UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Departamento de Matemática

Cálculo variacional: uma breve introdução e aplicações

Vinicius Marques da Silva

XI Bienal da Matemática

São Carlos/2024

Resumo

O intuito desse trabalho é apresentar uma breve introdução ao cálculo variacional e suas aplicações. Desta forma, o desenvolvimento consiste em relembrar conceitos de espaços métricos e espaços vetoriais normados.

Posteriormente esses conceitos serão aprimorados para o estudo de funcionais, onde surgirão conceitos a respeito da derivada de Fréchet e Gâteaux, bem como a equação de Euler. Por fim além da condição de Jacobi, veremos as condições suficientes de Weiertrass e Legendre.

Sumário

Conceitos Preliminares

- Definição espaços vetoriais;
- Definição espaços vetoriais normados;
- Espaços de Banach;
- Funcionais;
- Derivada de Gâteaux;
- Derivada de Fréchet;
- Equação de Euler-Lagrange.

Definição 1

Considere o espaço normado $C^1[x_0, x_1]$ *munido da norma*

$$||y||_{C^1} = sup_{s \in [x_0, x_1]} |y(s)| + sup_{s \in [x_0, x_1]} |y'(s)|.$$

Definimos o funcional $\Psi : C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s)) ds,$$

sendo F *uma função de três variáveis reais a valores reais de classe* C^1.

Teorema 1

A derivada de Fréchet de Ψ *em* $y \in C^1[x_0, x_1]$ *é a transformação linear contínua* $d\Psi(y) : C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d\Psi(y)(h) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s)ds.$$

Teorema 2

Sejam E *um espaço de Banach,* $U \subset E$ *aberto,* $h_0 \in U$ *e* $\psi : U \to \mathbb{R}$ *tal que o* $\nabla\psi(h)$ *existe para todo* h *em uma vizinhança de* h_0 *e é contínuo em* h_0. *Então,* $d\psi(h_0) = \nabla\psi(h_0)$, *ou seja, a derivada de Fréchet em* h_0 *é igual a derivada de Gâteaux em* h_0.

Teorema 3

Sejam E um espaço de Banach e $U \subset E$ um aberto. Seja $\psi : U \to \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável em U, com derivada de Fréchet contínua em U. Se y_0 é um extremo para ψ então, $d\psi(y_0)(h) = 0$, para todo $h \in E$.

Observação: Decorre dos teoremas anteriores que se, $y_0 \in C^1[x_0, x_1]$ for extremante do funcional Ψ, então:

$$d\Psi(y)(h) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).h(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).h'(s)ds = 0, \forall h \in C^1[x_0, x_1]$$

Lema 1 (Fundamental do cálculo variacional)

Seja $E(s)$ *uma função contínua num intervalo* $[x_0, x_1]$. *Se*

$$\int_{x_0}^{x_1} E(s)\mu(s)ds = 0,$$

para qualquer função arbitrária $\mu : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[x_0, x_1]$, *com* $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$, *então* $E(s) = 0$, *para qualquer valor de* $s \in [x_0, x_1]$.

Teorema 4

Seja F uma função de três variáveis reais a valores reais e classe C^2. Considere $\Psi : C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s))ds.$$

Suponha que

$$d\Psi(y)(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)).\mu(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)).\mu'(s)ds = 0,$$

para toda função $\mu(s)$ de classe C^1 em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Então, tem-se

$$F_y - \frac{d}{ds}F_{y'} = 0 \text{ em } [x_0, x_1].$$

Casos da equação de Euler-Lagrange:

- $F = F(s, y'(s))$;
- $F = F(y(s), y'(s))$;
- $F = F(s, y(s), y'(s))$;
- $F = F(s, y(s))$;
- $F = F(y'(s))$.

Embora tenhamos essa variedade de casos, daremos destaque para o problema da Braquistócrona que por sua vez é descrito pelo caso $F = F(y(s), y'(s))$.

