Teoria espectral para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$ Grushin

Wanessa Ferreira Tavares
Marcus A. M. Marrocos

São Carlos, 01 de agosto de 2024.

Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira, T um $(0,2)$-tensor simétrico semidefinido positivo, isto é, $T_x(\xi, \xi) \leq \Lambda\|\xi\|^2$, $\forall\ x \in M, \xi \in T_xM, \Lambda \in \mathbb{R}_+$. Introduzimos o operador elíptico degenerado do tipo Grushin como

$$\mathscr{L}_{T,g} f = div_g(T\nabla f) \tag{1}$$

O problema de autovalor para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$ dado por

$$\begin{cases} -\mathscr{L}_{T,g}\phi & = \lambda\phi \quad em \ M \\ \phi & = 0 \quad sobre \quad \partial M \end{cases} \tag{2}$$

O problema de autovalor para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$

Este operador é mencionado em alguns artigos relacionados ao nosso trabalho, como:

- Gomes, José. N.V. ; Miranda, Juliana F.R. . Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, v. 176, p. 1-19, 2018.
- Cunha, C. L., Gomes, J. N., Marrocos, M. A. M.Hadamard type variation formulas for the eigenvalues of a class of second-order elliptic operators and its applications. arXiv:2306.06504 [math.DG], 2023.
- Lamberti, P. D.; Luzzini, P.; Musolino, P.:Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues. Jornal of Geometric Analysis, p. 10679-10717, 2021.

Este operador é mencionado em alguns artigos relacionados ao nosso trabalho, como:

- Gomes, José. N.V. ; Miranda, Juliana F.R. . Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, v. 176, p. 1-19, 2018.
- Cunha, C. L., Gomes, J. N., Marrocos, M. A. M.Hadamard type variation formulas for the eigenvalues of a class of second-order elliptic operators and its applications. arXiv:2306.06504 [math.DG], 2023.
- Lamberti, P. D.; Luzzini, P.; Musolino, P.:Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues. Jornal of Geometric Analysis, p. 10679-10717, 2021.

Este operador é mencionado em alguns artigos relacionados ao nosso trabalho, como:

- Gomes, José. N.V. ; Miranda, Juliana F.R. . Eigenvalue estimates for a class of elliptic differential operators in divergence form. Nonlinear Analysis-Theory Methods & Applications, v. 176, p. 1-19, 2018.
- Cunha, C. L., Gomes, J. N., Marrocos, M. A. M.Hadamard type variation formulas for the eigenvalues of a class of second-order elliptic operators and its applications. arXiv:2306.06504 [math.DG], 2023.
- Lamberti, P. D.; Luzzini, P.; Musolino, P.:Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues. Jornal of Geometric Analysis, p. 10679-10717, 2021.

O operador $\mathscr{L}_{T,g}$ é uma generalização do operador Laplaciano Grushin.

Definição 1

O operador Laplaciano Grushin é definido por

$$\Delta_G u(x,y) := \Delta^{\mathbb{R}^k} u(x,y) + |x|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \Delta^{\mathbb{R}^h} u(x,y), \tag{3}$$

onde $s > 0$, $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ e $\Delta^{\mathbb{R}^h}$ denotam respectivamente o Laplaciano Beltrami em $\mathbb{R}^k$ e em $\mathbb{R}^h$, $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $N = k+h$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^h$.

- Baouendi, M.S.: Sur une classe d'operateurs elliptiques degeneres. Bull. Soc. Math. France 95, 45–87 (1967).
- Grušin, V.V.: A certain class of hypoelliptic operators. Mat. Sb. 83(125), 456–473 (1970). 10717(2021).

- Baouendi, M.S.: Sur une classe d'operateurs elliptiques degeneres. Bull. Soc. Math. France 95, 45–87 (1967).
- Grušin, V.V.: A certain class of hypoelliptic operators. Mat. Sb. 83(125), 456–473 (1970). 10717(2021).

