XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos

@sbmatematica

XI BIENAL DE MATEMÁTICA

Universidade Federal de São Carlos

Instituição promotora

Sociedade Brasileira de Matemática
`https://sbm.org.br`
Estrada Dona Castorina, 110 - sala 109.
Jardim Botânico/RJ. Brasil. CEP 22.460-3205

Instituição sede

Universidade Federal de São Carlos
`https://www.ufscar.br/`
Rod. Washington Luís km 235 - SP-310
São Carlos/SP. Brasil, CEP 13565-905

SÃO CARLOS
DE 29 DE JULHO A 02 DE AGOSTO DE 2024

Realização:

Apoio:

Sumário

Plenárias Gerais

XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Superfícies mínimas e de curvatura média constante

Ana Maria Menezes de Jesus[1]

Resumo: *Nesta palestra faremos uma breve introdução ao estudo de superfícies mínimas e de curvatura média constante em espaços homogêneos tridimensionais, apresentando resultados clássicos e contribuições mais recentes a essa área de pesquisa.*

[1]Princeton University

Desafios tecnológicos atuais modelados por problemas de identificação de parâmetros

Antonio Carlos Gardel Leitão[2]

Resumo: *Nessa palestra apresentamos dois problemas tecnológicos presentes no nosso dia-a-dia, discutimos modelos matemáticos correspondentes e analisamos métodos numéricos estáveis para obter soluções aproximadas.*

Os problemas abordados são: identificação rápida e precisa de códigos de barra (aqui propomos métodos level-set descontínuos), treinamento de redes neurais para classificação de grandes massas de dados.

Simulações numéricas são mostrados para exemplificar a eficiência dos métodos discutidos.

[2]Universidade Federal de Santa Catarina

Despertar talentos por meio de atividades que promovem o pensamento crítico e criativo em matemática

Cleyton Hercules Gontijo[3]

Resumo: *Na palestra será abordado um modelo teórico-prático de oficinas para estimular o pensamento crítico e criativo com vistas a subsidiar professores na promoção das aprendizagens e da motivação dos estudantes em relação à matemática. Aponta-se que o modelo contribui tanto para a emersão de pistas sobre como os alunos desenvolvem o seu pensamento matemático como para potencializar as práticas pedagógicas em sala de aula que estimulam o pensamento crítico e criativo nessa área do conhecimento.*

[3]Universidade de Brasília

Conhecendo a Sociedade Brasileira de Matemática

Jaqueline Godoy Mesquita[4]

Resumo: *Nesta palestra, iremos apresentar sobre as atividades da Sociedade Brasileira de Matemática, bem como as diferentes iniciativas da SBM para a comunidade brasileira matemática.*

[4]Universidade de Brasília. Presidente da SBM.

Álgebras no plural: um convite à história de uma mulher negra algebrista e suas pesquisas

Manuela da Silva Souza[5]

Resumo: *Esta palestra tem dois objetivos principais. O primeiro deles é contar um pouco da minha história e, assim, trazer reflexões importantes sobre questões de gênero e raça na Matemática. O segundo é "vender"minha área de pesquisa e manter a audiência conectada com a minha exposição pelo maior tempo possível. Fotos, desenhos, exemplos elucidativos e muita contação de histórias farão parte dos recursos didáticos da palestra.*

[5]Universidade Federal da Bahia

Bilhares: um passeio pelos sistemas dinâmicos conservativos

Sylvie Marie Oliffson[6]

Resumo: *Os bilhares são sistemas simples com dinâmica conservativa e apresentam todas as características e riqueza desta. Facilmente "simuláveis", suas imagens introduzem um panorama da área.*

[6]Universidade Federal de Minas Gerais

Plenárias: Problemas do milênio

O problema do milênio sobre intratabilidade computacional

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo[7]

Resumo: *"Resolver ou Verificar?" é uma pergunta que vale um milhão de dólares. No ano 2000, o Instituto Clay para Matemática distinguiu sete problemas considerados centrais para o progresso da matemática, chamando-os de Os Problemas do Milênio. A solução de cada problema corresponde a um prêmio de um milhão de dólares. Um dos sete problemas selecionados é um problema de Teoria da Computação: existe pergunta cuja resposta pode ser verificada rapidamente mas cuja resposta requer muito tempo para ser encontrada? Esse Problema do Milênio, conhecido como P versus NP, é o problema central na área de Complexidade Computacional, onde tentamos classificar a dificuldade dos problemas de acordo com a eficiência das possíveis soluções através de algoritmos computacionais.*

[7]Universidade Federal do Rio de Janeiro

A conjectura de Hodge

Dragomir Mitkov Tsonev[8]

Resumo: *A conjectura de Hodge é um dos principais problemas da atualidade ainda em aberto que está na intersecção de geometria algébrica e geometria complexa. Surgiu, há cerca de noventa anos, das tentativas de Hodge desenvolver a cohomologia de Rham no contexto mais rico de variedades algébricas complexas. Motivada pelo teorema clássico de Lefschetz sobre* $(1,1)-$*classes e posteriormente reformulada em várias formas e generalizações, a conjectura de Hodge, sem dúvida, suscita grandes esperanças para uma provável compreensão melhor e mais profunda da relação entre geometria algébrica e geometria complexa. Nesta palestra, tentaremos a difícil tarefa de explicar algumas formas de enunciar esta formidável conjectura e delinear alguns dos progressos alcançados.*

[8]Universidade Federal do Amazonas

Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Conjetura de Birch e Swinnerton-Dyer

Fábio Ferrari Ruffino[9]

Resumo: *Nesta palestra, vamos enunciar e motivar a conjetura de Birch e Swinnerton-Dyer, que constitui um desafio particularmente significativo na matemática contemporânea. Começaremos com uma breve introdução às variedades algébricas e, em particular, às curvas algébricas. Em seguida, explicaremos o conceito de curva elíptica, mostrando a conexão com as integrais elípticas, que justifica o nome dado a estas curvas. Partindo destes pré-requisitos, poderemos definir o posto algébrico e o posto analítico de uma curva elíptica racional. A igualdade entre estes dois postos é o conteúdo da conjetura de Birch e Swinnerton-Dyer. Enfim, mostraremos alguns casos particulares significativos em que a conjetura foi demonstrada.*

[9]Universidade Federal de São Carlos

A conjectura de Poincaré: passado, presente e futuro

Francisco Vanderson Moreira Lima[10]

Resumo: *Em 1904, Henri Poincaré formulou uma conjectura a qual estimulou vários dos desenvolvimentos fundamentais da Topologia. Incluída entre os problemas do milênio em 2000, uma demonstração foi dada pelo matemático russo Grigori Perelman, em uma série de trabalhos de 2002 e 2003, os quais combinam técnicas de Geometria Diferencial e Equações Diferenciais. Nesta palestra explicarei o enunciado deste problema e as ideias por trás da sua solução. Além disso, falarei da importância do resultado, seu impacto na matemática atual, bem como as perspectivas de impacto em contribuições futuras.*

[10]Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Singularidades para as soluções das equações de Euler e Navier-Stokes: onde estamos

Helena Judith Nussenzveig Lopes[11]

Resumo: *Dinâmica dos fluidos incompressíveis é modelada pelas equações de Euler, no caso de viscosidade nula, e pelas equações de Navier-Stokes, quando a viscosidade não é desprezível. Estas equações têm algumas características muito semelhantes. Entre os problemas do Milênio elencados pelo Instituto Clay está a formação de singularidades, em tempo finito, a partir de dados suaves, para as soluções das equações de Navier-Stokes 3D. O mesmo problema se coloca para Euler. Além do interesse matemático estas questões são de grande relevância física, especialmente em vista da conexão com a modelagem de turbulência. Nesta palestra discutiremos o problema, as dificuldades e os avanços obtidos recentemente.*

[11]Universidade Federal do Rio de Janeiro

Hipótese de Riemann: 165 anos e contando...

Marco Vinicius Aymone[12]

Resumo: *Em 1859, o matemático Bernhard Riemann, em seu único trabalho em Teoria dos Números, revolucionou a forma como a matemática moderna lida com os números primos, introduzindo nesse contexto métodos complexo-analíticos. Para concluir o seu raciocínio, nesse trabalho ele precisou assumir que a famosa função que recebeu seu nome - Zeta de Riemann - tem zeros importantes somente na chamada linha crítica. Anos mais tarde, a comunidade nomeou esse enunciado como "hipótese de Riemann". Em 1900, no histórico congresso internacional de matemáticos realizado em Paris, David Hilbert enunciou uma importante lista de problemas, onde essa hipótese constitui o oitavo problema dessa lista. Muitas tentativas de tornar essa hipótese um teorema foram feitas desde então. Em 2000 foi incluída em outra lista - dos problemas do milênio do instituto Clay, rendendo 1 milhão de dólares para quem resolvê-la. Nessa palestra irei explicar como a função Zeta e a hipótese de Riemann nascem como um objeto natural no estudo da distribuição dos números primos, suas limitações e aspectos modernos dessa teoria, e também sobre minha própria tentativa de provar essa hipótese, que resultou numa conexão entre esse problema e um jogo probabilístico viciado de cara ou coroa.*

[12]Universidade Federal de Minas Gerais

O colorido problema do milhão da fundação Clay

Paulo Faria da Veiga[13]

Resumo: *Encaramos a difícil tarefa de apresentar a questão do confinamento dos quarks e glúons no modelo da Cromodinâmica Quântica das interações fortes na Física das Partículas Elementares, e a dificuldade matemática envolvida em sua demonstração: a existência de uma lacuna espectral no espectro conjunto dos operadores de energia e momento atuando no espaço de Hilbert quântico subjacente deste modelo. Nossa meta é que, com algum esforço, estudantes em nível mais avançado de graduação consigam capturar as ideias principais por trás deste valioso problema.*

[13]Universidade de São Paulo

Plenárias: ensino médio

UFSCar

XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Mágicas com fundamentação matemática

João Carlos Vieira Sampaio[14] e Pedro Luiz Aparecido Malagutti[15]

Resumo: *A arte de adivinhar ou prever números e cálculos aritméticos faz parte de nossa cultura matemática desde a primeira infância. Autores consagrados tem dedicado seu tempo a escrever livros sobre truques aritméticos de efeitos mágicos, dirigidos a audiências de todas as idades, baseados em propriedades, às vezes insuspeitas, advindas da teoria dos números. A arte de trabalhar com barbantes, para construir figuras, é parte do folclore de quase todas as culturas primitivas. Por séculos os homens desenvolveram esta arte com um grau de sofisticação comparável à arte do origami, realizada até hoje no Japão. Milhares de padrões e truques foram inventados, e esta arte parece encantar as crianças até hoje, principalmente se acompanhada de lendas e mistérios. Ela também é fonte de integração e sociabilidade. Pretende-se desenvolver ainda, nesta oficina, várias brincadeiras envolvendo geometria, topologia geométrica e lógica.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Simon, W.; **Mathematical Magic.** Dover Publications. New York, 1964.

[2] Gardner; **The unexpected hanging, Simon & Schuster.** New York, 1969.

[3] Gardner; **Mathematics Magic and Mystery.** Dover Publications, New York, 1956.

[4] Heath, R. V.; **Math e Magic.** Dover Publications, N. Y., 1953

[5] Carnielli, W. e Rathjen, M.; **Combinatória Indemonstrabilidade ou o 13º. trabalho de Hércules.** Matemática Universitária no 12, SBM.

[6] Benjamin, A., Shermer, M.B.; **Mathemagics: how to look like a genius without really trying.** Lowell House, L.A., 1993.

[7] Fulves, Karl.; **Self-Working Number Magic. 101 Fullproof Tricks.** Dover Publications, Inc., N.Y. 1983.

[8] Malagutti, P.L.A, Sampaio, J.C.V.; **Mágicas, Matemática e Outros Mistérios.** São Carlos: EdUFSCar, 2008.

[14] Universidade Federal de São Carlos
[15] Universidade Federal de São Carlos

[9] Malagutti, P.L.A, Sampaio, J.C.V.; **Mágicas com Papel, Geometria e Outros Mistérios.** São Carlos: EdUFSCar, 2012.

[10] Diaconis, P. Graham, R.; **Magical Mathematics. The mathematical ideas that animate great magic tricks.** Princeton: Princeton University Press, 2012.

Um passeio na OBMEP

Tomas Edson Barros[16]

Resumo: *Nesta exposição, contaremos um pouco da história e do funcionamento da OBMEP, explorando os programas e materiais de repositório armazenados em seus 18 anos de existência.*

[16]Universidade Federal de São Carlos

Comunicações Orais

XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Modelagem matemática e simulações computacionais para uma linha de produção

da Silva, Abner F. S.[17] e Silveira, Graciele P.[17]

Resumo: *A tomada de decisões é um processo muito importante em diferentes setores da sociedade. Frente a isso, a modelagem de sistemas produtivos possibilita a execução de simulações de cenários diversos, o que permite ter uma visão abrangente sobre determinado fenômeno. O propósito deste trabalho foi estudar um modelo matemático constituído a partir da equação diferencial parcial da conservação de massa, e implementá-lo computacionalmente, a fim de compreender o comportamento de uma linha de produção ao longo do tempo e do espaço.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, equação da advecção, método de diferenças finitas, linha de produção.*

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática, aliada às equações diferenciais e ao avanço dos métodos computacionais, constitui-se numa alternativa que auxilia no entendimento de determinados sistemas, ao longo do tempo.

O objetivo deste trabalho foi utilizar a modelagem matemática, mais especificamente a Equação Diferencial Parcial da Advecção, para estudar o comportamento de uma linha de produção ao longo do tempo e do espaço. Para efetuar a simulação de diferentes cenários, foi feita a implementação computacional das soluções numéricas, via Método de Diferenças Finitas na linguagem de programação Python.

MODELO MATEMÁTICO E SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Segundo [2], situações produtivas podem ser adequadamente modeladas por equações diferenciais parciais, apesar de não ser um modo tão difundido quanto outros, em termos de modelagem de sistemas de produção. Para avaliar e compreender o comportamento de uma linha de produção ao longo do tempo, [2] utilizaram a lei de conservação de massa.

[17] Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba.

Seja $\rho(x,t)$ a densidade de uma linha de produção e $q(x,t)$ o fluxo, que pode ser definido como $q(x,t) = v(x,t) * \rho(x,t)$ e v a velocidade da linha. A lei da conservação de massa para essa situação pode ser descrita como:

$$\frac{\partial \rho(x,y)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,y)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Além disso, seja o *Work in Process* (WIP) de uma linha de produção definido como segue:

$$w(t) = \int_0^1 (\rho(x,y))dx. \tag{2}$$

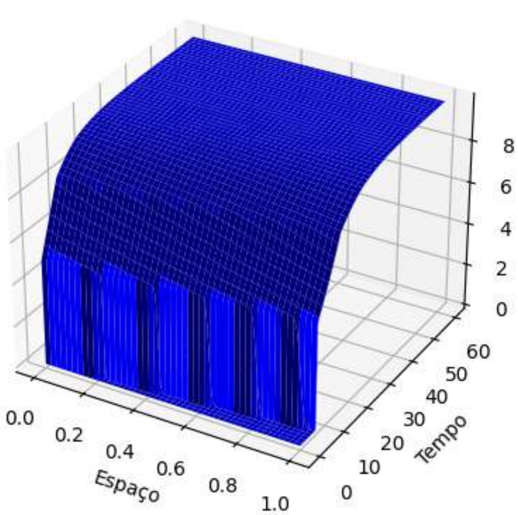
Ademais, é considerada uma relação entre a velocidade e a densidade para que a linha de produção seja melhor representada:

$$v(t) = \frac{\mu}{m+w}, \tag{3}$$

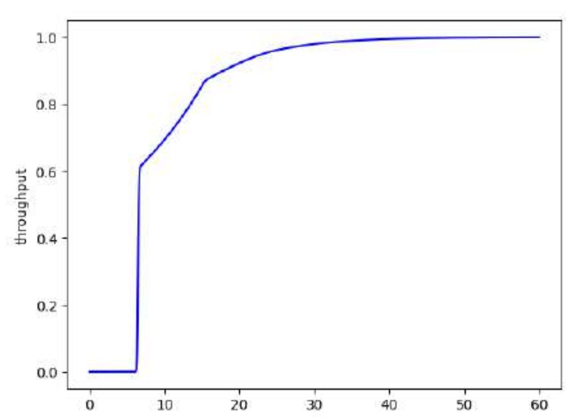
em que μ é a taxa de processamento na linha de produção, m um número de estações de trabalho idênticas e w o WIP.

Métodos de Diferenças Finitas, mais especificamente os métodos Up-Wind e Lax-Freidrichs [1] foram implementados computacionalmente, em linguagem Python, para a obtenção das soluções numéricas do modelo. A Figura 1 exibe os resultados alcançados via Método de Lax-Friedrichs. É possível observar a densidade da linha de produção ao longo do tempo, em cada intervalo de espaço da linha, sendo 0 o início e 1 o final da linha, além do *throughput* e do *flowtime*, os quais mostram, respectivamente, a saída de produtos em cada intervalo de tempo e o tempo médio de fluxo ao longo da linha de produção.