Problema da Braquistócrona

A etimologia da palavra vem do grego, brakhistós (o mais curto) khrónos (tempo).

A princípio consideraremos o problema da braquistócrona sem atrito e idealizada no plano xy, cujo o eixo da vertical, eixo y, possui orientação positiva para baixo. Sem perda de generalidade, tomaremos em nosso sistema de coordenadas o ponto A na origem, isto é, $A = (0, 0)$, de tal forma que a trajetória do movimento iniciado no ponto A é descrita pela curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

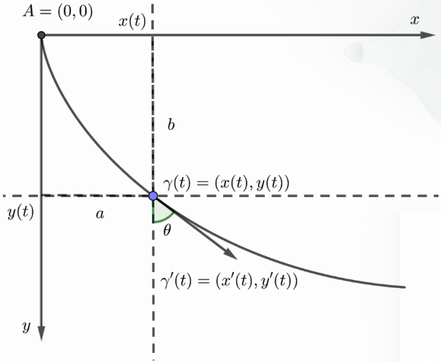

Figura: Problema da braquistócrona.

Agora, utilizaremos a segunda lei de Newton, com aceleração vertical aproximada pela aceleração total, donde obtemos:

$$m.\underbrace{S''(t)}_{=a} = F_{r_y} = m.g \cdot \frac{y'(t)}{S'(t)} \Longrightarrow S'(t)S''(t) = g.y'(t),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}((S'(t))^2)' = g.y'(t).$$

Integrando, temos

$$\frac{1}{2}(S'(t))^2 = g.y(t) + C \Longrightarrow \frac{1}{2}(S'(t))^2 = g.y(t) \Longrightarrow S'(t) = \sqrt{2gy(t)}.$$

Pela natureza do nosso problema, podemos interpretar nossa curva como o gráfico de uma função, ou seja, $y = y(x)$. Assim obtemos

$$S'(t) = ||\gamma'(t)|| \overset{R.C.}{=} \sqrt{[x'(t)]^2 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t)).x'(t))\right]^2} = |x'(t)|\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2},$$

e veja que $|x'(t)| = x'(t)$, pois pela configuração do problema temos que a velocidade da partícula é positiva, donde

$$\frac{dx}{dt} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(x(t))\right]^2} = \sqrt{2gy(x(t))}.$$

Como queremos minimizar o tempo e o tempo está diretamente relacionado com o deslocamento horizontal da partícula, vamos interpretar a derivada de x em relação à t como a diferencial, ou seja, como o quociente de duas variações. Assim, obtemos

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}(x)\right]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} \Longrightarrow t(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}}ds.$$

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}{y}} - \frac{dy}{dx}\left[\frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{y\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}}\right]\right) = 0.$$

Donde

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}}.$$

Daí, utilizando relações trigonométricas

$$\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}} \Longrightarrow y(\theta) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2\theta)). \qquad (1)$$

Nosso interesse agora é derivar a variável x com relação a θ. Desta maneira utilizando a regra da cadeia encontra-se:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{d\theta},$$

onde a saber:

$$\frac{dy}{d\theta} = C_1 \operatorname{sen}(2\theta) \Longrightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2C_1 \operatorname{sen}(x)\cos(x).$$

Note que ao combinar a equação acima com a expressão vista em (1) chega-se a seguinte equação:

$$\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{\frac{y}{C_1 - y}} \cdot 2C_1 \operatorname{sen}(x)\cos(x) \Longrightarrow x(\theta) = C_1(1 - \cos(2\theta)).$$

E portanto as candidatas a extremantes do funcional são as cicloides

$$x(\theta) = \frac{C_1}{2}(2\theta - \operatorname{sen}(2\theta)),$$
$$y(\theta) = \frac{C_1}{2}(1 - \cos(2\theta)).$$

Exemplo 1

Calcule o extremante do funcional a seguir

$$J(y) = \int_0^1 [([y'(s)]^2 + 12sy(s)]ds, \;\; y(0) = 0, \;\; y(1) = 1,$$

considerando o conjunto $\mathcal{F}_0 = \{y \in C^1[0,1]; y(0) = 0 \text{ e } y(1) = 1\}$.