De fato, considere (0,2)-tensor simétrico T semidefinido positivo, definido da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^N & \longrightarrow & M_{N\times N} \\ x & \mapsto & T(x) = \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ 0 & \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} id_{\mathbb{R}^h} \end{pmatrix} \end{array}$$

Escrevemos o gradiente de $u:\Omega\subset\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ da seguinte forma $\nabla^{\mathbb{R}^N}u = \left(\nabla_x^{\mathbb{R}^k}u, \nabla_y^{\mathbb{R}^h}u\right)$. Para $\xi=(X,Y)\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h)$ temos $div_{\mathbb{R}^{k+h}}\xi = div_{\mathbb{R}^k}X + div_{\mathbb{R}^h}Y$.

De fato, considere (0,2)-tensor simétrico T semidefinido positivo, definido da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^N & \longrightarrow & M_{N\times N} \\ x & \mapsto & T(x)=\begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ 0 & \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k}\, id_{\mathbb{R}^h} \end{pmatrix} \end{array}$$

Escrevemos o gradiente de $u:\Omega\subset\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ da seguinte forma $\nabla^{\mathbb{R}^N}u=\left(\nabla_x^{\mathbb{R}^k}u,\nabla_y^{\mathbb{R}^h}u\right)$. Para $\xi=(X,Y)\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h)$ temos $div_{\mathbb{R}^{k+h}}\xi=div_{\mathbb{R}^k}X+div_{\mathbb{R}^h}Y$.

De fato, considere (0,2)-tensor simétrico T semidefinido positivo, definido da seguinte forma

$$\begin{array}{rcl} T:\mathbb{R}^N & \longrightarrow & M_{N\times N} \\ x & \mapsto & T(x)=\begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ 0 & \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} id_{\mathbb{R}^h} \end{pmatrix} \end{array}$$

Escrevemos o gradiente de $u:\Omega\subset\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ da seguinte forma $\nabla^{\mathbb{R}^N}u=\left(\nabla_x^{\mathbb{R}^k}u,\nabla_y^{\mathbb{R}^h}u\right)$. Para $\xi=(X,Y)\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^h)$ temos $div_{\mathbb{R}^{k+h}}\xi=div_{\mathbb{R}^k}X+div_{\mathbb{R}^h}Y$.

Agora, mostraremos que $\Delta_G u = div(T\nabla^{\mathbb{R}^N} u)$. Note que

$$\begin{aligned} T\nabla^{\mathbb{R}^N} u &= \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ 0 & \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} id_{\mathbb{R}^h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x^{\mathbb{R}^k} u \\ \nabla_y^{\mathbb{R}^h} u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla_x^{\mathbb{R}^k} u \\ \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \nabla_y^{\mathbb{R}^h} u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} div(T\nabla^{\mathbb{R}^N} u) &= div_{\mathbb{R}^k} \nabla^{\mathbb{R}^k} u(x,y) + div_{\mathbb{R}^h} \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \nabla^{\mathbb{R}^h} u(x,y) \\ &= \Delta_x u + \|x\|^{2s} div_{\mathbb{R}^h}(\nabla^{\mathbb{R}^h} u) \\ &= \Delta_x u + \|x\|^{2s} \Delta_y u \\ &= \Delta_G u. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $\Delta_G u = div(T\nabla^{\mathbb{R}^N} u)$. Note que

$$\begin{aligned} T\nabla^{\mathbb{R}^N} u &= \begin{pmatrix} id_{\mathbb{R}^k} & 0 \\ 0 & \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} id_{\mathbb{R}^h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_x^{\mathbb{R}^k} u \\ \nabla_y^{\mathbb{R}^h} u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \nabla_x^{\mathbb{R}^k} u \\ \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \nabla_y^{\mathbb{R}^h} u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} div(T\nabla^{\mathbb{R}^N} u) &= div_{\mathbb{R}^k} \nabla^{\mathbb{R}^k} u(x,y) + div_{\mathbb{R}^h} \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \nabla^{\mathbb{R}^h} u(x,y) \\ &= \Delta_x u + \|x\|^{2s} div_{\mathbb{R}^h}(\nabla^{\mathbb{R}^h} u) \\ &= \Delta_x u + \|x\|^{2s} \Delta_y u \\ &= \Delta_G u. \end{aligned}$$

A investigação central

Considerando hipóteses adequadas sob T um (0,2)-tensor semidefinido positivo, adaptamos:

- O método de Monticelli e Scott em [4] para provar o Teorema Espectral para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$.
- As técnicas de Teoria de Perturbação de Cunha, Gomes e Marrocos em [1] para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$ para obter as fórmulas do tipo Hadamard para os autovalores.
- Como aplicação abordamos:
  - Caracterização dos pontos críticos de funções simétricas de autovalores.