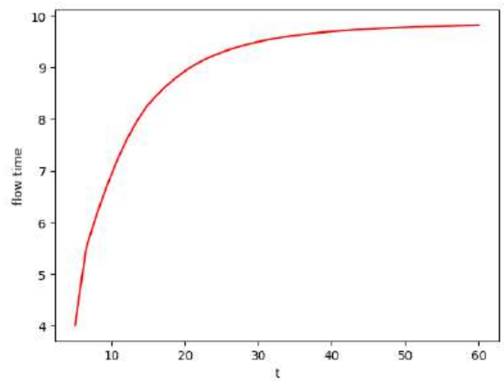
Fig. 1: Soluções numéricas encontradas para cada intervalo de tempo e espaço em (a), *throughput* em (b) e *flowtime* em (c).



(a)



(b)



(c)

Os gráficos apresentam o estado inicial, no qual o sistema ainda está se adequando à produção e à partir de um determinado momento, o fluxo se estabiliza de forma que as variações na densidade já não ocorrem.

CONCLUSÕES

Durante esta pesquisa, observou-se de forma clara a importância das equações diferenciais parciais - EDP's - na modelagem matemática de diferentes fenômenos, em diversas áreas do conhecimento. Quando consideradas para a modelagem de sistemas produtivos, tais equações proporcionaram uma visão satisfatória do comportamento da linha ao longo do tempo.

Desse modo, com os testes e simulações executados, os resultados mostraram-se adequados, indicando que a lei de conservação de massa, adaptada com aspectos inerentes à linhas de produção, e a resolução numérica a partir do Método das Diferenças Finitas, têm potencial para contribuir com a tomada de decisões, em situações relacionadas a ambientes produtivos. É importante destacar que uma validação dos resultados foi alcançada, por meio do *software* ProModel versão Student 2018, tendo em vista o caráter estocástico do problema em questão (com várias replicações).

BIBLIOGRAFIA

[1] LEVEQUE, R. J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems**. SIAM: Philadelphia, 2007.

[2] VAN DEN BERG, R; LEFEBER, E.; ROODA, K. Modeling and Control of a Manufacturing Flow Line Using Partial Differential Equations. IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2008 Jan;16(1):130–6.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Pluricentro e triângulos pluricêntricos

Vianna, Adolfo[18]

Resumo: *O propósito é introduzir o conceito de Pluricentro, interseção de cevianas de naturezas diferentes de um triângulo ABC, quando existe, e discutir algumas características dos triângulos dotados de tais pontos.*

Palavras-chave: *Triângulo, centro, ceviana.*

INTRODUÇÃO

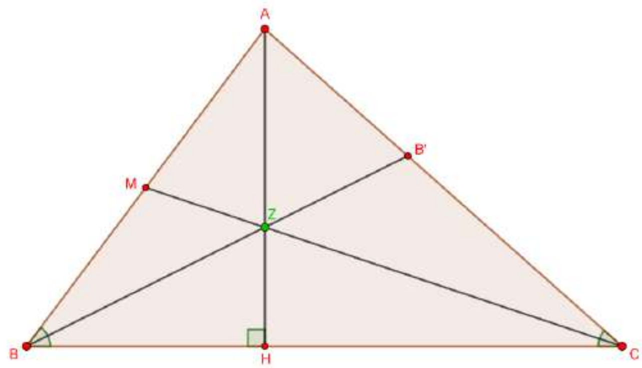
É bastante conhecido, por qualquer pessoa que tenha um conhecimento mínimo de Geometria Euclidiana Plana, o fato de que, em todo triângulo ABC, as três alturas sempre se interceptam em um mesmo ponto, denominado ortocentro, e que isso também ocorre com as bissetrizes internas dos ângulos internos, que se cruzam no incentro, e com as medianas, que se encontram no baricentro. Nosso interesse nessa Comunicação Oral é entender como se caracterizam os triângulos para os quais se dá a circunstância de que tenham um ponto comum: a altura que parte do vértice A, a bissetriz interna do ângulo relativo ao vértice B, e a mediana que corta ao meio o lado AB. Quando isso ocorre chamamos tal ponto de Pluricentro, e o triângulo dotado da peculiaridade, de Triângulo Pluricêntrico. Usando os teoremas de Ceva, de Pitágoras, da Bissetriz Interna e outros resultados vamos estabelecer condição necessária e suficiente, a ser atendida por lados e ângulos de um triângulo ABC, para que ele seja Pluricêntrico.

Definições

Seja ABC um triângulo e suponha traçadas a altura relativa ao vértice que corresponde ao maior de seus ângulos internos, a bissetriz interna de um segundo ângulo e a mediana que divide ao meio o lado oposto ao vértice que abriga o terceiro ângulo interno. Definimos Pluricentro, que representamos pela letra Z, se e quando existir, a interseção dessas três cevianas. Definimos Triângulo Pluricêntrico como todo triângulo em que se verifique a circunstância desse tríplice encontro. É trivial que o triângulo equilátero é pluricêntrico, mas nesse artigo nos interessamos apenas pelos triângulos pluricêntricos em que tal característica não seja uma obviedade.

[18]Universidade do Estado do Rio de Janeiro. adolfo.vianna@gmail.com

Fig. 2: Um triângulo ABC Pluricêntrico, com Pluricentro em Z



Aplicando o Teorema de Ceva, temos:

$$\frac{BH}{HC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AM}{MB}=1 \qquad (1)$$

AH é a altura relativa ao vértice A, logo os triângulos BHA e AHC são retângulos, e então:

$$BH = AB.\cos(\hat{B}) = c.\cos(\hat{B}) \text{ e } HC = CA.\cos(\hat{C}) = b.\cos(\hat{C}) \qquad (2)$$

A ceviana BB' é bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$, e, pelo Teorema da Bissetriz Interna:

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c} \qquad (3)$$

Finalmente, uma vez que CM é mediana do lado AB, $AM = MB$. (4)

Aplicando (2), (3) e (4) a (1), vem:

$$\frac{c.\cos(\hat{B})}{b.\cos(\hat{C})}\cdot\frac{a}{c}\cdot 1 = 1 \text{ ou } a.\cos(\hat{B}) = b.\cos(\hat{C}) \qquad (5)$$

Mas

$$a = b.\cos(\hat{C}) + c.\cos(\hat{B}) = a.\cos(\hat{B}) + c.\cos(\hat{B}) = (a+c).\cos(\hat{B}) \therefore \cos(\hat{B}) = \frac{a}{a+c} \qquad (6)$$

A expressão em (6) é condição necessária e suficiente para que um triângulo seja pluricêntrico.

Propriedades

- Para triângulo obtusângulo ou retângulo, a única possibilidade de existência para o pluricentro é se a altura partir do vértice do ângulo obtuso ou reto, pois é necessário que tal ceviana esteja contida no interior do triângulo;

- O segmento $B'H$, que liga os pés da altura e da bissetriz interna que concorrem no pluricentro, é paralelo ao lado AB, pois:

$$\frac{CB'}{CA}=\frac{BC}{AB+BC}=\frac{a}{a+c}=\frac{a-\frac{a.c}{a+c}}{a}=\frac{BC-BH}{BC}=\frac{CH}{CB}$$

Pontue-se que isso acarreta a semelhança dos triângulos ABC e $B'HC$, sendo assim naturalmente também pluricêntrico, e com razão de semelhança $\cos(\hat{B})$;

- Triângulo retângulo pluricêntrico: $\cos(\hat{B}) = \dfrac{c}{a}$, mas também

$$\cos(\hat{B}) = \frac{a}{a+c} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{a+c} \Rightarrow a^2 = ac + c^2$$

  Logo, $a^2 - ac - c^2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{c + \sqrt{5c^2}}{2} = c\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \Rightarrow \sec(\hat{C}) = cossec(\hat{B}) = \phi$ (número de ouro)

- Aplicando a Lei dos Cossenos ao lado AC,
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B}) \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\dfrac{a}{a+c}$ ou
  $b^2 = c^2 + a^2.\dfrac{a-c}{a+c} \Rightarrow \dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{a^2}{(a+c).(b+c)} = \dfrac{a}{a+c} \cdot \dfrac{a}{b+c} \Rightarrow$ como $a^2, (a+c)$ e $(b+c)$ são sempre positivos e, além disso, $a < a+c$ e $a < b+c$, o lado b é sempre o de medida intermediária, isto é, se $b-c$ e $a-c$ forem ambos positivos, teremos $c < b < a$, e, se $b-c$ e $a-c$ forem ambos negativos, teremos $a < b < c$;

- Como consequência imediata disto, o lado c não pode ser igual a nenhum dos outros dois (a não ser no caso que já comentamos ser indesejável, até certo ponto degenerado, do triângulo equilátero, trivialmente pluricêntrico), e, se $a = b$, temos
  $c^2 = 2ac\dfrac{a}{a+c} \Rightarrow c = \dfrac{2a^2}{a+c} \Rightarrow c^2 + ac - 2a^2 = 0$, equação do 2º grau, cuja solução é $a = c$, e que, pela transitividade da igualdade, leva a: $a = b = c$. Tudo isso leva à conclusão de que triângulos pluricêntricos não equiláteros são sempre escalenos;

- Um triângulo não pode ter dois pluricentros: no triângulo pluricêntrico, o vértice do ângulo dividido pela bissetriz interna se opõe ao lado de medida intermediária; logo, para haver outro pluricentro, é preciso que o vértice B seja de novo o da bissetriz, e que as outras cevianas "troquem vértices entre si", ou seja, que a altura saia de C para o lado AB, e a mediana, de A para o lado BC.v A igualdade $\cos(\hat{B}) = \dfrac{a}{a+c}$ precisa valer, também para a situação dessa "inversão de papéis", e então $\cos(\hat{B}) = \dfrac{c}{c+a}$. Isso implica $a = c$, que é impossível, pois triângulos pluricêntricos não equiláteros não podem ser isósceles, como vimos acima. Logo, **não existe triângulo com dois pluricentros**.

BIBLIOGRAFIA

[1] Euclides; **Os Elementos**. Editora UNESP, 2009.

[2] Ostermann, A.; Wanner, G. ; **Geometry by Its History.** Readings in Mathematics. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, 2012.

[3] Morgado, A. C.; Wagner, E.; Jorge M. ;**Geometria II (Métrica Plana)**. 4ª Edição. Editora VestSeller, 2008.

Dificuldades no ensino de cálculo I em cursos de engenharia a distância

Estudo e comparação com universidades de ensino presencial

Mansur, Ana Carolina Mendonça

Resumo: *A oferta de cursos a distância e semipresenciais tem ganho espaço no cenário acadêmico ano após ano. O método utiliza tecnologia e as facilidades por ela proporcionadas tornam-se aliadas no processo de aprendizagem. Fatores como tempo, local e faixa etária deixaram de ser um obstáculo para quem quer melhorar o currículo. Nos cursos de Engenharia, em especial, o desempenho em disciplinas do eixo comum como Cálculo continua sendo uma grande dificuldade por parte dos alunos. O estudo mostra possíveis causas e associação com estudantes de ambas as modalidades de ensino. Ressalta-se que a dificuldade de ingresso em uma instituição de ensino superior, como vestibular, torna-se divisor de águas no que diz respeito à base educacional obtida no ensino médio e fundamental.*

Palavras-chave: *Cálculo para engenharia, metodologia ativa, ensino híbrido.*

INTRODUÇÃO

A facilidade à informação fez do avanço tecnológico a razão pela qual grandes centros educacionais adaptaram a forma de oferecer o seu maior produto – o conhecimento. Este, associado à tecnologia, tornou-se uma estratégia eliminando barreiras como a distância, tempo, lugar, além da faixa etária dos estudantes (VIDAL E MAIA, 2010).

Pode-se dizer que a educação a distância no Brasil ocorreu de forma efetiva a partir de 2001, quando as Instituições públicas a ofertavam como opção de atividade complementar (GIOLO, 2008). No ano seguinte, Instituições particulares passaram também a ofertar a nova modalidade de ensino, haja vista uma possível disputa educacional.

No ensino a distância o aluno se torna sujeito ativo no processo de aprendizagem (CAPELETTI, 2014), tornando imprescindível a disciplina e busca constante por materiais complementares à sua formação. Outro fator crucial e muitas vezes negligenciado por parte dos alunos que se interessam por esse tipo de modalidade de ensino, é a necessidade de conhecimento básico nas tecnologias vinculadas às mídias utilizadas para acompanhamento das aulas e realização de atividades avaliativas. Freitas (2007) salienta os chamados "excluídos digitais", que muitas vezes associam a flexibilidade do ensino à distância, desvinculando-o da tecnologia envolvida em todo o processo.

METODOLOGIA DA MATEMÁTICA

Os cursos de engenharia exigem um embasamento teórico e uma base sólida no que diz respeito ao campo da matemática. Conhecimentos prévios abordados nos ensinos fundamentais e médio são imprescindíveis para o bom acompanhamento do curso, principalmente nas fases iniciais em que grande parte das disciplinas estão diretamente associadas ao emprego do cálculo e da física, constituindo o chamado eixo comum de disciplinas à formação de qualquer engenheiro.

O ensino da matemática nas escolas brasileiras pode ser visto como insatisfatória há muito tempo. Muitas formas de se avaliar o ensino foram criadas desde 1988, tendo como principal objetivo verificar a eficiência do mesmo. Libâneo (2008) salienta que ao acompanhar a qualidade daquilo que é ensinado e aprendido, vamos ao encontro aos direitos de todos os alunos no processo de aprendizagem.

O Exame Nacional do Ensino Médio, Enem, busca avaliar o nível dos discentes egressos, além de servir como uma prova para admissão em muitas universidades no Brasil. O exame realizado nos anos de 2011 e 2012 apontaram que dentre os estudantes inscritos, menos de 1/3 receberam a certificação que comprova o domínio e habilidade na área de conhecimento da matemática (Microdados ENEM 2011-2012).

Outra forma de analisar o processo de ensino diz respeito ao Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), aplicada a alunos de 15 anos. A pesquisa realizada em 2015 mostrou que dentre os 70 países inscritos, o Brasil ficou na posição 65 e, em comparação com os países sul-americanos, ficou à frente apenas do Peru. Essa pesquisa contempla não somente alunos de Ensino Fundamental e Médio da rede pública, mas também aqueles matriculados em escolas particulares. Alunos advindos de escolas particulares brasileiras tiveram notas inferiores se comparados a alunos de escolas públicas em países como a China (OCDE, 2016).

Mendonça Filho (2016) analisa que o ingresso de estudantes no Ensino médio aumentou nos últimos doze anos, mas isso não vai ao encontro à qualidade do Ensino oferecido. As razões para tal situação são diversas e dizem respeito não somente a falta de didática de muitos professores, mas também ao desinteresse por parte dos alunos (Cordeiro, 2017).

CONCLUSÕES

As dificuldades apresentadas por alunos de diferentes cursos e Instituições de Ensino Superior na disciplina de Cálculo I traz como causa comum uma base fraca no que diz respeito ao entendimento e compreensão da matemática de ensino fundamental e médio. Analisando-se mais à fundo, percebe-se uma certa convergência de desempenho dentre aqueles que são expostos a um concurso vestibular, por exemplo, e precisam apresentar domínio frente a seus concorrentes. Não é defendido o fato de uma prova em si, mas a relação entre aluno e estudo quando o mesmo está sob situações em que o conhecimento é posto à prova.

O ensino do Cálculo I na modalidade híbrida, além dos desafios também encontrados na educação presencial, aponta as dificuldades de se utilizar a tecnologia como aliado no processo de aprendizagem a um público cuja faixa etária, muitas vezes, está desassociada das mídias digitais.

As facilidades de acesso à informação de quando e onde, se tornam subutilizadas quando o sujeito que deveria ser ativo no processo não apresenta bagagem de conhecimento prévio e nem discernimento para compreender o propósito do ensino híbrido.

BIBLIOGRAFIA

[1] Capeletti, A. M.; **Ensino a distância: desafios encontrados por alunos do ensino superior**. Revista Eletrônica Saberes da Educação. v. 5, n. 1, 2014.

[2] Cordeiro, S. M. N.; **O contexto nacional do ensino e da aprendizagem em matemática**. Maringá-PR: UniCesumar, 2017.

[3] Freitas, M. C. D.; **Dificuldades e Limitações da Educação a distância no Brasil**. VII Seprosul. Semana de engenharia de produção sul-americana. Salto/Uruguai, 2007.

[4] Giolo, J.; **A educação a distância e a foramção de professores**. Educação e Sociedade, v. 29, n. 29, 1211-1234, 2008.

[5] Libaneo, J. C.; **Organização e gestão da escola: Teoria e prática**. 5ed. Goiânia: MF Livros, 2008.

[6] Mendonca Filho, J.; **Média em Matemática está entre as menores do PISA**. Portaç do MEC [online], 2016.

[7] Microdados ENEM.; Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Legislação e Documentos Brasília, DF, 2013.

[8] OCDE, PISA 2015 Resultados Clave: OCDE, 2016.

[9] Vidal, E. M.; **Introdução à educação a distância**. RDS Editora, 2010.