Solução. O candidato a extremante via equação de Euler-Lagrange é dado por:

$$F_y - F_{sy'} - y'F_{yy'} - y''F_{y'y'} = 0 \Longrightarrow y(s) = s^3.$$

Verificaremos algebricamente que o candidato realmente é um extremante, ou seja, $J(V(s)) \geq J(y^*(s))$ para todo $V(s) \in \mathcal{F}_0$. Considerando $y^*(s) = s^3$ e aplicando o funcional, segue que:

$$J(y(s)) = \int_0^1 [(3s^2)^2 + 12s^4]ds \Longrightarrow J(y(s)) = \int_0^1 21s^4 ds = \frac{21}{5}.$$

O segundo passo é considerar uma função $V(s) = \delta_V(s) + y^*(s)$. Aplicando a função $V(s)$ no funcional $J(s)$ encontramos:

$$J(y^*(s) + \delta_v(s)) = J(y^*(s)) + \underbrace{\int_0^1 6s^2\delta_v'(s)ds}_{\text{Integração por partes}} + \int_0^1 \delta_v'(s)^2 ds + \int_0^1 12s\delta_v(s)ds. \quad (2)$$

Considerando $u = 6s^2$ e $dv = \delta_v'(s)dt$ na integração por partes segue que:

$$\int_0^1 6s^2\delta_v'(s)ds = \underbrace{6s^2\delta_v(s)\Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 [12s\delta_v(s)]ds.$$

Daí retomando (2)

$$J(y^*(s)+\delta_v(s)) = J(y^*(s)) + \int_0^1 \underbrace{[\delta_v'(s)^2]}_{\geq 0}\, ds.$$

Portanto para qualquer $\delta_v(s)$, temos $J(y^*(s)+\delta_v(s)) \geq J(y^*(s))$. Isso nos indica de que $y^*(s)$ é um ponto de mínimo local.

Em particular vamos aplicar o funcional J na função $V(s) = s^{\alpha} \in \mathcal{F}_0$, com $s \in [0,1]$.

Comentários: Veja que tomando $V(s) = s^{\alpha}$ no funcional J obtemos:

$$J(s^{\alpha}) = \int_0^1 (\alpha s^{\alpha-1})^2 + 12s(s^{\alpha})ds = \alpha^2 \underbrace{\lim_{M\to 0^+} \int_M^1 s^{2\alpha-2}ds}_{\text{Requer uma análise}} + \frac{12}{\alpha+2}.$$

Donde, se $\alpha > \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{M\to 0^+} \frac{1-M^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} = \frac{1}{2\alpha-1} \Longrightarrow J(s^{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} + \frac{12}{\alpha+2} \geq J(s^3) = \frac{21}{5}.$$

Campos

Definição 2 (Campo próprio)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ e $y = y(x, c)$ uma família de curvas a um parâmetro. Dizemos que essa família é um campo próprio se para cada ponto de D existe uma única curva (único $c \in \mathbb{R}$) que passa por esse ponto.

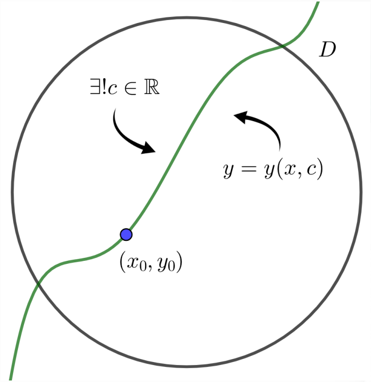

Figura: Campo próprio ilustrativo.

Definição 3 (Campo central)

Um campo é dito central quando as curvas de uma família cobrem toda a região D e além disso se interceptam somente no seu centro (ponto da região).