A investigação central

UFABC

Considerando hipóteses adequadas sob T um (0,2)-tensor semidefinido positivo, adaptamos:

- O método de Monticelli e Scott em [4] para provar o Teorema Espectral para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$.
- As técnicas de Teoria de Perturbação de Cunha, Gomes e Marrocos em [1] para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$ para obter as fórmulas do tipo Hadamard para os autovalores.
- Como aplicação abordamos:
  - Caracterização dos pontos críticos de funções simétricas de autovalores.

Considerando hipóteses adequadas sob T um (0,2)-tensor semidefinido positivo, adaptamos:

- O método de Monticelli e Scott em [4] para provar o Teorema Espectral para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$.
- As técnicas de Teoria de Perturbação de Cunha, Gomes e Marrocos em [1] para o operador $\mathscr{L}_{T,g}$ para obter as fórmulas do tipo Hadamard para os autovalores.
- Como aplicação abordamos:
  - Caracterização dos pontos críticos de funções simétricas de autovalores.

Seja Q um $(0,2)-$tensor simétrico semidefinido positivo localmente integrável em M. Definimos a seguinte norma

$$\|w\|_Q = \left\{ \|w\|^2_{L^2(M)} + \|\nabla w\|^2_{\mathcal{L}^2(M,Q)} \right\}^{\frac{1}{2}}, w \in Lip(M), \tag{4}$$

em que $\mathcal{L}^2(M,Q)$ é o espaço dos campos de vetores mensuráveis X definidos em M tais que

$$\|X\|_{\mathcal{L}^2(M,Q)} = \left\{ \int_M Q(X,X)dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{5}$$

Seja Q um $(0,2)-$tensor simétrico semidefinido positivo localmente integrável em M. Definimos a seguinte norma

$$\|w\|_Q = \left\{ \|w\|^2_{L^2(M)} + \|\nabla w\|^2_{\mathcal{L}^2(M,Q)} \right\}^{\frac{1}{2}}, w \in Lip(M), \tag{4}$$

em que $\mathcal{L}^2(M,Q)$ é o espaço dos campos de vetores mensuráveis X definidos em M tais que

$$\|X\|_{\mathcal{L}^2(M,Q)} = \left\{ \int_M Q(X,X)dx \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{5}$$

O espaço de Sobolev degenerado com peso $W_Q^{1,2}(M)$ é definido como completamento do espaço vetorial

$$Lip_Q(M) = \{w \in Lip(M) : \|w\|_Q < \infty\} \tag{6}$$

na norma $\|w\|_Q$.
Denotamos por $W_{Q,0}^{1,2}(M)$ o fecho de $Lip_0(M)$ em $W_Q^{1,2}(M)$.

Definição 2

Uma função $u \in W_{Q,0}^{1,2}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamada solução fraca para o problema (2) quando satisfaz

$$\int_M \langle T\nabla u, \nabla v\rangle dVol_g = \int_M \lambda uv \; dVol_g, \quad \text{para todo } v \in W_{Q,0}^{1,2}(M), \tag{7}$$

O espaço de Sobolev degenerado com peso $W_Q^{1,2}(M)$ é definido como completamento do espaço vetorial

$$Lip_Q(M) = \{w \in Lip(M) : \|w\|_Q < \infty\} \tag{6}$$

na norma $\|w\|_Q$.
Denotamos por $W_{Q,0}^{1,2}(M)$ o fecho de $Lip_0(M)$ em $W_Q^{1,2}(M)$.