A lógica fuzzy aplicada ao poker

Branquinho, Ana Clara B. [19] e Silveira, Graciele P. [1]

Resumo: *Este estudo explora as incertezas por trás do jogo de cartas poker, focando na modalidade Texas Hold'em e em dados fornecidos por aplicativos já utilizados por jogadores. Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy foi elaborado com a intenção de avaliar comportamentos em ambientes de poker online, de modo a obter perfis de jogadores que podem, por exemplo, ter jogadas mais agressivas ou passivas e assim fornecer uma visão mais clara de quais ações tomar contra estes, durante um torneio.*

Palavras-chave: *Poker, modelagem matemática, lógica fuzzy.*

INTRODUÇÃO

O poker pode ser jogado tanto pessoalmente quanto online e oferece uma variedade de estilos e categorias. Entre estes, o *Texas Hold'em* se destaca como o favorito mundial. Este jogo, por muito tempo foi associado apenas à sorte e ao azar, sem muitas referências matemáticas para sua jogabilidade. Porém, em 2010 foi oficialmente reconhecido como um "esporte da mente" pela International Mind Sports Association (IMSA), ganhando o mesmo status que jogos como xadrez e bridge.

No Brasil, esse reconhecimento é muito significativo, pois valida o poker como um jogo mental e abre portas para uma maior aceitação e integração em ambientes competitivos formais, classificando-o como um jogo que desafia a mente e não apenas a sorte. Para os jogadores profissionais é um avanço, uma vez que reconhece as habilidades e o treinamento rigoroso necessários para o sucesso, mostrando cada vez mais a matemática por trás do jogo e exaltando sua complexidade que ultrapassa regras básicas disponíveis na internet.

O propósito deste trabalho foi construir um modelo matemático fuzzy, que combina variáveis de entrada importantes e fornece como saída o perfil de um jogador de poker.

ANÁLISE POPULACIONAL NO POKER

Para esta pesquisa, serão apresentadas as variáveis que dizem respeito ao momento *pré-flop*, que é crucial para que o jogador comece a se aprimorar. Em seguida, serão explicitados os detalhes do modelo matemático fuzzy elaborado.

No *Texas Hold'em*, cada jogador recebe duas cartas que pertencem apenas a esse jogador. Ao longo de várias rodadas de apostas, cinco cartas comunitárias são reveladas no centro da mesa.

[19] PPGECE, Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba.

O objetivo é combinar tais cartas com as pessoais, para formar a melhor mão de poker possível. As rodadas de apostas ocorrem antes do *flop* (três cartas comunitárias reveladas), antes do *turn* (quarta carta) e antes do *river* (quinta e última carta), oferecendo aos jogadores a oportunidade de apostar, passar ou desistir.

Para o jogo online, informações são compartilhadas em uma data base, chamada *HUD* [2]. Aplicativos como o **Poker Tracker** fornecem dados como: *VPIP* (Voluntary Put money In Pot), que indica o percentual de mãos em que um jogador decide colocar dinheiro no pote de forma voluntária; *PFR (Pré-Flop Raise)* representa a porcentagem de vezes que um jogador aumenta a aposta antes do flop; *3Bet* mostra a frequência com que um jogador aposta, logo após outra aposta feita por outro jogador antes do flop; *Fold to 3Bet* indica a porcentagem de vezes que um jogador desiste após enfrentar um 3Bet e *Call to Bet* que é a porcentagem de vezes que um jogador paga uma aposta.

Modelagem Fuzzy e Resultados

Os sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) consistem na tentativa de reproduzir a estratégia de um controlador humano na execução de tarefas. Um SBRF é constituído por módulos: fuzzificação, base de regras, inferência fuzzy e defuzzificação [1].

O estudo populacional (ou MDA) é um método que ajuda a identificar as características predominantes dos jogadores, em ambientes de poker online. Assim, o objetivo foi aplicar a lógica fuzzy para lidar com a incerteza inerente ao jogo, uma vez que a lógica tradicional não abarca totalmente a complexidade e a variabilidade das situações de jogo. Tal abordagem permite classificar os jogadores em um espectro mais amplo do que simples categorias binárias, proporcionando uma análise mais rica e detalhada das tendências comportamentais.

Dessa forma, foram consideradas cinco variáveis de entrada, que são classificadas com termos linguísticos usados por jogadores e estão resumidamente listadas a seguir:

VPIP: Tight (entra em poucas mãos, preferindo mãos mais fortes; conservador); Equilibrado (Participa de mais mãos que um jogador tight, mantendo cautela com uma variedade razoável de mãos) e Loose (entra em muitas mãos, adotando uma abordagem arriscada e agressiva).

PFR: Passivo (raramente aumenta a aposta antes do flop; abordagem mais cautelosa); Equilibrado (aumenta a aposta antes do flop com uma frequência moderada); Agressivo (frequentemente aumenta a aposta antes do flop; mostra força e tenta dominar o jogo).

3Bet: Passivo (raramente faz um re-raise antes do flop); Equilibrado (faz re-raises antes do flop com uma frequência razoável); Agressivo (faz re-raises frequentes antes do flop, aplicando pressão nos adversários).

Fold: Desiste Pouco (tende a continuar no jogo mesmo após um re-raise); Desistência Normal (balança entre continuar ou desistir após um re-raise); Desiste Muito (tende a abandonar a mão quando enfrenta um re-raise).

Call: Tight (raramente paga uma aposta antes do flop); Equilibrado (paga uma aposta antes do flop com frequência moderada); Loose (frequentemente paga apostas antes do flop, indicando uma abordagem mais arriscada).

Essas informações são valiosas para entender e antecipar as ações dos adversários, permitindo ajustes de estratégias em tempo real. A variável de saída do sistema é **Perfil do Jogador**, classificada em *Loser passivo* - jogador que não é lucrativo e joga de forma passiva; *Loser agressivo* - não é lucrativo e joga de forma agressiva; *Winner passivo* - lucrativo e joga de forma passiva, *Winner Agressivo* - lucrativo que joga de forma agressiva e *Winner Equilibrado*.

O método de inferência utilizado é o de Mamdani e a defuzzificação foi realizada pelo método Centro de Gravidade. Simulações estão sendo executadas no *software* MATLAB.

Simulação 1 Suponha que um jogador tenha as seguintes características: VPIP *Tight*, PFR *Passivo*, 3Bet *Passivo*, Fold *Desiste Muito* e Call *Tight*, então o SBRF construído forneceu como saída a probabilidade de que este jogador seja 100% *Loser Passivo*; trata-se de um jogador que pode estar apenas jogando por diversão.

Simulação 2 Suponha que um outro jogador apresente: VPIP *Equilibrado*, PFR *Equilibrado*, 3Bet *Agressivo*, Fold *Equilibrado* e Call *Equilibrado*. Logo, as probabilidades obtidas foram 20% para perfil Winner Agressivo e 80% para Winner Equilibrado. Este perfil sugere que o jogador está evoluindo de uma postura de "winner agressivo" para um estilo "winner equilibrado", indicando um refinamento nas suas habilidades.

CONCLUSÕES

A compreensão de dados presentes em aplicativos que guardam milhares de jogadas, é crucial para o desenvolvimento de jogadores iniciantes e a eficiência dos profissionais. A habilidade de interpretação rápida leva a decisões mais acertadas, em competições de alto nível. Para os novatos, acelera o aprendizado e os profissionais, que lidam com múltiplos torneios simultaneamente, ganham agilidade nas decisões. A aplicação de técnicas como a lógica fuzzy ao jogo de poker online, otimiza a análise de perfis e dinâmicas, elevando o poker a um campo de estudo sério e respeitado dentro da matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. **Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática**. Campinas: IMECC/UNICAMP, 2015.

[2] CARMANHANI, F. Estatísticas HUD. Disponível em: https://pokerbrasil.com.br/estatisticas-hud/. Acesso em: 30-04-2024.

Construções geométricas com a *Desmos Geometry*

Anna Alice Castro Mendonça[20] Valdelírio da Silva e Silva[21]

Resumo: *Este trabalho apresenta as funções das ferramentas da Plataforma Desmos Geometry e disponibiliza uma biblioteca de construções. Com algumas ferramentas, é resolvido um belo problema, com objetivo de relacionar o pensamento crítico envolvido nas construções geométricas com a teoria da geometria euclidiana, e a fim de corroborar a importância da relação entre esses dois elementos tendo-se intuito de solidificar os conhecimentos de geometria. Pela facilidade que o* Desmos Geometry *possibilita nas construções, aquele trabalho que demanda habilidades com régua e compasso físicos não mais são exigidos, e uma concentração maior no problema pode ser devotada, habilitando o usuário a desvendar possibilidades de soluções de problemas, cujas resoluções podem ser armazenadas ou compartilhadas.*

Palavras-chave: *Construções geométricas, geometria euclidiana plana, Desmos, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).*

MOTIVAÇÃO E OBJETIVO

As construções geométricas utilizando régua não graduada e compasso exigem sólido conhecimento das proposições de geometria e das propriedades das figuras [1], e talvez por isso não possuem mais espaço no desenvolvimento do ensino básico como um assunto em separado, como são de funções por exemplo. No entanto, alguns de seus conteúdos podem, ou mesmo deveriam, ser discutidos concomitantemente à exposição de partes do ensino da geometria euclidiana. Além de suscitarem fatos históricos da evolução matemática (como de contornar a falta de representatividade de números negativos e racionais na antiguidade da matemática grega), as construções geométricas realmente realçam a importância dos teoremas e corolários relacionados à geometria, pois diante de um problema, mesmo que ele seja de solução intuitiva, temos necessidade de dar uma justificativa. E na impossibilidade disso, recorremos aos conceitos e propriedades, não só da geometria, como os da álgebra que ocorrem nas operações/construções geométricas no tratamento de expressões algébricas [2].

Todo esse arcabouço de conhecimento e ações de aprendizagem nas construções são levadas pela restrição de realizá-las mediante uso somente da régua não graduada e compasso apenas, o que

[20]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: annaalicemendonca16@gmail.com

[21]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: valdel@ufpa.br

pode demandar tempo na aquisição de destreza na manipulação desses materiais. No entanto, sob utilização de softwares simulando as ações corriqueiras das construções, o usuário foca, depois de conhecimento prévio relativamente pequeno de como usar as ferramentas, nas ideias para a resolução do problema. Diferentemente de um espaço físico necessário para a construção, os softwares possibilitam criar, apagar, editar ou mesmo gerar várias páginas com as tentativas/resoluções de construções geométricas.

Neste trabalho objetivamos apresentar a *Calculadora de Geometria do Desmos* para mostrar as ferramentas de construção geométrica, usando também duas outras partes da calculadora gráfica inserida no software e compomos uma *biblioteca* de construções (Tangente, Perpendicular, Mediatriz, Bissetriz, Triângulo Qualquer, Arco Capaz, Baricentro, Circuncentro, Ortocentro e Incentro, Aplicação Arco Capaz, Expressão Algébrica do 2° grau) que podem ser usadas por outros professores ou alunos, com finalidade não apenas de dispor dos diversos botões e comandos equivalentes de ações, mas de despertar e provocar uso dessas ferramentas para auxiliar na construção do conhecimento da geometria euclidiana associando-a com a de construções geométricas.

AS FERRAMENTAS DA JANELA E UM BELO PROBLEMA

A Barra de Ferramentas

A *Barra de Ferramentas* possui 6 botões: Um cursor (): que habilita selecionar um elemento (`Select`) ou vários (`Box Select`) para edição (rotulação e disponibilização ou não de arraste de pontos, escolha de cores e indexação a uma pasta, permissão de omissão ou deleção de elementos, e transformações de translação, reflexão, dilatação ou rotação); Ponto para marcação no grid, ou de determinação de ponto-médio de um segmento; Linha que permite construir um segmento qualquer, uma reta, uma semi-reta e um vetor; Círculo, com ferramentas para construir um círculo, usar compasso e criar um arco; Ângulo o qual possibilita medir a abertura entre duas *linhas* ou criar um sem antes ter definidos lados concorrentes; e Polígono que habilita construções de polígonos.

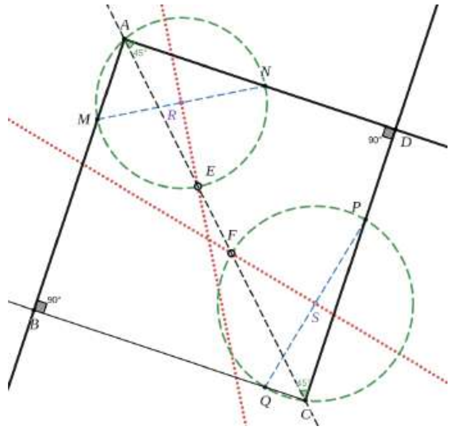
Janela de Expressões

Qualquer elemento inserido na janela gráfica possui um símbolo que pode ser manuseado algebricamente pela barra lateral de expressões, e por ela acessar as configurações para edição. A manipulação algébrica para composição e transformações sobre os elementos é feita com comandos específicos (`segment`, `angle`, `arc`, `line`, `ray`, `intersection`, `circle`, etc). Na verdade, toda uma construção pode ser feita somente pela janela de expressões! O tutorial mais completo que conhecemos está disponível em Desmos Studio Geometry User Guide, mas a biblioteca deste trabalho tem a maioria dos comandos dentro de suas construções.

Determinação de um quadrado dados ponto em cada lado

Sejam os pontos M, N, P e Q com cada um deles pertencente a um lado de um quadrado (ver figura 3). Construa o quadrado!

Fig. 3: Problema de determinação de um quadrado com 4 pontos, um de cada lado.



Fonte: autoria própria, disponível em Quadrado (4 pontos dados)!

Já que um quadrado tem seus ângulos internos retos, então deveremos pensar que a partir de dois pontos precisamos construir um desses ângulos. Da geometria euclidiana plana sabemos que num arco de circunferência, o ângulo central tem a mesma medida que a medida do arco correspondente; enquanto o ângulo inscrito (aquele cujo vértice está na circunferência) é metade do arco correspondente. Com isso, podemos construir os segmentos MN e PQ, determinar seus pontos-médios R e S, e sobre eles traçar circunferências com eles sendo centros e raios as distâncias deles até uma extremidade do segmento, conforme ilustra a figura (3). Observemos que qualquer ponto no arco acima de M e N forma com eles um ângulo reto, mas o vértice do quadrado deve ser tal que a diagonal do quadrado formará um ângulo de 45° com qualquer lado, ou seja, tal ângulo deve ser metade de um quarto de circunferência. Daí aparecem a necessidade de traçar nos pontos R e S perpendiculares a MN e PQ. As interseções de cada uma dessas retas com cada uma das circunferências, determinarão nelas arcos de 90° definidos por $\widehat{NE}$ e $\widehat{PF}$, e consequentemente, a reta que contém E e F determinará nas circunferência dois dos vértices do quadrado. Os passos seguintes compreendem apenas às construções das semi-retas $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{CD}$, cujas interseções determinarão os demais vértices! Com a ferramenta ângulo podemos medir todos os ângulos em questão e verificar a validade da construção!

BIBLIOGRAFIA

[1] Eduardo Wagner. **Uma introdução às construções geométricas**. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP: PIC – Programa de Iniciação Científica da OBMEP, 2016.

[2] Eliane Quelho Frota Rezende and Maria Lúcia Bontorim de Queiroz. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2016.

Introdução as superfícies mínimas

Barbiere, Anthony[22]; Pires, Thiago[23]

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo o estudo da teoria das superfícies mínimas, utilizando as técnicas da geometria diferencial. Serão trabalhado os conceitos mais importantes que definem uma superfície mínima, como por exemplo a relação entre a curvatura média e a área de uma superfície, através do cálculo variacional. Além disso, será feito um estudo, através de exemplos, das principais superfícies mínimas, em ordem cronológica, envolvendo toda a história do desafio que foi para os matemáticos chegar nos resultados que temos hoje.*

Palavras-chave: *Superfícies mínimas, cálculo variacional, problema de Plateau.*

INTRODUÇÃO

A teoria das superfícies mínimas é uma área fascinante da matemática que, apesar de ser bem antiga, ainda é bastante estudada nos dias atuais. Originou-se nos trabalhos de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) que em 1762 propôs o seguinte problema: provar que para cada curva fechada C sem auto intersecções no espaço tridimensional, existe uma superfície S de área mínima tendo C como fronteira. Lagrange apresentou este problema como exemplo de um caso particular do método desenvolvido por ele para achar curvas e superfícies que minimizassem quantidades como área, comprimento e energia. Esse método serviu como base para criar o que hoje conhecemos como Cálculo das Variações.

Problemas envolvendo minimização ganharam mais visibilidade em virtude dos experimentos do físico belga Joseph Plateau (1801-1883). Através de experimentos envolvendo películas de líquido sob ação de uma tensão superficial (obtidas ao mergulhar uma moldura de arame em uma solução de sabão), Plateau deu uma interpretação física ao problema de minimizar áreas com uma dada fronteira, como proposto por Lagrange. Seus estudos foram de extrema importância para propagação e formulação objetiva da questão, e por isso esse problema veio a ser conhecido como Problema de Plateau. O desafio de obter provas para os resultados experimentais de Plateau levou muitos matemáticos de renome a estudar as superfícies mínimas como Douglas, Radó, Weierstrass, Schwarz, Bernstein, Morse, Courant entre outros.