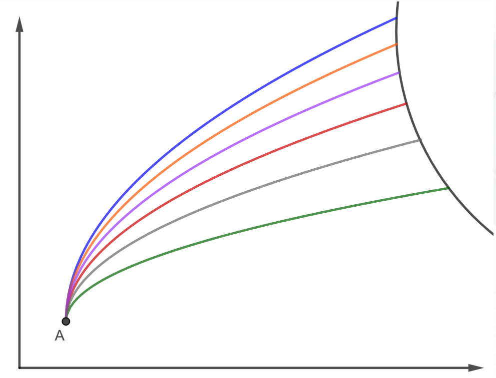

Figura: Campo central.

Campo de extremais

Definição 4 (Campo de extremais)

Um campo é denominado campo de extremais quando for um campo próprio ou central formado por uma família candidatos a extremais de um certo problema variacional.

Condição necessária de Jacobi

Consideremos o problema variacional

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s))ds, \tag{3}$$

com as condições de fronteira $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$, ou seja, o extremante do funcional, $y = y(x)$ deve passar pelo pontos $A = (x_0, y_0)$ e $B = (x_1, y_1)$, de denominaremos de arco AB.

Definição 5 (Ponto conjugado)

Dizemos que x_0 e $\bar{s} \in (x_0, x_1]$ são pontos conjugados quando existe uma família, $y = y(s, c)$, a um parâmetro de soluções da equação de Euler do problema variacional (3), de classe C^2, tal que $\frac{\partial y(s,c)}{\partial c}$ se anula nos pontos x_0 e $\bar{s}$.

Considerando, também, que as curvas $y = y(s, c)$ são soluções da equação de Euler-Lagrange, segue que:

$$F_y(s, y(s,c), y'(s,c)) - \frac{d}{ds}[F_{y'}(s, y(s,c), y'(s,c)] = 0.$$

Assim, usando a regra da cadeia a derivada da expressão acima em relação a c, obtemos a equação de Jacobi:

$$\boxed{\left(F_{yy} - \frac{d}{ds}(F_{y'y})\right)\eta(s) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}\eta'(s)) = 0.}$$

Teorema 5

Os pontos x_0 *e* $\bar{s} \in (x_0, x_1]$ *são conjugados se, e somente se, existe pelo menos uma solução da equação de Jacobi,* $\eta(s)$*, tal que* $\eta(x_0) = \eta(\bar{s}) = 0$.

Teorema 6 (Condição necessária de Jacobi)

Para um candidato a extremante $y = y(s) \in C^2[x_0, x_1]$ *ser um ponto de mínimo para o problema variacional* $\Psi(y)$ *é necessário que no intervalo* (x_0, x_1) *não existam pontos conjugados de* x_0.

Teorema 7

Seja y uma solução da equação de Euler-Lagrange no intervalo $[a, b]$. Se o funcional quadrático

$$\int_a^b (P(s)h'^2(s) + Q(s)h^2(s))ds,$$

é positivo definido para todo $h \in C^1(a, b)$ tal que $h(a) = h(b) = 0$, sendo $P(s) = F_{y'y'}(s, y(s), y'(s)) > 0$ e $Q(s) = \left(F_{yy}(s, y(s), y'(s)) - \frac{d}{ds}(F_{y'y'}(s, y(s), y'(s)))\right)$, então o intervalo $(a, b]$ não contém pontos conjugados ao ponto a.

Condição de Weierstrass e Legendre

Consideremos o problema variacional:

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s))ds, \;\; y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1, \tag{4}$$

satisfazendo a condição necessária de Jacobi, isto é, x_0 não possui pontos conjugados em $(x_0, x_1]$, e seja $y = y(s)$ um candidato a extremante deste problema variacional (Proveniente da equação de Euler-Lagrange).