Definição 2

Uma função $u \in W_{Q,0}^{1,2}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamada solução fraca para o problema (2) quando satisfaz

$$\int_M \langle T\nabla u, \nabla v\rangle dVol_g = \int_M \lambda uv \; dVol_g, \quad \text{para todo } v \in W_{Q,0}^{1,2}(M), \tag{7}$$

Teorema

Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com bordo, $\omega \leq \tau$ um par de pesos p-admissíveis, para algum $1 < p < +\infty$ e $Q(x)$ é um (0,2) tensor integrável, semidefinido positivo e satisfaz a condição de elipticidade, isto é, $\omega|\xi|^p \leq |\sqrt{Q(x)}\xi|^p \leq \tau|\xi|^p$.
Então,

- existe uma constante $C_{\mathscr{P}} = C_{\mathscr{P}}(p, M, Q) > 0$ tal que para todo $u \in C_0^1(M)$ tem-se
$$\|u\|_{L^p(M)} \leq C_{\mathscr{P}} \left(\int_M \langle Q(x)\nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$
- existe um $q > p$ tal que $W^{1,p}_{Q,\tau,0}(M)$ é compactamente mergulhado em $L^r_\tau(M)$ para todo $1 \leq r < q$.

Observação: $\omega \in A_p(\omega)$, onde $A_p(\omega)$ é a classe de pesos Muckenhoupt e Q suave.

Teorema

Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com bordo, $\omega \leq \tau$ um par de pesos p-admissíveis, para algum $1 < p < +\infty$ e $Q(x)$ é um (0,2) tensor integrável, semidefinido positivo e satisfaz a condição de elipticidade, isto é, $\omega|\xi|^p \leq |\sqrt{Q(x)}\xi|^p \leq \tau|\xi|^p$.
Então,

- existe uma constante $C_{\mathscr{P}} = C_{\mathscr{P}}(p, M, Q) > 0$ tal que para todo $u \in C_0^1(M)$ tem-se

$$\|u\|_{L^p(M)} \leq C_{\mathscr{P}} \left(\int_M \langle Q(x)\nabla u, \nabla u\rangle^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

- existe um $q > p$ tal que $W^{1,p}_{Q,\tau,0}(M)$ é compactamente mergulhado em $L^r_\tau(M)$ para todo $1 \leq r < q$.

Observação: $\omega \in A_p(\omega)$, onde $A_p(\omega)$ é a classe de pesos Muckenhoupt e Q suave.

Como aplicação temos o seguinte Teorema:

Teorema

Seja M uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Então o problema de autovalor (2) possui um número infinito enumerável de autovalores

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_m \leq \cdots$$

com

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_m = \infty$$

e autofunções $\{u_k\} \subset W^{1,2}_{T,0}(M)$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(M)$.

Observação: onde T é o Q no Teorema de Rellich-Kondrachov.

Em geral não podemos esperar que a função definida por $\lambda_n : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ que associa cada métrica g ao enésimo autovalor de $\mathscr{L}_{T,g}$ seja diferenciável.

Considere a família de matrizes simétricas $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}.$$

Em geral não podemos esperar que a função definida por $\lambda_n : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ que associa cada métrica g ao enésimo autovalor de $\mathscr{L}_{T,g}$ seja diferenciável.

Considere a família de matrizes simétricas $A : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}.$$

As curvas de autovalores $\mu(t) = 1 - t$ e $\beta(t) = 1 + t$ são analíticas em t, porém não estão ordenadas em ordem crescente. Se ordenamos os autovalores de forma crescente, temos

$$\lambda_1(t) = \begin{cases} 1 - t, & \text{se } t \leq 0; \\ 1 + t, & \text{se } t > 0. \end{cases} \qquad \leq \qquad \lambda_2(t) = \begin{cases} 1 + t, & \text{se } t \leq 0; \\ 1 - t, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Note que λ_1 e λ_2 são não deriváveis em $t = 0$.

O teorema da escolha de Kato nos diz que em uma família analítica de operadores autoadjuntos é possível parametrizar os autovalores analiticamente sem necessariamente colocá-los em ordem crescente. As únicas funções simétricas de autovalores são a soma $\Lambda_1(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$ e o produto $\Lambda_2(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)$. Explicitamente, temos

$$\Lambda_1(t) = \begin{cases} \mu(t) + \beta(t), & \text{se } t \leq 0; \\ \beta(t) + \mu(t), & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Logo, $\Lambda_1(t) = \mu(t) + \beta(t)$(real analítica). E,

$$\Lambda_2(t) = \begin{cases} \mu(t)\beta(t), & \text{se } t \leq 0; \\ \beta(t)\mu(t), & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Logo, $\Lambda_2(t) = \beta(t)\mu(t)$(real analítica).