PRIMEIRA VARIAÇÃO DO FUNCIONAL ÁREA

Definição 4.1 *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de mínima se sua curvatura média H é identicamente nula.*

[22]Universidade Federal do Espírito Santo, anthony.barbieri@edu.ufes.br
[23]Universidade Federal do Espírito Santo, thiago.pires@ufes.br

Suponha que exista uma superfície regular S que seja solução para o problema proposto por Lagrange. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$, uma parametrização de S. Vamos fazer uma pertubação da área de S em um domínio qualquer para verificar quais condições devem ser satisfeitas para que S seja um ponto crítico da área. Para isto, escolha um domínio limitado $D \subset U$ e uma função diferenciável $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$, onde $\bar{D} = D \cup \partial D$ e $h(S \setminus X(D)) \equiv 0$. Seja $\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ uma variação normal de S em $X(\bar{D})$ determinada por h, ou seja,

$$\varphi(u, v, t) = X(u, v) + th(u, v)N(p),$$

onde $N : S \to S^2$ é a aplicação normal de Gauss com uma dada orientação. Para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, temos que $X^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ é uma parametrização para S^t. A área de S^t é dada por

$$A(t) = \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dA,$$

onde E^t, F^t e G^t são os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície S^t. Assim, a variação da área em $t = 0$, cujo os cálculos podem ser encontrados em $[1, p.235]$, é

$$A'(0) = -\int_{\bar{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2} dA.$$

Daí, segue de imediato o seguinte teorema que justifica o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies que possuem a curvatura média nula.

Teorema 4.1 *Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ uma parametrização de uma superfície regular S e $D \subset U$ um domínio limitado. Então $X(\bar{D})$ é mínima se, e somente se, $A'(0) = 0$ para todo D e para toda variação normal de $X(\bar{D})$.*

Demonstração: Se $X(\bar{D})$ é mínima, então $H \equiv 0$. Daí, é imediato que $A'(0) = 0$. Para demonstrar a recíproca, vamos supor por absurdo que existe $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$. Defina $h : \bar{D} \to \mathbb{R}$ de tal forma que $h(q) = H(q)$ e $hH > 0$, com $h \equiv 0$ fora de uma vizinhança de q. Então $A'(0) < 0$, o que é um absurdo. □

Assim, qualquer região limitada $X(\bar{D})$ de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de $X(\bar{D})$. Note que este ponto crítico não necessariamente é um mínimo, o que faz com que o uso da palavra mínima para classificar a superfície cause certa estranheza. Esta terminologia, introduzida por Lagrange em 1760, no entanto foi consagrada pelo tempo e sua utilização foi mantida desde então.

Achar exemplos de superfícies com $H \equiv 0$ não é, em princípio, uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples de superfícies que são gráficos de uma função $f(x, y) = z$ diferenciável, a condição $H \equiv 0$ é equivalente à equação

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x^2) \equiv 0. \tag{4}$$

Lagrange conseguiu chegar apenas nas soluções triviais da equação (4), a família de planos

$$f(x, y) = ax + by + c, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Se supormos que a superfície S, além de miníma, seja obtida através da revolução de uma curva da forma $\alpha(z) = (0, g(z), z)$, a equação (4) de Lagrange se reduz a equação

$$g(z)(g'(z))^2 + g(z) - (g(z))^2 g''(z) = 0, \ \forall z \in \mathbb{R},$$

cuja a solução é a curva geratriz de S, conhecida como catenária. Sua rotação em torno do eixo Oz gera a superfície chamada catenoide, descoberta em 1776 pelo matemático francês J. Meusnier.

$$y = g(z) = \lambda \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right), \text{ onde } \lambda > 0.$$

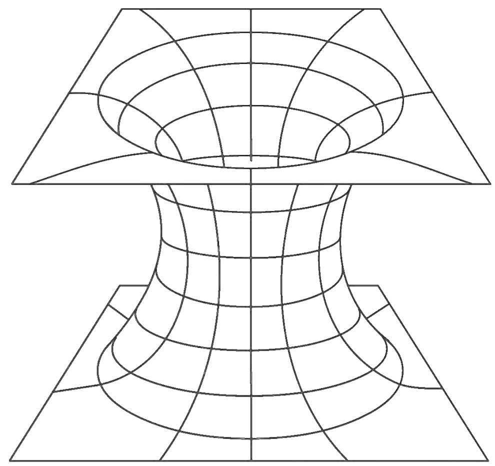


Fig. 4: Catenoide.

Uma parametrização do catenoide, a menos de movimentos rígidos, é dada por

$$X(\theta, z) = \left(\lambda \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) cos\theta, \lambda \cosh\left(\frac{z}{\lambda}\right) sen\theta, z\right), \text{ onde } 0 < \theta < 2\pi \text{ e } -\infty < z < \infty.$$

O estudo das superfícies mínimas se popularizou em muitos outros momentos no último século. Nos anos de 1980, o brasileiro Celso Costa, ao exibir a hoje conhecida superfície de Costa, mostrou ser falsa a conjectura de que o plano, o catenoide e o helicoide eram as únicas superfícies mínimas de topologia finita sem auto-intersecções no espaço tridimensional. Essa descoberta estimulou novamente a área e demonstrou a importância do uso de ferramentas computacionais para a visualização das superfícies estudadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Do Carmo, M. P. **Geometria diferencial das curvas e superfícies**. Rio de Janeiro, SBM, 2014, 619p.

[2] Do Carmo, M. P. **Superfícies Mínimas (16° Colóquio Brasileiro de Matemática)**, Rio de Janeiro, IMPA, 1987.

Planificações geométricas no ensino da geometria plana e espacial

Ataide, Antonio Adriano Neves[24]; Trindade, Cláudia Mikaele Moreira[25] e Braga, Roberta Modesto[26]

Resumo: *A Geometria, uma das bases da Matemática, desempenha um papel crucial no desenvolvimento do pensamento lógico e na compreensão das formas em nosso entorno, desde as pirâmides antigas até os arranha-céus contemporâneos. No ambiente educacional, o ensino da Geometria vai além da apresentação de figuras e fórmulas, visando ensinar os alunos como as ferramentas geométricas são necessárias para interpretar o mundo ao seu redor. As planificações dos sólidos geométricos surgem como uma técnica essencial, permitindo que os alunos visualizem e explorem estruturas complexas de maneira tangível e acessível. Estratégias pedagógicas como simulações e planificações tornam os conceitos geométricos envolventes e de fácil compreensão. Aulas expositivas detalhadas e dinâmicas facilitam a aprendizagem e entendimento das figuras planas e dos sólidos geométricos, enquanto simulados oferecem a oportunidade de aplicações práticas e avaliação dos conhecimentos adquiridos.*

Palavras-chave: *Matemática, sólidos geométricos, PIBID.*

INTRODUÇÃO

A Geometria é uma das áreas mais antigas e fundamentais da Matemática, desempenhando um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento lógico, do raciocínio espacial e na compreensão das formas e estruturas que nos cercam. Desde as pirâmides do Egito antigo até os arranha-céus modernos, a geometria está presente em diversas manifestações da vida cotidiana e em todas as áreas do conhecimento (Pantoja e Guedes, 2023).

Na sala de aula, o ensino da Geometria vai além de apresentar figuras e fórmulas, trata-se de fornecer aos alunos as ferramentas necessárias para compreenderem e interpretarem o mundo ao seu redor. Um aspecto crucial desse processo é a planificação dos sólidos geométricos, que consiste em transformar formas tridimensionais em figuras bidimensionais. Essa técnica permite aos alunos visualizarem e explorarem as estruturas complexas dos sólidos de uma maneira acessível e tangível.

[24] Universidade Federal do Pará, adrianoataide36@gmail.com
[25] Universidade Federal do Pará, claudiamikaele1999@gmail.com
[26] Universidade Federal do Pará, robertabraga@ufpa.br

Neste contexto, o presente trabalho tem como objetivo explorar a utilização de planificações e simulações como estratégias pedagógicas no ensino da geometria espacial. Com base em uma experiência em sala de aula, onde foram aplicadas atividades práticas e simulados sobre o tema, no subprojeto Matemática? Te puxa, bora aprender! vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Pretendemos destacar a eficácia desses métodos no engajamento dos alunos e na melhoria da compreensão dos conceitos geométricos tridimensionais. Ao longo deste texto, vamos explorar os conceitos básicos da Geometria Plana e Espacial, entender o que são planificações e como elas podem auxiliar na visualização dos sólidos geométricos, além de analisar os resultados obtidos com a aplicação dessas estratégias em um ambiente educacional.

Os conceitos relacionados à Geometria Espacial, muitas vezes podem parecer abstratos ou difíceis de visualizar para os alunos. É aqui que entram as planificações e simulados como ferramentas didáticas. Utilizando esses recursos, é possível tornar os conceitos geométricos acessíveis, palpáveis e interessantes, facilitando o processo de aprendizagem e permitindo que os alunos compreendam o tema. Corroborando com o que se foi dito Correa, Zanella e Menegatti (2022, p.1) dizem que “o estudo da Geometria na escola deve ser de forma que o estudante consiga compreender os conceitos e aplicá-los de forma coerente, bem como refletir sobre sua relevância nas mais diversas dimensões”.

A planificação dos sólidos geométricos é o processo de desdobrar as faces de um sólido de forma que possam ser representadas em um plano bidimensional, como uma folha de papel. Essa técnica permite aos alunos visualizarem e explorarem as formas tridimensionais dos sólidos de uma maneira acessível. Neste sentido Rigo (2013, p.4) diz que “há diversos modos para o professor ensinar geometria plana e espacial” através da planificação de formas geométricos. Metodologia da Pesquisa e Aulas Expositivas sobre figuras planas e sólidos geométricas.

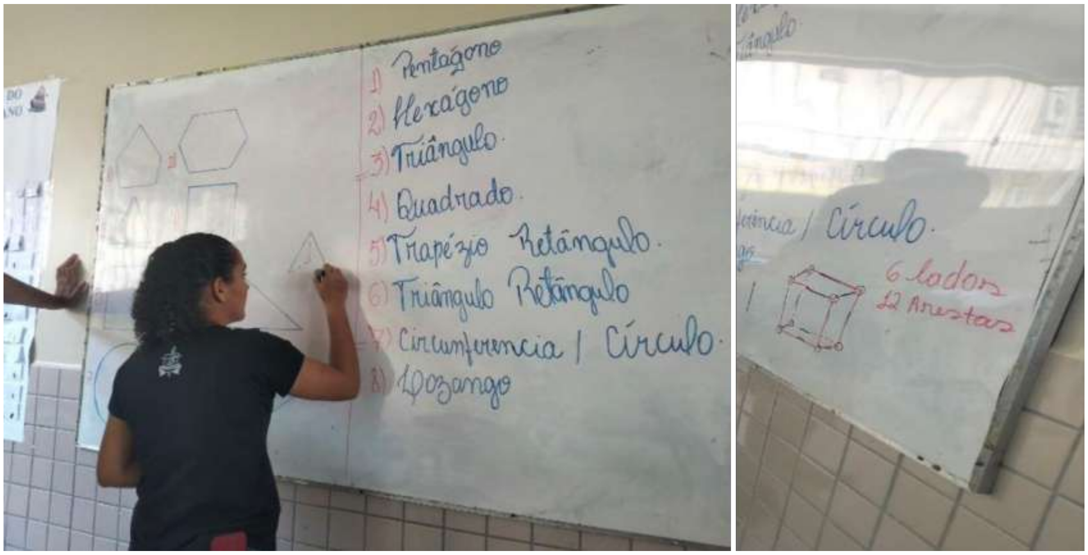
Metodologia da Pesquisa e Aulas Expositivas sobre figuras planas e sólidos geométricos

Para explicar sobre as figuras planas e os sólidos geométricos, foram realizadas duas aulas com alunos do 9º ano do ensino fundamental em um subprojeto de reforço escolar vinculado ao PIBID, em uma escola estadual do município de Castanhal-PA. As aulas foram divididas em dois encontros, de modo que fosse possível abordar detalhadamente cada um desses temas sem sobrecarregar os alunos.

O primeiro encontro, foi destinado a apresentação das figuras planas, expondo e exemplificando os conceitos fundamentais relacionados a essas formas bidimensionais, onde foi apresentado aos alunos uma variedade de figuras planas, como triângulos, quadriláteros, círculos e polígonos regulares e irregulares. Mostrando as propriedades e características de cada figura, incluindo número de lados, ângulos internos e externos, perímetro e área. Onde também foi discutido as diferentes classificações das figuras planas com base em suas características geométricas, ajudando os alunos a compreenderem a diversidade e a complexidade dessas formas.

Em seguida, no segundo encontro, a aula foi destinada a explicar sobre sólidos geométricos, onde foi apresentado aos alunos os conceitos fundamentais relacionados as formas tridimensionais. Exemplificando os sólidos, com desenhos no quadro com seus referidos nomes. Desse modo, foi demonstrado as características de cada tipo de sólido, incluindo suas faces, arestas e vértices. A princípio foram exemplificados os sólidos mais comuns, como cubos, prismas, pirâmides, cilindros e cones, de modo que os estudantes pudessem identificar suas propriedades e reconhecer suas aplicações no mundo real.

Fig. 5: Aula expositiva



Fonte: Repositório PIBID, 2023.

Mostra e construção dos sólidos

No último encontro, realizou-se uma dinâmica para que os estudantes pudessem compreender melhor a planificação das formas geométricas espaciais. Durante essa atividade, foram mostrados alguns sólidos. Foi utilizado um papelão com várias planificações pré-desenhadas, incluindo a planificação dos sólidos de Platão, e em seguida, um fio era puxado para demonstrar a formação espacial do sólido. Essa dinâmica aproximou mais os estudantes da geometria, pois permitiu que visualizassem a planificação dos sólidos e, em seguida, sua forma final.

Posteriormente, foi entregue aos estudantes papeis contendo a planificação de alguns sólidos, onde deveriam olhar a planificação dos sólidos, identificá-los e assim escolher qual desejava montar, logo os estudantes iam escolhendo e montando suas figuras, com essa dinâmica foi notório a empolgação dos estudantes em escolher e montar os sólidos.

Fig. 6: Mostra e Construção dos Sólidos

Fonte: Repositório PIBID, 2023.

Aplicação do Simulado

Para testar e aplicar os conhecimentos adquiridos durante as aulas e dinâmicas, foi elaborado e aplicado um simulado contendo planificações das formas geométricas. Essa atividade, proporcionou aos estudantes a oportunidade de revisarem os conceitos aprendidos e para avaliarem e aprimorarem suas habilidades. Ao resolver as questões do simulado, os estudantes puderam identificar suas áreas de domínio e aquelas que necessitam de maior atenção.

Além disso, este exercício prático incentivou uma abordagem crítica e reflexiva, permitindo que os alunos compreendessem a relevância e a aplicabilidade dos conceitos geométricos no contexto real. Através desta avaliação formativa, os estudantes foram capazes de ganhar confiança em sua capacidade de aplicar o conhecimento teórico e prático em situações do dia a dia, preparando-os para desafios complexos no futuro. Esta atividade também promoveu a interação entre os alunos, possibilitando a troca de experiências e o aprendizado colaborativo.

CONCLUSÕES

A compreensão da planificação dos sólidos geométricos é fundamental para diversos aspectos da educação Matemática. Primeiramente, ela auxilia os alunos na visualização e interpretação das formas tridimensionais, proporcionando uma transição entre o mundo tridimensional e o mundo bidimensional. Além disso, a planificação é uma ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio espacial dos alunos, ajudando-os a compreender a relação entre as diferentes faces, arestas e vértices dos sólidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Correa, D. N.; Zanella, E.; Menegatti, M. B.; **Construção de Sólidos Geométricos.** Anais da Feira Regional de Matemática-Rio do Sul, v. 1, n. 24, Rio do Oeste- SC, 19 de agosto de 2022.

[2] Pantoja, C. H. da C.; Guedes, C. M.; **Uma proposta para licenciatura em matemática para dos sólidos de Platão.** Universidade Federal do Pará – UFPA, Campus Universitário de Abaetetuba, Barcarena-PR, 2023.

[3] Rigo, I. do C.; **Geometria Plana e Espacial através da Planificação de Sólidos Geométricos.** Produções Didático-Pedagógicas: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE-Cadernos PDE. Versão On-line. v. II, ISBN 978-85-8015-075-9. Paraná, 2013.

Plano cartesiano: história e aplicações

Ataide, Antonio Adriano Neves[27]; Trindade, Cláudia Mikaele Moreira[28] e Almeida, Arthur da Costa[29]

Resumo: *O texto explora a importância da História da Matemática no ensino do Plano Cartesiano, destacando que cada descoberta Matemática oferece oportunidades de crescimento e superação. O Plano Cartesiano, criado por René Descartes, é apresentado como um método revolucionário na época para localizar pontos no espaço, unindo álgebra e geometria. O artigo propõe atividades lúdicas, como jogos, para tornar o aprendizado do Plano Cartesiano envolvente e significativo. Essas atividades incluem "Vivo ou morto das coordenadas cartesianas", "Batalha Naval das Coordenadas Cartesianas" e "Caça ao Tesouro", visando reforçar os conceitos teóricos enquanto incentivam habilidades de colaboração e resolução de problemas. A pesquisa destaca a escassez de informações sobre a origem do Plano Cartesiano na literatura, enfatizando a necessidade de abordagens que combinem compreensão histórica com prática e interatividade para inspirar os alunos e cultivar uma apreciação pela Matemática.*

Palavras-chave: *Plano cartesiano, história da matemática, jogos, dinâmicas.*

INTRODUÇÃO

Ao mergulharmos no mundo da Matemática, devemos lembrar que assim como na vida, cada nova descoberta é uma oportunidade de crescimento, cada novo problema, uma chance de superação, uma fonte de inspiração. Pois, no final das contas, o verdadeiro valor da Matemática não está nas respostas que encontramos, mas no processo de buscar, no aprendizado constante, e na jornada de descobertas que nos levam a lugares que jamais imaginaríamos alcançar.

