in\omega} B_n) \cap G_n) \subset A_0 \cap (\bigcap_{n\in\omega} G_n) = \emptyset$.*

Para demonstrar a implicação contrária, suponha que o Jogador I possui uma estratégia vencedora e vamos mostrar que X não é um espaço de Baire. Seja A_0 o primeiro *movimento do Jogador I (de acordo com a sua estratégia vencedora) vamos mostrar que A_0 não é de Baire (ser Baire é uma propriedade hereditária para abertos). Seja $(B^0_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_0}$ a coleção maximal de abertos ão vazios dois a dois disjuntos tais que $B^0_\lambda \subset A_0$. Considere o conjunto T_0 dado por todas as possíveis respostas do Jogador I duas a duas disjuntas dentro de cada B^0_λ para cada $\lambda \in \Lambda_0$. Seja $W_0 = \bigcup T_0$. Agora, seja $(B^1_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$ uma coleção maximal de abertos não vazios dois a dois disjuntos tais que $B^0_\lambda \subset W_0$. Considere T_1 o conjunto dado por todas as respostas possíveis duas a duas disjuntas feitas pelo Jogador I dentro de cada B^1_λ para cada $\lambda \in \Lambda_1$. Seja $W_1 = \bigcup T_1$. E assim por diante. Depois dessas construções teremos a coleção $(W_n)_{n\in\omega}$ onde cada W_n é denso em A_0.*

Afirmamos que $\bigcap_{n\in\omega} W_n = \emptyset$. Suponha que exista $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_n$, então existe uma única sequência $(A_0, B_0, A_1, B_1, ...)$ (uma partida completa) tal que $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \{x\}$ e isso contraria o fato do Jogador I possuir estratégia vencedora. Portanto, $A_0 \cap (\bigcap_{n\in\omega} W_n) = \emptyset$, logo A_0 não é de Baire e isso implica que X não é um espaço de Baire.

Proposição 2.2 *Se X é um espaço compacto Hausdorff então $II \uparrow BM(X)$.*

Demonstração. Um espaço compacto Hausdorff é um espaço regular. Basta encaixar fechados não vazios dentro das escolhas do Jogador II e usar Proposição 1.2.

Corolário 2.2 *Se X é localmente compacto e Hausdorff então $II \uparrow BM(X)$.*

2.3 Jogo de Rothberger

Jogo de Rothberger $R(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio e seja $\mathcal{O}$ o conjunto das coberturas abertas de X. Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um aberto $A_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n-ésima rodada, o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com $A_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence o Jogo de Rothberger se $\{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{O}$.

Definição 2.1 *Dizemos que X é um espaço de **Rothberger** se o Jogador I não possui estratégia vencedora em $R(X)$. Note que $II \uparrow R(X)$ implica que $I \not\uparrow R(X)$.*

Observe que:

- Se X não é de Lindelöf então I $\uparrow R(X)$. Basta que o Jogador I jogue somente a mesma cobertura.
- Se X é um espaço topológico enumerável então II $\uparrow R(X)$. Seja $X = \{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração dos elementos de X. O Jogador I começa jogando $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_0 \in \mathcal{C}_0$ com $x_0 \in A_0$. Na n-ésima rodada o Jogador I joga $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}_n$ com $x_0 \in A_0$. Então $\{A_n : n \in \omega\}$ cobre X e graças a isso o Jogador II vence.
- Se II $\uparrow R(X)$ então X é um espaço de Lindelöf. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X e suponha que o Jogador I joga a mesma cobertura $\mathcal{C}$ a cada jogada. Então, na n-ésima rodada o Jogador I joga $\mathcal{C}$ e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}$ então $\{A_n : n \in \omega\}$ é uma sub-cobertura enumerável de $\mathcal{C}$.

Apesar de todos os espaços em que II $\uparrow R(X)$ serem de Lindelöf existe um espaço compacto em que I $\uparrow R(X)$. À saber 2^ω.