Teorema

Considere uma família analítica de métricas Riemannianas $g(t)$ em M. Se λ é um autovalor de multiplicidade $m > 1$ para o $\mathscr{L}_{T,g}$ Grushin, então existem curvas analíticas $t \mapsto \lambda_i(t)$ e $t \mapsto \phi_i(t) \in L^2(M)$ tal que:

(1) $\lambda_i(0) = \lambda$;

(2) $\{\phi_i(t)\}$ é ortonormal em $L^2(M, dVol_g)$;

(3) $\begin{cases} \mathscr{L}_{T,g}\phi_i(t) & = \lambda_i(t)\phi_i(t) \;\; em\ M \\ \phi_i(t) & = 0 \;\; sobre\ \ \partial M. \end{cases}$

Considere uma família de operadores autoadjuntos $A(t) : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, onde $\mathscr{H}$ é um espaço de Hilbert. Suponha que existam famílias suaves de autovalores $\lambda(t)$ e de autovetores $u(t)$ com $|u(t)|^2 = 1$. Então

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \lambda(t) = \langle A'(0)u(0), u(0)\rangle, \tag{8}$$

onde $A'(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(t)$.

Derivando, $A(t)u(t) = \lambda(t)u(t)$ obtemos,

$$\frac{d}{dt}A(t)\cdot u(t) + A(t)\cdot \frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}\lambda(t)\cdot u(t) + \lambda(t)\cdot \frac{d}{dt}u(t)$$

Fazendo $\langle \quad, u(t)\rangle$, temos

$$\begin{aligned} & \left\langle \tfrac{d}{dt}A(t)\cdot u(t), u(t)\right\rangle + \left\langle A(t)\cdot \tfrac{d}{dt}u(t), u(t)\right\rangle \\ = \quad & \left\langle \tfrac{d}{dt}\lambda(t)\cdot u(t), u(t)\right\rangle + \left\langle \lambda(t)\cdot \tfrac{d}{dt}u(t), u(t)\right\rangle \end{aligned}$$

Como $A(t)$ é autoadjunto e $\langle \frac{d}{dt}u(t), u(t)\rangle = 0$. Segue

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left\langle \frac{d}{dt}A(t)\cdot u(t), u(t)\right\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}u(t), \lambda(t)\cdot u(t)\right\rangle$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left\langle \frac{d}{dt}A(t)\cdot u(t), u(t)\right\rangle. \tag{9}$$

A fórmula para λ' na forma adequada para as aplicações, a saber

$$\begin{aligned}\lambda'(0) = \; & - \; \frac{1}{4}\int_M \langle H, div(T\nabla\phi^2)g + 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi \otimes \tilde{T}\nabla\phi) \\ & - \; d\mathscr{F}^*_{g_0}(\nabla\phi \otimes \nabla\phi)\rangle dm \end{aligned} \tag{10}$$

onde $\mathscr{F} : \mathscr{M}^k \longrightarrow \mathcal{S}^2(M)$ definida por $\mathscr{F}(g) = T_g$ é suave e T' é a derivada direcional de $\mathscr{F}$ na direção de H, por fim $d\mathscr{F}^*_{g_0}$ denota a transformação adjunta.

Definição 3

i) Seja F um subconjunto não-vazio finito de $\mathbb{N}$ e $\tau \in \{1, \cdots, |F|\}$. Definimos a aplicação $\Lambda_{F,\tau} : \mathscr{M}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Lambda_{F,\tau}[g] := \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_\tau \in F \\ j_1 < \cdots < j_\tau}} \lambda_{j_1}[g] \cdots \lambda_{j_\tau}[g] \quad \text{para toda } g \in \mathscr{M},$$

em que $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_r}$ são autovalores do problema 2.

Note que $\Lambda_{F,\tau}$ é função simétrica elementar em $|F|$ variáveis de grau τ.