Neste sentido, por que não falarmos da História Matemática (HM), que nos explica várias faces da Matemática, os caminhos seguidos para resolver um problema do passado que ainda hoje são lembrados e usados. Mais especificamente, falarmos da história do Plano Cartesiano. Visto que já estamos falando de caminhos a serem seguidos. O Plano Cartesiano é um perfeito exemplo, com suas coordenadas, pares ordenados, valores e quadrantes.

Portanto, o objetivo deste trabalho é contar um pouco da História da Matemática, explorar parte do plano cartesiano e relatar três experiências ao ensiná-lo com atividades lúdicas.

Segundo Oliveira, Oliveira e Vaz (2014, p. 459), a "A História da Matemática é um instrumento de investigação, das origens e descobertas, métodos e notações matemáticas que foram desenvolvidas ao longo do tempo, desde as antigas civilizações até os dias de hoje". Neste sentido, ao ensinar

[27]Universidade Federal do Pará, adrianoataide36@gmail.com
[28]Universidade Federal do Pará, claudiamikaele1999@gmail.com
[29]Universidade Federal do Pará, arthur@ufpa.br

utilizando a HM, como uma metodologia de ensino, busca-se levar para os estudantes a compreensão da origem histórica dos conteúdos matemáticos, atualmente presentes na grade curricular das escolas. Além disso, revelar o aspecto humano da Matemática, mostrando que ela não se resume apenas a cálculos e problemas, mas sim na capacidade humana de encontrar solução para eles.

Conhecer a história, seja de qualquer coisa é de vital importância, visto que passamos a compreender e ver de forma diferente, algo que antes parecia abstrato. Neste mesmo sentido, saber as coordenadas, ajuda a nos localizar no espaço, seja na cidade ou dentro de casa, saber pra onde ir e além disso saber como chegar lá. Saber se localizar se torna essencial para qualquer ser vivo, visto que não são só os seres humanos que precisam saber a onde e como chegar a algum lugar.

A história do Plano Cartesiano, vem a ser um exemplo de solução encontrada para um problema, de como expressar uma localização a outro. Sobre o motivo pelo qual Descartes criou o Plano Cartesiano, pouco se sabe a respeito. Oliveira (2023, p.31) menciona que "a invenção do Sistema de Coordenadas recebeu o nome do Filósofo, pois derivou de um projeto de Descartes, que iniciou a teoria matemática ao unificar a álgebra com a geometria mediante a invenção da geometria analítica".

Entretanto, de acordo com relatos encontrados no trabalho de Gulin e Rosário (2014, p.21), "dizem que o filósofo e matemático francês René Descartes estava descansando na cama quando viu uma mosca pousada na parede. Descartes ficou pensando como poderia explicar a outra pessoa qual era a posição exata da mosca na parede". Através desta dúvida, surgiu a ideia grandiosa dele para dar está explicação. Os mesmos autores relatam que "então ele imaginou duas retas perpendiculares: uma horizontal e outra vertical e que se fossem marcados números nessas retas, elas serviriam para localizar a mosca".

Apesar da incerteza de como se deu a criação do Plano Cartesiano, sabe-se que este método foi usado na cartografia. Utilizado na criação de mapas, usados por navegantes da época e ainda hoje ele é usado.

O Plano Cartesiano é fundamental na Matemática, usado para representar o espaço bidimensional, ele é composto por duas retas ou eixos perpendiculares, o eixo horizontal conhecido como eixo das abscissas e é representado pela letra x, e o eixo vertical é chamado de eixo das ordenadas, representado pela letra y.

Os eixos dividem o plano em quatro quadrantes, o ponto onde as retas se encontram, sendo o ponto de partida de ambas ou simplesmente a origem que é identificada com o número 0. As retas formam os pares ordenados, por exemplo a origem tem coordenadas $(0, 0)$, e outros tantos pares que podem ser formados. Vale lembrar que no par ordenado sempre o eixo x vem em primeiro e depois o eixo y, ficando assim as identificações dos pares ordenados (x, y).

O Plano Cartesiano, tem vários elementos a serem aprendidos, como visto acima. Neste sentido, por que não buscar uma metodologia que além de ensinar seja divertida e prazerosa. Junior (2022, p.12), compreende "que o aprendizado deve ser construído a partir de estratégias metodológicas diferenciadas, dinâmicas, interativas e colaborativas como o uso de jogos, proporcionando a compreensão dos conceitos de forma significativa.". Visto que essas atividades lúdicas proporcionaram uma abordagem prática, permitindo aos alunos explorarem e internalizarem os conceitos de coordenadas e relações espaciais de maneira interativa e prazerosa.

Aplicação de jogos/dinâmicas

Afim de ensinar os conceitos e aplicações do uso do Plano Cartesiano, serão relatadas a aplicação de jogos/dinâmicas como forma de treinamento complementar ao conteúdo, vivenciadas pelos autores durante a atuação no Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Vale ressaltar que antes da aplicação de qualquer atividade lúdica, foi necessário tirar um tempo para a ambientação dos estudantes com os conceitos básicos do tema em questão.

A primeira dinâmica utilizada foi o "Vivo ou morto das coordenadas cartesianas", que consiste basicamente no tradicional jogo "Vivo ou Morto". Onde são dados comandos e os jogadores devem segui-los. Os comandos dados na dinâmica citada, são coordenadas cartesianas dadas pelo "chefe". Logo, os estudantes se deslocam para o quadrante que o par indica. Assim, ao longo do tempo ocorrem erros e acertos, entretanto ninguém é retirado da brincadeira caso erre. Visto que os estudantes passam a aprender com seus próprios erros.

O segundo jogo utilizado, em um momento diferente, foi a "Batalha Naval das Coordenadas Cartesianas", neste o objetivo dos estudantes é encontrar as coordenadas correspondentes dos barcos e dessa forma localizar em que quadrante o par corresponde no plano, ali presente, cada barco possui uma pontuação diferente. Entretanto, eles podem acabar encontrando locais em branco, que não geram pontuação e também bombas, que acabam retirando pontos deles.

A última dinâmica trabalhada com os alunos, foi a "Caça ao Tesouro", neste diferente dos demais citados, os alunos não seguiam pares ordenados e sim direções, como norte, sul, leste e oeste. Seguindo as direções no mapa corretamente eles deviam encontrar o "tesouro", usado para tornar a experiência atrativa, usou-se uma caixa de Bis, como recompensa para a descoberta. Este jogo em questão, foi realizado em grupo, para se trabalhar conceitos de equipe e colaboração.

Os jogos mencionados acima foram utilizados com o intuito de reforçar e treinar os conceitos previamente trabalhados em aula sobre o Plano Cartesiano. E assim os estudantes pudessem aprender de maneira lúdica e divertida.

CONCLUSÕES

Ao refletirmos sobre o ensino da Matemática e, em particular, sobre o Plano Cartesiano, é evidente a importância de abordagens metodológicas que tornem a aprendizagem envolvente e significativa para os alunos. A História da Matemática, desempenha um papel fundamental nesse contexto, fornecendo informações sobre a origem e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao longo do tempo. Ao explorar a história do Plano Cartesiano, entendesse sua aplicação prática, motivações e os contextos que levaram à sua criação, como o desejo de René Descartes de resolver um problema concreto relacionado à localização de objetos no espaço.

Ao longo da pesquisa, constatou-se que pouco se encontra na literatura sobre a origem do Plano Cartesiano, visto que na maioria dos trabalhos encontrados dá-se prioridade a história de seu criador, René Descartes. Entretanto, não se aprofundam sobre o Plano Cartesiano.

Ao buscar métodos de ensino que combinem a compreensão da História da Matemática com atividades práticas e lúdicas, os educadores podem inspirar os alunos a desenvolver uma apreciação pelos conceitos matemáticos. Ao mesmo tempo, eles podem cultivar um ambiente de aprendizado que seja estimulante, desafiador e divertido. Assim, os alunos podem dominar os conceitos do Plano Cartesiano.

Além disso, ao incorporar atividades lúdicas, como os jogos, no ensino do Plano Cartesiano, como o "Vivo ou morto das Coordenadas Cartesianas", a "Batalha Naval das Coordenadas Cartesianas" e a "Caça ao Tesouro", os educadores têm a oportunidade de proporcionar uma abordagem prática e interativa para os alunos. Essas atividades reforçam os conceitos teóricos e incentivam a colaboração, o pensamento crítico e a resolução de problemas, habilidades essenciais para o sucesso em Matemática e outros aspectos da vida.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gulin, A. de C.; Rosário, R. R. L. do.; **História da Matemática e sua contribuição na compreensão do uso cotidiano dessa ciência.** Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE - Produção Didática Pedagógica na Escola, v.2. Curitiba, 2014.

[2] Junior, A. F.; **O Jogo no Aprendizado do Plano Cartesiano.** Universidade Federal Da Paraíba, Rio Tinto – PB, 2022.

[3] Oliveira, A. M. de.; **A necessidade da filosofia de René Descartes: método cartesiano.** Universidade Católica de Brasília: graduação em Filosofia. Brasília-DF, 2011, publicado em: 02/2023.

[4] Oliveira, V. C. de; Oliveira, C. P.; Vaz, F. A.; **A História da Matemática e o processo de ensino aprendizagem.** XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

Matearte

Poliana Alves de Brito, Barbara[30]

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo investigar e motivar o cenário do ensino e aprendizagem em Matemática. Diante de situações de falta de motivação para aprender a disciplina de Matemática que, integrado com a Arte, desenvolvemos este Projeto em 2013, em um Colégio Particular em Guarulhos. O objetivo do Projeto é aprimorar e encantar o aluno no ensino e abordagem de conteúdos da Matemática. Desse modo, a aprendizagem fica prazerosa e atrativa, desvinculando os conteúdos de métodos e abordagens do modo rígido e repetitivo de se propor.*

Palavras-chave: *Interdisciplinaridade, matemática, jogos, pós-graduação, ludicidade, integração.*

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática aliado ao ensino de arte busca desenvolver o raciocínio lógico, estimular o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de resolver problemas. No entanto, os educadores buscam alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico dedutivo e o senso cooperativo, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo no mundo social. Sendo assim, os jogos, se previamente planejados, são um recurso pedagógico eficaz para a construção do conhecimento.

A construção e utilização de jogos no ensino da Matemática tem o objetivo de fazer com que os alunos gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno. A aprendizagem por meio de jogos permite que o aluno construa a aprendizagem como um processo interessante e divertido.

Os jogos servem para introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os assuntos já trabalhados. Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la.

Essas construções de jogos não devem ser muito fáceis nem muito difíceis e ser testadas antes de sua aplicação, a fim de enriquecer as experiências através de propostas de novas atividades, propiciando mais de uma situação.

Os jogos construídos pelos alunos devem ter regras e são classificados em três tipos:

- Jogos estratégicos, onde são trabalhadas as habilidades que compõem o raciocínio lógico;
- Jogos de treinamento, os quais são utilizados para fixar um conteúdo já apresentado;
- Jogos geométricos, que têm como objetivo desenvolver a habilidade de observação e o pensamento lógico.

[30]PUC - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo .barbaracalculos@gmail.com

A construção de um jogo exige uma árdua elaboração para que haja uma competição entre os jogadores e os adversários, pois todos almejam vencer e para isso aperfeiçoam-se e ultrapassam seus limites.

Durante o desenvolvimento de um jogo, observar se o aluno se torna mais crítico e confiante, expressa o que pensa, elabora perguntas e elenca conclusões sem necessidade da interferência ou aprovação do professor.

No processo de apresentação dos jogos, o aluno é levado a fazer a verificação da solução, faz a revisão do que fez e estabelece regras, que podem ou não ser modificadas no decorrer de uma rodada.

METODOLOGIA

No dia seis (6) de maio comemoramos o dia da Matemática, e é nessa semana que os alunos apresentam seus jogos (em 2023 ocorreu de 18 a 22 de setembro), confeccionados manualmente - em casa ou no colégio em horário a ser agendado - com seus pais e colegas de grupo.

O jogo será criado e desenvolvido pelos educandos com a proposta de ser apresentado para todas as séries do colégio, assim eles serão responsáveis por apresentar e direcionar corretamente o conteúdo e andamento do jogo aos demais colegas do colégio, sendo eles já conhecedores ou ainda não do conteúdo abordado no jogo.

Será primordial que no momento de apresentação, haja regras claras e definidas, impressas em folha sulfite, para que os jogadores leiam e se apropriem do intuito do jogo. Para isso, uma semana antes, os educandos apresentarão os jogos já previamente elaborados ao professor responsável pelo projeto, para que este aponte melhorias para que ocorra aprendizagem efetiva no momento da apresentação.

Ficará a critério dos educandos a premiação para quem alcançar o objetivo do seu jogo. De fato, os que trazem uma proposta de recompensa serão mais atrativos e criarão expectativas maiores na competição.

No final da apresentação, os alunos envolvidos nas rodadas deverão avaliar os jogos apresentados em uma ficha descritiva, a qual servirá como norteadora para avaliação geral, na qual engloba desenvolvimento, estrutura, apresentação e atração.

RESULTADOS PRELIMINARES

A análise dos dados revela que o Projeto Matearte, aplicado durante 11 anos no Colégio Paulo Freire, em Guarulhos apresenta uma aprendizagem significativa, leva os educandos a terem contato com os conteúdos que virão nos próximos anos e estimula a curiosidade e contato maior com as propriedades e conceitos abordados pelos próprios alunos que se tornam protagonistas quando elaboram e apresentam o seu jogo.

No entanto, ao examinar a aplicação do Projeto Matearte em si, temos um desenvolvimento global dos alunos envolvidos na parte cognitiva e socioemocional, onde cada um se torna protagonista de sua própria aprendizagem. Além disso, merece destaque a representação mais igualitária das aplicações e generalizações, quebrando as correntes do currículo escolar classificado por séries/anos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALVES, E. M. S. ; **A ludicidade e o ensino de Matemática**. Campinas: Papirus, 2001. BATLLORI, J. Jogos para treinar o cérebro. Trad. Fina Iñiguez. São Paulo: Madras, 2004.

[2] BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática**. 4ª ed. São Paulo: IME-USP; 2002.

[3] BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] D'AMBRÓSIO, Ubiratan.; **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

Mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) e discurso matemático: aproximações referentes ao conhecimento matemático

Graff, Brenda [31] e Ribeiro, Miguel [32]

Resumo: *O MTSK foca-se no conhecimento especializado do professor de matemática para que os seus alunos entendam. Já o discurso matemático compreende a aprendizagem matemática como a aquisição de uma forma específica de discurso. Nesta comunicação, realiza-se uma discussão que aponta correspondências entre alguns dos subdomínios do MTSK com as categorias do discurso matemático, utilizando exemplos acerca do tópico decomposição dos números naturais. Espera-se que a partir dessas semelhanças e da conceitualização de Tarefas para a Formação, possamos alavancar o conteúdo do conhecimento matemático dos participantes da pesquisa para que estes possam promover o discurso matemático escolar. Devido as similaridades encontradas, outras pesquisas estão sendo desenvolvidas com o objetivo de validar o que já foi discutido, além de buscar outras possíveis aproximações.*

Palavras-chave: *MTSK, discurso matemático, decomposição dos números naturais.*

INTRODUÇÃO

Na literatura sobre formação de professores de matemática existem diversas discussões acerca do nível de profundidade de conhecimento matemático que o professor precisa ter para ensinar. Consideramos, a conceitualização do *Mathematics Teacher's Specialised knowledge* – MTSK (CARILLO *et al.*, 2018) que parte do pressuposto de que para desempenhar seu papel, o professor necessita de um conhecimento específico e especializado, tanto no domínio matemático, quanto no pedagógico. Uma outra perspectiva de pesquisa que tem sido desenvolvida assume a matemática como uma forma de discurso, tendo o neologismo *commogniton* (SFARD, 2008), cunhado a partir das palavras *communication* e *cognition*, surgindo como um lembrete que apesar das diferenças na visibilidade dessas duas atividades, podem ser usadas um único conjunto de ferramentas para investigá-las.

[31] Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), brenda.reche@gmail.com
[32] Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), cmribas78@gmail.com

Considerando a centralidade do conhecimento e do discurso matemático na e para uma prática matemática que possibilite que os alunos entendam matemática, nesta comunicação oral, efetuamos uma discussão teórica que inicia essa aproximação para alguns dos subdomínios do MTSK e os correspondentes elementos do discurso matemático e, para irmos além, ilustramos com alguns exemplos do tópico decomposição dos números naturais.

MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALISED KNOWLEDGE

A conceitualização do MTSK (CARRILLO *et al.*, 2018) considera dois domínios de conhecimento: o *Mathematical Knowledge* (MK) e o *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). O MK refere-se ao conhecimento matemático e possui três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). O KoT, refere-se ao que e de que maneira o professor conhece os tópicos que ensina, além de combinar o conhecimento que se espera que os alunos aprendam com uma abordagem mais profunda e com um grau maior de formalismo matemático. Incluem-se nesse subdomínio: (i) Procedimentos; (ii) Definições, Propriedades e Fundamentos; (iii) Registros de representação e (iv) Fenomenologia e suas aplicações. No tópico decomposição dos números naturais engloba conhecer, por exemplo, que a relação conceitual entre adição e multiplicação é um procedimento para a decomposição de um número (CEBOLA, 2002). O KSM refere-se ao conhecimento do professor relativo à estrutura da matemática e estabelece conexões apenas entre tópicos distintos. No tópico decomposição dos números naturais, por exemplo, inclui reconhecer as conexões existentes entre a decomposição e a exploração de sequências (RIBEIRO, 2022). Já o KPM está relacionado com as práticas matemáticas e inclui conhecer formas de demonstrar, justificar, definir, fazer deduções e induções, dar exemplos e compreender os contraexemplos. Um exemplo é conhecer que na decomposição dos números naturais as diversas relações estabelecidas com base na compreensão das operações (por exemplo, $23 + 11 + 9 = 23 + 20$; $39 - 17 = 39 - 10 - 7$; $17 - 8 = 17 - 10 + 2$) devem ser validadas para todos os números, procurando exemplos e até mesmo contra-exemplos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

O PCK está relacionado ao conhecimento relativo ao conteúdo matemático em termos pedagógicos e está dividido em três subdomínios: *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT), *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS). O KMT inclui o conhecimento do professor acerca de recursos e materiais didáticos, estratégias técnicas, tarefas, analogias e exemplos. No tópico decomposição dos números naturais inclui conhecer que o ábaco é um dos recursos que podem ser utilizados para desenvolver o entendimento do valor posicional e da decomposição dos números em ordens e classes (RIBEIRO, 2022). O KFLM engloba conhecimento associado as características inerentes e as maiores dificuldades e facilidades em relação a aprendizagem, buscando entender o desenvolvimento cognitivo dos alunos em relação a matemática geral e a seus tópicos específicos. Um exemplo associado a decomposição dos números naturais envolve conhecer que os alunos apresentam dificuldade em entender o porquê de ao efetuar a decomposição de um número é, geralmente, utilizado as unidades e dezenas em múltiplos de 10 (RIBEIRO, 2022). Já o KMLS inclui o conhecimento dos tópicos matemáticos a serem ensinados, bem como, das especificações curriculares contidas nos documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (CARRILLO et al., 2018). Na decomposição dos números naturais inclui conhecer que a BNCC aborda o tópico no 1.º ano dos Anos Iniciais iniciando com decomposição de números de apenas duas ordens e, a cada ano, aumenta o grau de complexidade (BRASIL, 2018).

DISCURSO MATEMÁTICO

Aprender matemática está relacionado a competência de produzir discursos (definido como diferentes formas de comunicação que possibilitam indivíduos de um mesmo grupo social se conhecerem e interagirem entre si) orais e escritos sobre objetos matemáticos (SFARD, 2008). O termo discurso se aplica a uma forma de comunicação diferenciada por uma série de características interrelacionadas:

(i) Uso de palavras: São as palavras-chave e o modo como são utilizadas que permitem a comunicação sobre um determinado objeto (SFARD, 2008). No âmbito da decomposição dos números naturais as palavras-chave geralmente usadas são: centena, unidade, dezena, valor posicional, algarismo, ordem, dentre outros.

(ii) Mediadores visuais: São símbolos que fazem parte do processo de comunicação, e quando bem manejados permitem que o sujeito entenda propriedades, fundamentos e definições (SFARD, 2008). No âmbito do tópico da decomposição dos números naturais, temos, por exemplo, os números em formato de algarismos, os sinais das operações e as expressões numéricas associadas a decomposição.

(iii) Narrativas: São descritas como sequências verbais que se referem a objetos do discurso e estão sujeitas a aprovação ou rejeição. Definições, provas, teoremas e propriedades de um objeto, por exemplo, são denominados de narrativas endossadas (SFARD, 2008). Um exemplo da decomposição dos números naturais é conhecer que o valor que um algarismo representa, depende da posição em que ele está localizado (LERNER; SADOVSKY, 1996). Muitas vezes, é necessário relembrar algumas narrativas endossadas para que se produza uma nova narrativa (SFARD, 2008) e, nesse caso, inclui conhecer que a decomposição dos números naturais pode ser retomada ao se discutir o uso do sinal de igual e a relação de igualdade entre números (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

(iv) Rotinas: São padrões repetitivos característicos de um discurso que fazem uso de palavras e de mediadores visuais para produzir narrativas. Uma rotina de exploração ocorre quando se há uma produção de narrativa sobre um objeto. Algumas das rotinas de exploração típicas do discurso matemático são as de demonstrar e definir (SFARD, 2008). Já uma rotina do tipo ritual acontece quando os locutores aderem ao discurso de um indivíduo que é considerado, por consenso, um especialista (SFARD, 2008). Um exemplo de decomposição dos números naturais é a utilização do ábaco em sua forma tradicional, já que o discursante apenas repete o procedimento no material como foi lhe ensinado (RIBEIRO, 2022).

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A partir das pesquisas que estão sendo desenvolvidas pelo CIEspMat (grupo de pesquisa e formação que discute o conhecimento interpretativo e especializado do professor de matemática), focamos as interrelações da conceitualização do MTSK (CARRILLO et al., 2018) e a teoria que considera a matemática como um tipo de discurso (SFARD, 2008), para, assim, podermos discutir as suas semelhanças acerca do conhecimento matemático requerido e envolvido na prática especializada do professor de matemática. Espera-se que a partir dessas semelhanças e da conceitualização de Tarefas para a Formação, possamos alavancar o conteúdo do conhecimento matemático dos participantes da pesquisa para que estes possam promover o discurso matemático escolar. Devido as similaridades encontradas, outras pesquisas estão sendo desenvolvidas com o objetivo de validar o que já foi discutido, além de buscar outras possíveis aproximações.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. Ed. Brasília: MEC, 2018.

[2] Carrillo et al.; **The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model**. Research in Mathematics Education. v. 20. n. 3, p. 236-256, 2018.

[3] Cebola, G.; **Do número ao sentido do número. Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 223-239, 2002.

[4] Lerner, D.; Sadovsky, P.; **O sistema de numeração: um problema didático**. In: PARRA, C; SAIZ, I. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.

[5] Ponte, J.; Branco, N.; Matos, A.; **Álgebra no ensino básico**. 2009.

[6] Ribeiro, M.; **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021, v. 4.

[7] Ribeiro, M.; **Recursos para entender os números e as operações: material dourado, ábaco e Quadro de Valor Posicional**. Campinas, SP: Cognoscere, 2021, v. 3.

[8] Sfard, A.; **Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

A resolução de problemas da perspectiva da aprendizagem

A jornada de um grupo de alunos até a elaboração do passo a passo para a resolução de problemas de Matemática

Pereira, Brenda Vaz[33]; Salvador, José Antonio[34]

Resumo: *Trata-se de um recorte da dissertação de mestrado em que foram trabalhadas habilidades e competências da resolução de problemas com questões da OBMEP de nível 1 e nível 2 em que o grupo de alunos desenvolveu um método próprio de resolução a partir dos estudos preparatórios para as provas. Essa comunicação tem o objetivo de mostrar que o trabalho em grupo pode ser uma potência na educação matemática quando alinhado com metodologias de ensino que promovem a autonomia dos alunos.*

Palavras-chave: *OBMEP, resolução de problemas, ensino de matemática.*

INTRODUÇÃO

Quando falamos sobre resolução de problemas, é possível de identificar vários pontos importantes. Neste trabalho, vamos nos basear nos trabalhos de POLYA (2006) e nos trabalhos de ONUCHIC (2012) em que ambos postulam um passo a passo para a resolução de problemas de Matemática. O que é importante para este trabalho, pois queremos dar luz a uma produção feita pelos alunos durante o desenvolvimento do trabalho de dissertação da autora em que foram desenvolvidos alguns desses passos para resolver questões da OBMEP nos anos finais do ensino fundamental.

O grupo de alunos, que era misto, composto por alunos do 6º ano ao 9º ano, teve seus estudos realizados durante 8 meses com encontros semanais e posteriormente quinzenais e teve como objetivo, estudo e aprofundamento da Matemática com o objetivo da realização das provas da OBMEP 2021 e reparação dos conhecimentos matemáticos em virtude do contexto pandêmico anual.

Trajetória e desenvolvimento do passo a passo dos alunos

Por se tratar de um recorte da dissertação de mestrado, neste trabalho, vamos tratar especificamente do processo de desenvolvimento do passo a passo para a resolução de problemas

[33] Faculdade SESI-SP de Educação de São Paulo.
[34] UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

que os alunos integrantes do grupo de estudos postularam a partir das discussões e das questões que foram apresentadas ao longo dos encontros.

Após a definição das questões que seriam abordadas com os alunos durante os encontros, foi iniciada uma discussão sobre a forma como a Matemática era apresentada e estudada por eles durante as aulas, por memorização, anotações, cópias, exercícios de repetição, entre outras formas.

Ao longo dos encontros, foi apresentado o esquema de POLYA (2006) a seguir, com as devidas adaptações para que cada um pudesse compreender o processo de disposição e conexão de dados e construção das informações que esses dados vão produzir para que ao final, seja possível extrair o que se pede para iniciar o processo de resolução.

Fig. 7: Como resolver um problema segundo POLYA (2006)

Compreensão do Problema	
Primeiro: é preciso compreender o problema	Quais são os dados? São suficientes para satisfazer o que se pede?
Estabelecimento de um Plano	
Segundo: encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução	Pense no que já sabe sobre isso. Resgate na memória o que já estudou ou leu sobre o assunto e o que pode te ajudar. Quais são as informações que são necessárias para estabelecer uma proposta? Já viu algo semelhante a essa situação? Qual foi sua postura diante disso?
Execução do Plano	
Terceiro: Execute seu plano	Inicie seu processo de resolução baseado no que fez até agora. O que você já identificou? O que você já sabe sobre isso? O que você já resolveu? Comece sua resolução.
Retrospecto	
Quarto: Examine a solução obtida	Quando acabar, volte e examine seus passos. Estão corretos? É possível fazer o caminho contrário para chegar ao início? É possível fazer o que você fez por outro caminho?

Fonte: (Pereira, 2022).

A partir do passo a passo de POLYA (2006) e das mediações da docente, os estudos foram conduzidos de modo que os alunos fossem colocados a falar sobre a forma como resolveriam as questões a partir de situações já vivenciadas por eles mesmos durante os encontros e nas aulas de Matemática e assim se desenhou um padrão que podemos observar no quadro a seguir:

Fig. 8: Como resolver um problema segundo o grupo de estudos

(I)	Fazer uma leitura inicial para absorver as informações e ir relacionando com os conhecimentos prévios;
(II)	Anotar os dados que foram identificados como importantes e organizá-los de forma coerente;
(III)	Reconhecer o conteúdo da questão e identificar se sabemos fazer ou não;
(IV)	Se souber fazer, começar a resolução, se não souber, pular para a próxima e depois voltar;
(V)	Colocar como objetivo resolver todos os itens (a) dos problemas;
(VI)	Depois de ter feito todos os itens (a), voltar e fazer os outros conforme for conseguindo resolver.

Fonte: (Pereira, 2022).

CONCLUSÕES

Utilizar a resolução de problemas como estratégia para desenvolver métodos próprios como passo a passo de modo que auxiliem os alunos em seus estudos, pode ser um aliado potente no processo de ensino de Matemática. Os objetivos que devem ser alcançados, precisam ser claros e bem definidos aos alunos para que não haja dúvidas em seus desenvolvimentos e quando essa construção é feita em conjunto, os resultados podem ser melhores e mais robustos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Onuchic, L. R.; **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

[2] Pereira, B. V.; **Harmonia entre a OBMEP e a resolução de problemas nos anos finais do ensino fundamental**. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2022. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/17320.

[3] Polya, G.; **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Problemas recreativos na obra "O homem que calculava"

Da Silva Perez, Carla Fernanda[35]

Resumo: *O presente artigo tem por objetivo geral apresentar como os graduandos do 1º semestre de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação – SP demonstraram, utilizando recursos manipuláveis, representação teatral, recursos tecnológicos, entre outros, a Matemática Recreativa presente nos problemas propostos no livro "O Homem que Calculava". Para tal, realizaram a leitura minuciosa da obra e visitaram a exposição intitulada "Virada Malba Tahan", organizada pelo Centro de Aperfeiçoamento e Ensino da Matemática da Universidade de São Paulo (CAEM – USP). A metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa caracteriza-se, quanto a sua abordagem, como uma pesquisa qualitativa e quantos ao objetivo como exploratória, utilizando como aportes teóricos Bezerra (2022), Segantini e Siqueira Filho (2016), Lindolfo (2021), Gardner (1961) e Tahan (2008). Como resultados, destaca-se que a obra "O homem que calculava" apresenta potencial voltado para a Matemática Recreativa como uma opção lúdica para o ensino da Matemática e pode nortear o planejamento de situações de ensino-aprendizagem envolvendo o uso de jogos, resolução de problemas por investigação, o uso de tecnologias, a história da matemática e, principalmente, o incentivo à leitura e à escrita nas aulas de matemática, como foi demonstrado pelos graduandos. Ressalta-se, ainda, a contribuição para a formação integral dos estudantes, pois incentiva o raciocínio lógico, a reflexão, a comunicação, a argumentação e o trabalho colaborativo.*

Palavras-chave: *Matemática recreativa, Malba Tahan, O homem que calculava, resolução de problemas.*

INTRODUÇÃO

Publicado pela primeira vez em 1937, o livro intitulado "O homem que calculava" foi escrito pelo professor e matemático brasileiro Julio Cesar de Mello e Souza. Nascido em 06 de maio de 1895, o professor Mello e Souza escreveu diversos livros de didática e ensino de Matemática sob o pseudônimo Malba Tahan, sendo arauto e precursor de uma nova forma de ensinar a Matemática, destacou-se como popularizador da disciplina. No ano de 2013, o Governo do Brasil instituiu, em sua homenagem, a data de seu nascimento como o Dia Nacional da Matemática. Em sua obra mais famosa, "O homem que calculava", Malba Tahan (2008) uniu com maestria matemática e literatura ao contar as aventuras do calculista persa Beremiz Samir, um hábil matemático que

[35]Este autor foi apoiado pela Faculdade Sesi de Educação – SP.

aplicava seus conhecimentos de modo extraordinário durante incontáveis histórias vivenciadas ao longo de sua viagem por Bagdá. Os problemas citados no livro resgatam de maneira recreativa conteúdos matemáticos da educação básica, como, por exemplo, o conjunto dos números racionais.

Diante disso, no dia 06 de maio de 2023, os graduandos do 1º semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação - SP foram convidados a visitarem à mostra intitulada "Virada Malba Tahan". Organizada pelo Centro de Aperfeiçoamento e Ensino da Matemática da Universidade de São Paulo (CAEM – USP), a exposição interativa conta com diversas atividades, tais como oficinas, palestras e salas temáticas que contam a vida e demonstram as obras do autor.

Após a leitura cuidadosa da obra e a visitação à exposição, os futuros professores foram desafiados, na unidade curricular Números e Operações em Diferentes Contextos, a apresentar os diferentes problemas matemáticos propostos em "O homem que calculava" de modo recreativo.

Nesse contexto, o presente texto tem por objetivo apresentar como os graduandos do 1º semestre de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação – SP demonstraram, utilizando recursos manipuláveis, representação teatral, recursos tecnológicos, entre outros, a Matemática Recreativa presente nos problemas propostos no livro "O Homem que Calculava". A metodologia utilizada para o desenvolvimento da pesquisa caracteriza-se, quanto a sua abordagem, como uma pesquisa qualitativa e quanto ao objetivo como exploratória.

Matemática Recreativa na obra "O homem que calculava"

A Matemática Recreativa, subárea da Educação Matemática, vem se popularizando dada a sua importância para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Apesar do nome indutivo, esse campo da Matemática não trabalha só com gamificação, mas sim em todas as ativdades com caráter lúdico-pedagógico, como reforça Bezerra (2022), quando define a Matemática Recreativa como

> uma abordagem metodológica em Educação Matemática que pode contribuir para propósitos mais gerais, por exemplo: promover o aprendizado; relacionar conteúdos estudados em sala de aula com a História da Matemática; proporcionar entretenimento/entusiasmo, dentro e fora da sala de aula, e servir como meio de popularização da Matemática (2022, p. 142)

Precursor da Matemática Recreativa, o americano Martin Gardner (1914-2010) foi, durante 25 anos, responsável pela coluna Mathematical Games da revista americana Scientific American onde apresentava problemas cheios de ludicidade. O autor (1961) define a Matemática Recreativa como aquela que apresenta jogos, quebra-cabeças e problemas curiosos e divertidos.