Veremos no teorema a seguir que as condições de Weierstrass e Legendre para que y seja um mínimo (máximo) do funcional Ψ, são respectivamente, definidas por

$$E(s, y, y', y+\delta_v) = F(s, y, y'+\delta_v') - F(s, y, y') - F_{y'}(s, y, y')\delta_v' \geq 0 \ (\leq 0),$$

e

$$F_{y'y'}(s, y, y') \geq 0 \ (\leq 0).$$

Teorema 8 (Condição suficiente de Legendre)

Para que uma curva y seja um extremante local do funcional (4) devidamente acompanhado das condições de fronteiras basta que se cumpram as seguintes condições:

1. *é uma solução da equação de Euler-Lagrange para (4) satisfazendo as condições de fronteira;*
2. *satisfaz a condição necessária de Jacobi (Teorema 6);*
3. *e* $F_{y'y'}(s, y, y') > 0$ *(*$F_{y'y'}(s, y, y') < 0$*).*

Então y é um mínimo local (máximo local) para o funcional Ψ.

Exemplo 2 (Solução da Braquistócrona)

Conclua que a cicloide é um minimizante do problema da Braquistócrona, ou seja, é um extremante do funcional:

$$\Psi(y) = \int_0^{x_0} \frac{\sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}(s)\right]^2}}{\sqrt{y(s)}} ds, \ y(0) = 0, \ y(x_0) = y_0.$$

Solução. Como a solução de Euler-Lagrange já é conhecida, basta verificarmos as hipóteses do Teorema 8.

- **Analisando a equação de Jacobi e Legendre**

Pelo ponto $B = (x_0, y_0)$ passará uma certa cicloide com as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) & = & M(2\theta - \text{sen}(2\theta), \\ y(\theta) & = & M(1 - \cos(2\theta)), \end{cases}$$

Observe que, pela descrição do problema da Braquistócrona, temos $y > 0$ em $(0, x_0]$. Porém, o primeiro valor positivo de θ em que $y(\theta) = 0$ é $\theta = \pi$. E a abscissa correspondente será $x(\pi) = 2M\pi$. Motivo pelo qual exigimos $x_0 < 2M\pi$.

Assim, como $y > 0$ no intervalo $(0, x_0]$, obtemos

$$P(s) = F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{[1+(y')^2][1+(y')^2]}} > 0$$

e

$$Q(s) = F_{yy} - \underbrace{\frac{dF_{y'y'}}{ds}}_{=0} = F_{yy} = \frac{3\sqrt{[1+(y')^2]}}{4\sqrt[5]{y^2}} > 0,$$

para todo $s \in (0, x_0]$.

Deste modo, temos que

$$\int_0^{x_0} (P(s)h'^2(s) + Q(s)h^2(s))ds,$$

é positivo definido para todo $h \in C^1(0, x_0)$ tal que $h(0) = h(x_0) = 0$. Portanto, segue do Teorema 7 que 0 não possui pontos conjugados em $(0, x_0]$. Também, como visto acima $F_{y'y'} > 0$, que se trata da condição de Legendre.

Por fim, aplicando o Teorema 8, segue que a cicloide é um minimizante do problema da Braquistócrona. ∎

DEIMLING, Klaus. **Nonlinear functional analysis**. Courier Corporation, 2010.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo** vol. 1. 5ª edição. LTC, 2001.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo** vol. 2. 5ª edição. LTC, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, volume 1-IMPA. 2000.

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**, volume 2-IMPA. 2000.

LIMA, Elon Lages.; **Espaços Métricos**. Coleção Projeto Euclides. Rio de Janeiro, v. 2, n. 3, 2009.

OLIVEIRA, César Rogério de. **Introdução à análise funcional**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

SANTOS, Reginaldo J. **Álgebra linear e aplicações**. Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, v. 28, 2006.

ELSGOLTZ, L. Ecuaciones **Diferenciales y Cálculo Variacional**, Mir, Moscou, 1969.

BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Diferencial e Cálculo das Variações**, IMPA, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática Poços de Caldas 7/26 Julho 1975.

DE LIMA, Gabriel Loureiro. **Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. 2004.

OBRIGADO