UFABC

Exemplo

Seja $F = \{7, 8, 9, 10\}$ e $1 \leq \tau \leq 4$. Temos

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{4,1} &= \lambda_7 + \lambda_8 + \lambda_9 + \lambda_{10} \\
\Lambda_{4,2} &= \lambda_7\lambda_8 + \lambda_8\lambda_9 + \lambda_9\lambda_{10} + \lambda_7\lambda_9 + \lambda_7\lambda_{10} + \lambda_8\lambda_{10} \\
\Lambda_{4,3} &= \lambda_7\lambda_8\lambda_9 + \lambda_8\lambda_9\lambda_{10} + \lambda_7\lambda_8\lambda_{10} + \lambda_7\lambda_9\lambda_{10} \\
\Lambda_{4,4} &= \lambda_7\lambda_8\lambda_9\lambda_{10}
\end{aligned}
$$

Proposição 1

Sejam $\bar{g} \in \mathscr{A}^F$ e λ_F o valor comum de todos os autovalores $\lambda_j(\bar{g}), j \in F$. A diferencial de Frechét no ponto $\bar{g}$ e na direção de H da aplicação $\Lambda_{F,\tau}$ é dada por

$$\begin{aligned} d_{g=\bar{g}}\Lambda_{F,\tau}[H] &= \lambda_F^{\tau-1}\binom{|F|-1}{\tau-1}\sum_{j=1}^{|F|}\int_M \langle H, div(T\nabla\phi_i^2)\bar{g} \\ &+ 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes \tilde{T}\nabla\phi_i) - d\mathscr{F}^*_{g_0}(\nabla\phi_i \otimes \nabla\phi_i)\rangle dm. \end{aligned}$$

Definição 3

Seja $\mathscr{V}[v] := \{g \in \mathscr{M}^k / \ Vol_g = v\}$. Dizemos que $\bar{g}$ é métrica crítica de $\Lambda_{F,\tau}$ sob a restrição de volume $\bar{g} \in \mathscr{V}[v]$ se satisfaz

$$d_{g=\bar{g}}\Lambda_{F,\tau}[H] + \bar{c}d_{g=\bar{g}}Vol_g[H] = 0$$

para algum $\bar{c} \in \mathbb{R}$ e para todo $H \in \mathcal{S}^2(\mathscr{M})$.

A função $\Lambda_{F,\tau}$ é analítica quando restrita ao conjunto aberto abaixo.
$\mathscr{A}^F := \{g \in \mathscr{M}^k; \lambda_n(g) \neq \lambda_m(g) \quad \forall n \in F, \forall m \in \mathbb{N} \setminus F\}$.

Teorema

Se $\bar{g}$ é uma métrica crítica para $\Lambda_{F,\tau}$ sob a restrição de volume $\bar{g} \in \mathscr{V}[v]$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i \in F} div(T\nabla\phi_i^2)\bar{g} + 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes \tilde{T}\nabla\phi_i) - d\mathscr{F}^*_{\bar{g}}(\nabla\phi_i \otimes \nabla\phi_i) = c\bar{g},$$

onde $\mathscr{F} : \mathscr{M}^k \longrightarrow \mathcal{S}^2(M)$ definida por $\mathscr{F}(g) = T_g$ é suave e por fim $d\mathscr{F}^*_{g_0}$ denota a transformação adjunta de $d\mathscr{F}_{g_0}$.

A função $\Lambda_{F,\tau}$ é analítica quando restrita ao conjunto aberto abaixo.
$\mathscr{A}^F := \{g \in \mathscr{M}^k; \lambda_n(g) \neq \lambda_m(g) \;\; \forall n \in F, \forall m \in \mathbb{N} \setminus F\}$.

Teorema

Se $\bar{g}$ é uma métrica crítica para $\Lambda_{F,\tau}$ sob a restrição de volume $\bar{g} \in \mathscr{V}[v]$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i \in F} div(T\nabla\phi_i^2)\bar{g} + 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes \tilde{T}\nabla\phi_i) - d\mathscr{F}^*_{\bar{g}}(\nabla\phi_i \otimes \nabla\phi_i) = c\bar{g},$$

onde $\mathscr{F} : \mathscr{M}^k \longrightarrow \mathcal{S}^2(M)$ definida por $\mathscr{F}(g) = T_g$ é suave e por fim $d\mathscr{F}^*_{g_0}$ denota a transformação adjunta de $d\mathscr{F}_{g_0}$.