Corroborando, Segantini e Siqueira Filho (2016) afirmam que os problemas recreativos podem introduzir conceitos, desenvolver estratégias de resolução de problemas e, ainda, despertar a criatividade e a imaginação. Por trabalhar conceitos da realidade, a Matemática Recreativa se mostra uma excelente ferramenta pedagógica, uma vez que não se resume à fórmulas e algoritmos a serem seguidos.

Diante do exposto, quando se trata especificamente da obra "O homem que calculava" de Malba Tahan, a Matemática Recreativa se mistura com a literatura para abordar de maneira lúdica diversos conteúdos matemáticos. Além disso, o autor traz elementos culturais, evidenciando a história da matemática, como reforça Lindolfo (2021)

> Malba Tahan defende a utilização da Matemática Recreativa para o ensino-aprendizagem, já que julga importante utilizar as recreações matemáticas, pois dão ao professor a oportunidade de motivar os seus alunos a ter uma nova visão da Matemática, tornando o seu ensino interessante, agradável, curioso e divertido. Dessa forma, Malba Tahan revolucionou a maneira como os professores ensinavam, criando formas inteiramente novas e cativantes de abordar a Matemática (2021, p. 24)

Nesse contexto, os graduandos do primeiro semestre curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade Sesi de Educação – SP, divididos em grupos, sortearam um dos problemas selecionados e foram desafiados a usar a criatividade para apresentar sua respectiva resolução usando materiais manipuláveis, recursos tecnológicos, representação teatral, jogos, entre outros. Os resultados desse trabalho foram expostos na Semana Acadêmica da Faculdade Sesi de Educação - SP, que aconteceu na semana de 19 a 23 de junho de 2023, como ilustra a figura abaixo:

Fig. 9: Alunos apresentam o problema da "Pérola mais leve" com material manipulável

Fonte: a autora (2023).

Por fim, vale destacar que as obras de Malba Tahan são excelentes recursos pedagógicos para o trabalho de diversos conteúdos nas aulas de Matemática, como reforça Bezerra quando afirma que possibilita "[...] promover na sala de aula o aprendizado da Matemática associado à investigação de problemas curiosos, desafiantes e divertidos" (2022, p. 16) e ainda viabilizam o letramento matemático de maneira intuitiva e instigante.

CONCLUSÕES

Diante do exposto, destaca-se que a obra "O homem que calculava" apresenta potencial voltado para a Matemática Recreativa como uma opção lúdica para o ensino da Matemática e pode nortear o planejamento de situações de ensino-aprendizagem envolvendo o uso de jogos, resolução de problemas por investigação, o uso de tecnologias, a história da matemática e, principalmente, o incentivo à leitura e à escrita nas aulas de matemática, como foi demonstrado pelos graduandos. Ressalta-se, ainda, a contribuição para a formação integral dos estudantes, pois incentiva o raciocínio lógico, a reflexão, a comunicação, a argumentação e o trabalho colaborativo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bezerra, M. C.A.; **Concepções, Aspectos e as Principais Tarefas da Matemática Recreativa.** Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA), 7.1: 141-

152,2022.

[2] Gardner, M..;**Divertimentos Matemáticos.** São Paulo: Ibrasa, 1961.

[3] Lindolfo, B. ;**Matemática Recreativa: uma proposta didática a partir da obra "O homem que calculava"de Malba Tahan.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto/PB, 2021.

[4] Tahan, M. ; **O Homem que Calculava.** 72. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[5] Segantini, C., Siqueira Filho, M. G. ;**O problema de dois 21 copos, extraído da obra O homem que Calculava, de Malba Tahan**. Educação Matemática Contemporânea: desafios e possibilidades. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo-SP , 2016.

Dispositivo prático para desenvolvimento do binômio da forma $(ax + b)^n$

da Silva Junior, Carlos Alberto[36];

Resumo: *O desenvolvimento do Binômio de Newton, em geral, está relacionado com o cálculo dos números binominais ou com o desenvolvimento do Triângulo de Pascal. Apesar de serem contas simples, podem ser trabalhosas. Nesse trabalho é apresentado um dispositivo prático que utiliza derivação e recorrência para expandir os termos do binômio. É um procedimento simples e elegante que facilita no uso desse objeto.*

Palavras-chave: *Binômio de Newton, análise combinatória, dispositivo prático para o binômio.*

INTRODUÇÃO

A expansão do binômio $(ax+b)^n$ tem um importante papel em diversas áreas, como matemática, física, engenharia e outras ciências. Uso em manipulações de polinômios, cálculos de probabilidades, séries infinitas são algumas das muitas aplicações da expansão desses binômios. Em geral, na expansão desses binômios $(ax + b)^n$ são envolvidos números binomiais e suas propriedades[1]. Esforços para resolução de binômios foram encontrados nos trabalhos de Euclides, para o caso $n = 2$, até os estudos de Newton e de Leibniz, que melhoram os resultados obtidos por Pascal e Bernoulli, sempre partindo da análise combinatória.[2].

Apesar de serem contas simples, o desenvolvimento de binômios com um valor elevado de expoente pode ser trabalhoso e, por isso, um dispositivo prático que permita a obtenção dos coeficientes de forma mais simples ajude no uso do binômio. Aqui apresentamos uma alternativa que utiliza técnicas de cálculo diferencial e uma fórmula de recorrência para expandir o binômio $(ax + b)^n$, sendo esse um dispositivo simples e eficaz.

Dispositivo Prático para o desenvolvimento do Binômio $(ax + b)^n$

O Dispositivo prático a ser apresentado é baseado numa fórmula de recorrência, onde cada termo é obtido pela derivada do termo anterior, dividido por uma correção, que está relacionada com a posição que o termo ocupa na sequência da expansão e os coeficientes do binômio. Para chegar ao dispositivo, vamos provar que o termo geral do binômio $(ax + b)^n$, denotado por T_k, pode ser obtido por derivação sucessiva.

[36]Universidade Federal de São João del-Rei - MG - Departamento de Matemática e Estatística, carlosdamat@ufsj.edu.br

Teorema 4.2 *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, temos que o termo geral do binômio $(ax+b)^n$ é dado por*

$$T_k = \frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)a^{n-k}b^k}{k!}.$$

Demonstração: Precismos mostrar que o termo geral $T_k = \frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)a^{n-k}b^k}{k!}$ tem o mesmo valor que $T_k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(ax)^{n-k}b^k$, que é o termo geral obtido pelo desenvolvimento do binômio por números binomiais [2].

Observe que

$$\frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(\cdots)\cdot(n-(k-1))x^{n-k}}{k!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{x^{n-k}}{k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}(x^n)a^{n-k}b^k}{k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(ax)^{n-k}b^k,$$

como se queria demonstrar. ■

Com isso, podemos enunciar o dispositivo prático para desenvolver o binômio $(ax+b)^n$, usando derivação.

Corolário 4.1 *Cada termo do desenvolvimento do binômio $(ax+b)^n$ é obtido por*

$$T_k = \frac{d}{dx}T_{k-1}\cdot\frac{b}{ak}, \text{ para } k \geq 1.$$

Demonstração: Provemos por indução. Para o segundo temo da expansão temos que

$$T_1 = \frac{d}{dx}T_0\cdot\frac{b}{a} = \frac{d}{dx}(xa)^n\cdot\frac{b}{a} = nx^{n-1}a^{n-1}b$$

e, por isso, a fórmula de recorrência é válida para o segundo termo da expansão. Agora se a sequência seja válida para k, ou seja,

$$T_k = \frac{d}{dx}T_{k-1}\cdot\frac{b}{a(k-1)} = a_{k-1}x^{n-k+1}a^{n-k+1}b^{k-1},$$

então, para $k+1$ temos que

$$T_{k+1} = \frac{d}{dx}\left(x^{n-k+1}a^{n-k+1}b^k\right)\cdot\frac{b}{ak} = \frac{a_{k-1}\cdot(n-k+1)}{k}x^{n-k}a^{n-k}b^k,$$

do Teorema temos que $a_k = \frac{a_{k-1}\cdot(n-k+1)}{k}$ e, portanto, $T_{k+1} = \frac{d}{dx}T_k\cdot\frac{b}{ak}$, para $k \geq 1$. ■

Dispositivo Prático Para expandir o Binômio $(ax+b)^n$: O primeiro termo da expansão é $a^n x^n$. A partir daí, cada termo é obtido pela derivada do termo anterior multiplicado por $\dfrac{b}{ak}$, onde k é a posição do termo na expansão.

Para ilustrar o uso do dispositivo, observe o desenvolvimento do binômio a seguir:

$$(x+1)^7 = x^7 + \frac{(x^7)'}{1} + \frac{7(x^6)'}{2} + \frac{21(x^5)'}{3} + \frac{35(x^4)'}{4} + \frac{35(x^3)'}{5} + \frac{21(x^2)'}{6} + \frac{7(x)'}{7} =$$
$$= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

CONCLUSÕES

O desenvolvimento do binômio $(ax+b)^n$ é de grande importância para a matemática, dado que em quase todos os campos são usados números binomiais. Nesse trabalho apresentamos um dispositivo prático e eficiente baseado em derivação e recorrência para o desenvolvimento do binômio de Newton. Evidenciamos sua relevância, por conta de diminuir o cálculo dos números binomiais no desenvolvimento do binômio, usando uma relação de recorrência. Além disso, É uma forma simples e elegante de usar os conceitos matemáticos para facilitar a obtenção de dados.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRIMALDI, R. P. Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction. **Pearson**, 2003.

[2] MORGADO, A. C. de O.; PITOMBEIRA, J. B.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. Análise Combinatória e Probabilidade. **SBM**, 11ª Ed., 2020.

[3] LITTLE, R. W. **Elasticity**. New Jersey: Prentice-Hall, 1973.

Desmos e a geometria analítica vetorial

Medindo Distâncias e Traçando Retas

Santos, Carlos Eduardo[37] Silva, Valdelírio[38]

Resumo: *Este trabalho objetiva-se demonstrar a aplicação da Camada de Computação (CL) do Desmos na criação de atividades interativas de Geometria Analítica Vetorial. São abordados os temas como paralelismo e perpendicularismo entre retas, distância entre pontos e retas, além de determinação de regiões do plano. As atividades foram desenvolvidas com o propósito não só de explorar as funcionalidades do Desmos, como também sugerir uma sequência didática para auxiliar professores e alunos no desenvolvimento da geometria analítica com abordagem vetorial, incluindo-se nelas exercícios interativos que abordam conceitos-chave relacionados aos temas. Com este trabalho buscamos contribuir para o ensino da Matemática, apresentando o Desmos e divulgando sua CL como uma poderosa ferramenta educacional. Esperamos que alunos, professores e futuros educadores possam conhecer, utilizar e aplicar as funcionalidades que a plataforma oferece.*

Palavras-chave: *Atividades interativas, camada de computação, Desmos, ensino da matemática, geometria analítica vetorial.*

INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica Vetorial é uma das áreas da Matemática que permite a visualização e compreensão de conceitos complexos através de representações gráficas. Neste trabalho, exploramos o potencial da CL (*Computation Layer*) do *Desmos*, uma plataforma digital interativa de Educação Matemática. Confeccionamos atividades interativas que abordam conceitos de Geometria Analítica Vetorial, como paralelismo e perpendicularismo entre retas, distância entre pontos e retas, e a análise de regiões do plano. As atividades incluem exercícios interativos que exploram conceitos-chave, utilizando as funcionalidades interativas do *Desmos*. Essa abordagem dinâmica visa contribuir para o ensino da Matemática, destacando o *Desmos* e sua CL como ferramentas educacionais de grande potencial, associado-se os recursos de desenvolvimento teórico da geometria analítica mediante olhar de construção vetorial. Nosso objetivo é enriquecer o processo de ensino e aprendizagem, inspirando outros a explorar seu tencialpo

[37]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: carlosedsantos77@gmail.com
[38]Universidade Federal do Pará / Campus Castanhal. e–mail: valdel@ufpa.br

atividades desenvolvidas

Agora, vamos passar para a apresentação das atividades confeccionadas. Primeiramente, para criar uma atividade dentro do *Desmos*, é necessário criar uma conta no Desmos Classroom. Após isso, teremos acesso à plataforma e poderemos criar e confeccionar nossas próprias atividades, como mostraremos a seguir.

Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$

Nesta atividade, abordamos os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre retas no $\mathbb{R}^2$, além de outros conceitos fundamentais relacionados a esse tema em Geometria Analítica Vetorial. Utilizamos as funcionalidades do *Desmos* para tornar a atividade interativa. Por exemplo, na página 2 da atividade, o exercício solicita a seleção do valor do coeficiente a para que as retas dadas sejam paralelas. Caso a alternativa selecionada esteja incorreta, uma reta com o valor do coeficiente a escolhido é plotada, acompanhada de uma explicação sobre porque a alternativa está incorreta. Por outro lado, se a alternativa selecionada estiver correta, a reta correspondente também será plotada. A atividade completa está disponível em Análise de paralelismo de retas do $\mathbb{R}^2$.

Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$

Para aplicar e avaliar o conhecimento adquirido na atividade anterior, elaboramos uma atividade complementar intitulada "Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$". Esta atividade consiste em uma lista de exercícios que exploram os conceitos de paralelismo e perpendicularismo entre retas no plano cartesiano. A atividade é dinâmica e interativa, como exemplificado na página 5, onde a questão pede para determinar os demais vértices de um retângulo e a equação da reta que representa sua diagonal. Após resolver, o aluno pode inserir a equação da reta encontrada e mesma será plotada, possibilitando verificar se a solução está correta. A atividade completa está disponível em Exercícios sobre paralelismo e perpendicularismo entre retas do $\mathbb{R}^2$.

Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano

Nesta atividade, vamos prosseguir com os conceitos de retas no $\mathbb{R}^2$, o foco agora será na distância entre pontos e retas no plano cartesiano. A atividade apresenta o mesmo nível de interatividade que caracterizou as atividades anteriores. A exemplo disso, a página 9 da atividade, possibilita que o aluno insira a inequação e visualize no gráfico o semi-plano correspodente à inequação inserida. A atividade completa está disponível em Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano

Geometria em Ação: Desvendando distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$

Esta atividade se trata de uma outra lista de exercícios, mas agora referente aos conceitos abordados na atividade "Distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^2$ e regiões do plano". Esta atividade tem como objetivo permitir a prática e avaliação do conhecimento adquirido na atividade apresentada anteriormente, com a mesma interatividade das atividades que ja foram listadas e apresentadas. A atividade está disponível em Geometria em Ação: Desvendando distâncias entre pontos e retas no $\mathbb{R}^2$.

CONCLUSÕES

As atividades interativas que desenvolvemos e apresentamos, utilizando o *Desmos* e sua `CL`, são uma amostra do potencial dessa ferramenta no ensino da Matemática. Conseguimos elaborar atividades com exercícios que exploram uma variedade de conceitos relacionados às retas na Geometria Analítica Vetorial de uma forma atrativa e interativa. Essas atividades não são apenas meios eficazes de aprendizado, mas também uma forma prática e envolvente de conhecimento que tem o potencial de despertar a curiosidade e o entusiasmo dos alunos pela Matemática, tornando o processo de aprendizagem mais atrativo e interessante.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIMA, Elon Lages. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**, 2° ed. IMPA, Rio de janeiro, 2012.

[2] MEDEIROS, Luiz Adauto; DE ANDRADE, Nirzi Gonçalves; WANDERLEY, Augusto Maurício. **Álgebra Vetorial e Geometria**. Rio de Janeiro: EDITORA CAMPUS LTDA, 1981.

Conhecimento interpretativo - um conhecimento especializado essencial para uma prática especializante: um exemplo no tópico composição de transformações geométricas isométricas

Silva, Caroline[39] e Ribeiro, Miguel[40]

Resumo: *Ao professor de matemática é requerido um conhecimento específico e especializado para realizar sua prática profissional de proporcionar aos alunos o entendimento da matemática. A interpretativa é uma dessas práticas, e envolve entender, interpretar e atribuir significado aos raciocínios e formas de Pensar dos alunos, o que requer um conhecimento especializado, denominado Conhecimento Interpretativo. Um tópico considerado difícil para os alunos é a composição de transformações geométricas isométricas e que, portanto, o professor tem de conhecer, inclusive, para interpretar produções que são incorretas ou não usuais e propor um feedback construtivo. É fundamental entender e desenvolver esse conhecimento especializado de interpretar, uma vez que ele não se desenvolve na prática de sala de aula. Nesta comunicação, discute-se as conceitualizações do Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e do Conhecimento Interpretativo e as noções espaço solução e feedback, uma vez que se trata de um conhecimento especializado essencial para uma prática especializante, tomando como exemplo a composição de transformações geométricas isométricas.*

Palavras-chave: *Conhecimento interpretativo, conhecimento especializado, prática profissional, professor de matemática, composição de transformações geométricas isométricas.*

INTRODUÇÃO

As conceitualizações *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) e o Conhecimento Interpretativo (CI) possibilitam compreender o conteúdo do conhecimento do professor de matemática, tendo como premissa que todo o conhecimento do professor é especializado diante das especificidades de sua prática profissional. O MTSK (CARRILLO et al., 2018) foi

[39]Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), caroldesouza86@gmail.com
[40]Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), cmribas78@gmail.com

elaborado para aprofundar a compreensão dos elementos que compõe o conhecimento especializado do professor para sua prática matemática de proporcionar aos alunos o entendimento da matemática, servindo, também, de ferramenta analítica para investigar esse conhecimento. O CI (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014) é a conceitualização que une o conhecimento matemático especializado envolvido e necessário para a prática matemática do professor, com o conhecimento da abordagem de erros e raciocínios não usuais, entendendo-os como oportunidades de aprendizagem (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014).