Proposição 2.3 *2^ω é um espaço compacto, mas não é de Rothberger. Em outras palavras, o Jogador I possui uma estratégia vencedora.*

Demonstração. Pela compacidade de $2 = \{0,1\}$ e usando o Teorema de Tychonoff nós temos que 2^ω é um espaço compacto. Observe que $2^\omega = \{f; f : \omega \to 2\}$ e seja $F_{n,k} = \{f \in 2^\omega : f(n) = k\}$. O conjunto $F_{n,k}$ é um aberto básico (elemento de uma base) devido à $F_{n,k} = \prod_{m\in\omega} V_m$ onde $V_n = \{k\}$ e $V_m = 2$ para $m \neq n$. Considere a seguinte jogada feita pelo Jogador I: $\mathcal{C}_0 = \{F_{0,0}, F_{0,1}\}, \mathcal{C}_1 = \{F_{1,0}, F_{1,1}\}, \mathcal{C}_2 = \{F_{2,0}, F_{2,1}\}, ..., \mathcal{C}_n = \{F_{n,0}, F_{n,1}\}, ...$ Suponha que o Jogador II tenha jogado $\mathcal{C} = \{F_{0,j_0}, F_{1,j_1}, ..., F_{n,j_n}, ...\}$ com $j_n \in \{0,1\}$. Tome $f \in 2^\omega$ tal que $f(n) \neq j_n$ para todo $n \in \omega$ então $f \notin F_{n,j_n}$ para todo $n \in \omega$. Portanto, $\mathcal{C}$ não é uma cobertura aberta.

2.4 Jogo de Menger

Jogo de Menger $M(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio e seja $\mathcal{O}$ o conjunto das coberturas abertas em X. Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n-ésima rodada , o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence no Jogo de Menger se $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{O}$.

Definição 2.2 *Dizemos que X é um **espaço de Menger** se o Jogador I não possui uma estratégia vencedora em $M(X)$. Note que II $\uparrow M(X)$ implica que I $\not\uparrow M(X)$.*

Proposição 2.4 *Se X é um espaço de Rothberger então X é um espaço de Menger. Espaços de Menger são de Lindelöf também.*

Demonstração. É fácil ver que espaços de Rothberger implicam em espaços de Menger. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X. Suponha que o Jogador I joga $\mathcal{C}$ em cada rodada , então na n-ésima rodada o Jogador II toma $F_n \subset \mathcal{C}_n$, onde F_n é um subconjunto finito de $\mathcal{C}_n$. Pelo fato do Jogador II possuir estratégia vencedora em $R(X)$ segue que $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ é uma cobertura aberta para X.

Proposição 2.5 *Se X é um espaço compacto então II $\uparrow M(X)$, logo X é um espaço de Menger.*

Demonstração. Na primeira rodada o Jogador I joga $\mathcal{C} \in \mathcal{O}$ e o Jogador escolhe um subconjunto finito $F \subset \mathcal{C}$ que testemunha a compacidade de X.

Por essa última proposição, concluímos que se X é de Menger isso não implica que X seja um espaço de Rothberger. Por exemplo $X = 2^\omega$.

Proposição 2.6 *Existe um espaço de Lindelöf que não é de Menger. À saber, ω^ω.*

Demonstração. Note que ω^ω *é de Lindelöf pois possui uma base enumerável* [7]. *Seja* $\mathcal{B} = \{[s] : s \in \omega^{<\omega}\}$ *onde* $[s] = \{f \in \omega^\omega : s \subset f\}$ *forma uma base enumerável para* ω^ω. *Seja* $F_{n,k} = \{f \in \omega^\omega : f(n) = k\}$ *um aberto básico e considere as jogadas feitas pelo Jogador I:*

$$\mathcal{C}_0 = \{F_{0,0}, F_{0,1}, F_{0,2}, F_{0,3}, ...\}$$

$$\mathcal{C}_1 = \{F_{1,0}, F_{1,1}, F_{1,2}, F_{1,3}, ...\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{C}_n = \{F_{n,0}, F_{n,1}, F_{n,2}, F_{n,3}, ...\}$$

$$\vdots$$

Tome $f \in \omega^\omega$ *tal que* $f(n) = k$ *onde* $F_{n,k}$ *não pertence a coleção jogada pelo Jogador II na* n*-ésima rodada. Portanto, os abertos jogados pelo Jogador II não contém* f.

Bibliografia

[1] AURICHI, L. F.; DIAS, R. R. **Topological games and alster spaces**. Canadian Mathematical Bulletin, 57(4), 2014.

[2] BAKER, M. H. **Uncountable Sets and an Infinite Real Number Game**. Mathematics Magazine, 80(5), 377-380, 2007.

[3] ENGELKING, R. **General topology**. Sigma series in pure mathematics., Heldermann Verlag, 1989.

[4] LARA, D. A. **Ordens Parciais e Aplicações**. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP São Carlos, 2012.

[7] Base enumerável implica Lindelöf.