Sejam $h = \operatorname{tr} H = \langle H, g\rangle$ e $dVol_g = \frac{1}{2} h\mathrm{d}m$. Da definição 3 e da Proposição 1, temos $d_{g=\bar{g}}\Lambda_{F,\tau}[H] + \bar{c} d_{g=\bar{g}}\mathscr{V}[H] = 0$

$$\lambda_F^{\tau-1}\binom{|F|-1}{\tau-1}\sum_{1\leq k\leq |F|}\mu_k' + c\int_M \frac{1}{2}h\mathrm{d}m = 0.$$

Apenas para simplificar a notação vamos denotar

$$\gamma_i = div(T\nabla\phi_i^2)\bar{g} + 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes \tilde{T}\nabla\phi_i) - d\mathscr{F}^*_{\mathbf{g_0}}(\nabla\phi_i\otimes\nabla\phi_i).$$

Do produto interno de Hilbert Schmidt, obtemos

$$-\frac{1}{4}\lambda_F^{\tau-1}\binom{|F|-1}{\tau-1}\sum_{i=1}\int_M \langle H, \gamma_i\rangle dm + \frac{1}{2}c\int_M \langle H, \bar{g}\rangle dm = 0.$$

Fazendo alguns ajustes, obtemos

$$\textstyle\sum_{i=1}\int_M \langle H, \gamma_i\rangle dm - \int_M \langle H, c'\bar{g}\rangle dm = 0$$

onde $c' = \frac{\frac{1}{2}c}{-\frac{1}{4}\lambda_F^{\tau-1}\binom{|F|-1}{\tau-1}}$.
Pela linearidade da integral e de Hilbert Schmidt, segue

$$\int_M \langle H, \sum_{i=1} \gamma_i - c'\bar{g}\rangle dm = 0 \ \forall \ H.$$

Tome $H = v\tilde{H}$ onde $v \in C^\infty(M), \tilde{H} \in \mathcal{S}^2(\mathscr{M})$. Então

$$\int_M \left\langle v\tilde{H}, \sum_{i=1} \gamma_i - c'\bar{g} \right\rangle dm = 0 \ \forall \ \tilde{H}.$$

Daí,

$$\int_M v\left\langle \tilde{H}, \sum_{i=1} \gamma_i - c'\bar{g} \right\rangle dm = 0 \ \forall \ \tilde{H}.$$

Fazendo

$$u = \left\langle \tilde{H}, \sum_{i=1} \gamma_i - c'\bar{g} \right\rangle$$

e aplicando o Teorema de DuBois-Reymond, temos

$$\left\langle \tilde{H}, \sum_{i=1} \gamma_i - c'\bar{g} \right\rangle = 0 \ \forall \ \tilde{H} \in \mathcal{S}^2.$$

Segue que

$$\sum_{i=1} \gamma_i = c'\bar{g} \text{ em } M,$$

em que $\gamma_i = div(T\nabla\phi_i^2)\bar{g} + 2\,\mathrm{Sym}(\nabla\phi_i \otimes \tilde{T}\nabla\phi_i) - d\mathscr{F}_{g_0}^*(\nabla\phi_i \otimes \nabla\phi_i)$.

Referências centrais

- Cunha, C. L., Gomes, J. N., Marrocos, M. A. M. *Hadamard type variation formulas for the eigenvalues of a class of second-order elliptic operators and its applications.* arXiv:2306.06504 [math.DG], 2023.
- Grušin, V.V.: *A certain class of hypoelliptic operators*. Mat. Sb. 83(125), 456–473 (1970).
- Lamberti, P. D.; Luzzini, P.; Musolino, P.: *Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues*. Jornal of Geometric Analysis, p. 10679-10717(2021).
- Monticelli, D. D. & Scott, Rodney: *Existence and spectral theory for weak solutions of Neumann and Dirichlet problems for linear degenerate elliptic operators with rough coefficients* Journal of Differential Equations Volume 259, Issue 8, 15 October 2015, Pages 4009-4044.

Obrigada!