Esse conhecimento especializado sustenta as diferentes práticas do professor, como a interpretativa que envolve entender, interpretar e atribuir significado aos raciocínios e formas de Pensar dos alunos, ainda que sejam incorretos ou inesperados (fora do espaço solução do professor), cumprindo ao professor tomar as melhores decisões pedagógicas e propor *feedback* (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014).

A prática interpretativa é entendida como uma prática especializada, pois é específica e essencial para o trabalho do professor e requer do conhecimento especializado e interpretativo para ser realizada, visando propiciar um entendimento matemático aos alunos, a partir do que e como eles revelam conhecer, tomando suas dificuldades e erros como ponto de partida para discussões matemáticas frutíferas. Um tópico considerado difícil para os alunos é a composição de transformações geométricas isométricas diante das dificuldades, como identificar as diferentes transformações efetuadas em uma composição. É o conhecimento especializado e interpretativo do professor que permite efetuar essas discussões que ajudam os alunos a ultrapassarem dificuldades como essa.

Objetiva-se, portanto, discutir as conceitualizações do MTSK e do CI, bem como as noções espaço solução e *feedback*, para compreender de que forma esse conhecimento especializado fundamenta e é essencial para a prática especializante do professor, tomando como exemplo o tópico composição de transformações geométricas isométricas.

MARCO TEÓRICO

O MTSK considera que todo conhecimento do professor como especializado, organizando-os em dois domínios: o *Mathematical Knowledge* – MK e o *Knowledge Pedagogical Content* – PCK (CARRILLO et al., 2018). Aqui, discutiremos apenas o conteúdo do MK, pois, ele sustenta, também, o Conhecimento Interpretativo (RIBEIRO, 2024). O MK é composto por três subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM). O KoT corresponde ao conhecimento dos tópicos de modo mais amplo e profundo do que é requerido da matemática escolar. O KSM corresponde ao conhecimento que permite estabelecer conexões entre tópicos matemáticos diferentes. Já o KSM corresponde ao conhecimento das práticas matemáticas, no sentido do fazer matemático. Logo, cumpre ao professor deter todo esse conjunto de conhecimento para desenvolver sua prática profissional.

No âmbito da composição de transformações geométricas isométricas, alguns exemplos de conteúdo de conhecimento envolvem: (i) conhecer o que é a composição de transformações geométricas isométricas, ou seja, qualquer par de movimentos como as translações, rotações e reflexões efetuados sucessivamente, em que efetua-se uma transformação primeiro, e a segunda transformação é efetuada à figura transformada (KoT); (ii) conhecer a conexão entre composição de transformações geométricas isométricas e fração (sentido parte e todo), uma vez que cada transformação efetuada (parte) mantém uma congruência entre a figura e a imagem, por serem isométricas e, isso acontece, também, considerando a figura e a imagem obtida após todas as transformações que compõe o movimento – o todo (KSM); (iii) conhecer que a reflexão deslizante é um caso particular de composição de transformações geométricas isométricas, e envolve efetuar a composição comutativa de uma reflexão e uma translação, na qual a direção do vetor de translação é paralela a direção do eixo de reflexão (KPM).

O CI corresponde ao conhecimento matemático especializado que vai além do mero *saber fazer*, requerendo todo conteúdo do MK para sustentá-lo e permitir ao professor realizar sua prática interpretativa – entender e interpretar os raciocínios e formas de Pensar dos alunos –, tendo como premissa para desenvolver o entendimento matemático deles, seus próprios raciocínios e produções, explorando os erros e realizando orientações (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Compreende ao professor, mobilizar o conhecimento que está em seu espaço solução para realizar sua prática interpretativa.

O espaço solução refere-se ao conjunto das múltiplas formas que cada indivíduo concebe para alcançar a(s) resposta(s) para determinados problemas – possíveis respostas, diversas maneiras de abordagem e de registros de representação para resolver um problema (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Contudo, em geral, os professores conhecem basicamente uma única forma de proceder para resolver um problema, o que indica um espaço solução limitado, sendo que quanto maior o espaço solução do professor (maior em cardinalidade de elementos), mais potentes poderão ser as decisões pedagógicas de intervenção que ele tomará (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Essa problemática do espaço solução limitado, implica na decisão pedagógica (também será limitada) que ele terá que tomar para intervir diante das dificuldades e erros dos alunos, e seu *feedback*, possivelmente, instruirá o aluno a como proceder – reproduzir o professor.

No contexto de tarefas de composição de transformações geométricas isométricas, consideremos, por exemplo, uma tarefa que visa identificar quais transformações foram efetuadas para composição de um mosaico e uma produção de aluno que identifica apenas a translação, inclui o professor dizer: *Está errado, refaça identificando a composição de duas reflexões de eixos paralelos!* Porém, a produção não é incorreta, apenas desconsidera a composição de transformações. Logo, o *feedback* corresponde à forma de comunicação entre professor e aluno e quando contém orientações detalhadas, que estimulam o aluno a reanalisar sua produção para reformular raciocínios e aprimorar estratégias, esse *feedback* é construtivo e ultrapassa a mera avaliação de correto ou incorreto (SANTOS; PINTO, 2009).

Ampliar, portanto, o espaço solução do professor (pelo desenvolvimento de seu CI), permite propor *feedback* construtivo e realizar sua prática interpretativa de modo especializante. A depender do nível de seu CI, o professor realiza determinadas práticas interpretativas (MELLONE et al., 2017), somente um elevado nível fundamentará o professor realizar uma prática especializante. Diante de uma produção de aluno que, por exemplo, identifica apenas a translação para composição de um mosaico, o professor toma essa produção como uma fonte de pesquisa, busca entender os raciocínios e formas de Pensar do aluno para ter dado essa resposta, e passa a conhecer que a composição de duas reflexões de eixos paralelos coincide com uma translação – em termos de resultado, mas envolve procedimentos diferentes –, ampliando seu espaço solução. Assim, a prática interpretativa ajuda o aluno a entender matemática – o que se faz e porque se faz, a cada momento – e a não reproduzir uma matemática desconexa, sem significado, como se fosse um compêndio de regras e fórmulas. Trata-se de uma prática específica e essencial para o trabalho do professor, e que demanda de conhecimento

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A relevância do conhecimento especializado e interpretativo para uma prática especializante é indiscutível (RIBEIRO, 2024). Todavia, diante dessa especialização, esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014), sendo requerido contextos formativos que tenham esse fito. Nesta comunicação discutiremos os resultados preliminares das informações coletadas em um curso de formação continuada de professores dos Anos Finais e Ensino Médio, que nos permitem melhor compreender de que forma o CI se desenvolve, e apresentar algumas potencialidades para a formação, de modo a maximizar a qualidade das discussões matemáticas com os alunos e, assim, o seu entendimento e resultados.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

BIBLIOGRAFIA

[1] Carrillo, J. et al.; **The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model**. Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[2] Jakobsen, A. R. N. E.; Ribeiro, C. M.; Mellone, M. ; **Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions o n a fraction task**. Nordic Studies in Mathematics Education, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

[3] Mellone, M.; Tortora, R.; Jakobsen, A.; Ribeiro, M.; **Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research**. In: CERME 10. Dublin, Ireland, 2017.

[4] Ribeiro, M.; **Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração**. Debates em Educação, v. 16, n. 38, p. e16020, 2024.

[5] Santos, L.; Pinto, L.; **Lights and shadows of feedback in mathematics learning**. In: Proceedings of the 33rd Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education. p. 49-56, 2009.

A matemática da astronomia

O uso da Astronomia na disciplina de matemática

Silva, Cintia D. e Friaça, Amâncio C. S.

Resumo: *Este trabalho visa demonstrar que a transdisciplinaridade entre a astronomia e a disciplina de matemática na sala de aula cria um ambiente amplo que proporciona grandes conquistas na aprendizagem do aluno, como o incremento de acertos em avaliações externas e o despertar do aluno para o interesse e a curiosidade de assuntos matemáticos quando são tratados de forma experimental, tendo como o seu laboratório o universo e o quintal de sua própria casa para observá-lo.*

Palavras-chave: *Astronomia, matemática, aprendizagem, transdisciplinaridade, sala de aula.*

INTRODUÇÃO

Para trabalhar a disciplina de Astronomia de forma eficaz foram relacionadas as disciplinas de geografia e matemática do Ensino fundamental nos anos finais do 6º ao 9º, e no ensino médio. Relacionamos as disciplinas de geografia e matemática, com o objetivo de proporcionar um aprofundamento na elaboração de gráficos e tabelas e interpretação de dados, conteúdo relacionado ao cotidiano dos alunos e a profissão escolhida por muitos no momento de elaborarem seus projetos de vida.

A matemática da astronomia na prática para o ensino fundamental anos finais

A disciplina de Astronomia contém muitas aplicações matemáticas cotidianas que envolvem um conhecimento básico matemático com aplicações ricas na disciplina de matemática.

Podemos notar que a matemática experimental atrai a atenção e o interesse dos alunos por um determinado conteúdo. Ao realizarmos experiências que incluem todos os alunos e as suas limitações, sejam elas intelectuais ou dificuldades de aprendizagem devido a lacunas causadas por duvidas ou dificuldade de compreensão em determinados assuntos matemáticos que antecedem a sequência didática do conteúdo atual, podemos dizer que estamos ensinando de forma satisfatória e atingindo os objetivos exigidos por aquele conteúdo, adaptando a dificuldade de cada aluno na sua individualidade.

Vejamos abaixo uma experiência que foi aplicada para os alunos do sétimo ano do ensino fundamental na escola E.E. Profª Maria José Maia de Toledo envolvendo a descoberta de Aristarco de Samos a respeito do diâmetro da Lua, com alunos que portam uma deficiência intelectual e alunos sem nenhum tipo de deficiência.

Fig. 10: Alunos do 7ºA no ano de 2023, realizando a experiência do Aristarco de Samos.

Esta experiência trabalhou de forma transdisciplinar a habilidade EF07MA21 da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018): "*Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.*"

Para os alunos portadores de deficiência intelectual foi aplicada uma simulação onde o bambolê representava a lua e o anel foi utilizado para comparar o diâmetro da aliança com o do bambolê.

Esta relação para os alunos do 7º ano foi realizada com os cálculos do teorema de Tales, porém com os alunos portadores de deficiência a relação foi feita de maneira simples sobrepondo o anel ao bambolê e contabilizando seus passos e a distância determinada pelos seus dedos.

O diâmetro do anel foi medido com a abertura entre os dedos das alunas e a distância entre o bambolê e o anel foi medida pelos passos. Em seguida realizamos a contagem dos passos e da medida dos dedos obtida com o anel, pedimos para elas imaginarem quantos espaços de seus dedos cabem dentro da distância que elas percorreram com seus 5 passos, medimos com um barbante e comparamos.

Ao finalizarmos as medidas de distância iniciamos a medida de quantos anéis caberiam dentro do bambolê seguindo o diâmetro do mesmo. A resposta final foi de aproximadamente 23 alianças, e o diâmetro da lua obtido pelos alunos foi de aproximadamente 3.435,7 km, um valor bem próximo do real.

A duração da atividade foi de 4 aulas 2 preparatórias e 2 das práticas experimentais.

Planejamento para a aplicação da atividade.

Para aplicar esta atividade o professor deverá apresentar aos alunos os conceitos teóricos básicos a respeito da inclinação do eixo de rotação da Terra em relação ao plano orbital da Terra em torno do Sol (Eclíptica da inclinação do plano orbital da Lua em relação à Eclíptica. Uma das formas de se demonstrar este assunto sem sair da disciplina é através da comparação de ângulos internos e externos em algumas atividades que exigem o teorema de Tales para serem calculados.

O material utilizado para a explicação da inclinação do planeta em relação ao sol foi um pequeno planetário escolar do Sistema Solar e um pequeno kit do Sistema Solar adquirido pela escola fabricado pela empresa Kidz Labs, o anel foi uma aliança de casamento da professora de matemática Cintia Dias da Silva e o bambolê os alunos faz parte dos materiais de educação física doados pelo Governo do Estado de São Paulo.

Após esta demonstração, o professor poderá trabalhar com os alunos conceitos aprofundados do teorema de Tales, conteúdo previsto na BNCC para o sétimo ano do ensino fundamental II e conteúdo cobrado nas avaliações externas da Prova Paulista do 3º bimestre no ano de 2023.

A triangulação deverá ser feita levando em consideração a informação da distância da terra e da lua, após aplicar o teorema de talles os alunos encontrarão, de forma aproximada o diâmetro da lua, e poderão repetir a experiência em suas casas quando acharem necessário.

Experimento do gnômon

O gnômon foi realizado com os alunos do ensino médio com o objetivo de demonstrar uma prática que envolve o cotidiano dos alunos, afinal muitos relataram que utilizam o Sistema Global de Posicionamento o (G.P.S) quando precisam chamar um carro por aplicativo ou quando pedem até mesmo um lanche.

Pensando nisso foi criada uma situação problema na qual os alunos teriam perdido algo valioso e importante, muitos colocaram a perda de um celular como objetivo do trabalho, porém, para a aplicação da atividade sugerimos que, o sistema de rastreamento por algum motivo tinha dado apenas a informação da longitude, e para encontrar a localização exata do aparelho os alunos precisariam calcular a latitude.

Após a situação problema ser enunciada os alunos realizaram a construção de uma rosa dos ventos com giz ao chão da escola e em seguida no horário das 10:00 hs foi iniciada a aplicação do experimento Gnomon.

Fig. 11: Alunos do ensino médio realizando o experimento do Gnômon e tabelando as medidas em seus cadernos.

Aplicação do gnômon

Para aplicar o gnômon foi necessário uma preparação básica com os alunos respeito da inclinação da terra em relação ao sol e foi necessária uma pesquisa para saber qual seria o dia do equinócio, pois sem ele seriam necessárias algumas correções.

Algumas turmas realizaram o experimento em dias diferentes e por este motivo os professores realizaram em sala a demonstração da correção do cálculo devido a inclinação da terra em relação ao sol serem em dias diferentes do equinócio.

Os materiais necessários para a aplicação foram giz, e um suporte universal utilizado no laboratório de química, a rosa dos ventos, réguas ou fitas métricas e um local sem muita movimentação com a menor inclinação possível, ou seja, um ambiente plano.

O horário que o experimento deve ser feito deverá ser das 10hs 00min as 15hs 00min para obter um bom tabelamento de dados, e o intervalo dos registros, deverá ser de 10 em 10 minutos, pois quanto maior o número de dados, melhor será a tabelação e a triangulação do local de rastreio.

Após o levantamento da dados é realizado uma tabela e com a mesmo elaboramos um cálculo que envolve inclinações com arcocosseno, e o resultado final dos alunos é comparado com o Google Maps, no nosso caso chegamos a 5 km de distância da casa do infrator.

CONCLUSÃO

Com este trabalho atingimos um aumento de aproximadamente 7% nos acertos nas avaliações externas, sem contar que, os alunos gostaram da atividade e apresentaram grandes interesses nos assuntos voltados a astronomia e aos seus cálculos.

Durante a aplicação do experimento os alunos levantavam duvidas imediatas relacionadas as suas curiosidades nos assuntos voltados a Astronomia e com todas as perguntas realizadas por eles notamos que existem muitas notícias falsas sendo espalhadas e divulgadas por pessoas de grande público, e isso esta atrapalhando o avanço da propagação da informação cientifica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Globo Livros. **O Livro da Matemática**. Rio de Janeiro: Globo Livros, 2020.

[2] Harano, Y. C., Pereira, G. A., Carvalho, A. J. C., Marinho, P. A. B., Kim, V. D., Oliveira, G. C., Laham, J., & Ichiba, C. **O Diâmetro da Lua a Partir do Diâmetro da Terra - De Eratóstenes a Aristarco de Samos.** Vitruvian Cogitationes, v. 3, p. 244-256, 2022.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília, 2018.

O uso de quebra-cabeças para o ensino de matemática

Desenvolvendo o raciocínio analógico

Trindade, Cláudia Mikaele Moreira[41]; Ataide, Antonio Adriano Neves[42]; Braga, Roberta Modesto[43]

Resumo: *A Matemática desempenha um papel crucial na compreensão do mundo e vai além de simples cálculos, sendo fundamental para o desenvolvimento do raciocínio lógico e resolução de problemas. Esta habilidade não se limita apenas a Matemática, influencia várias áreas do ensino e o cotidiano das pessoas. Este texto explora o uso de quebra-cabeças como abordagem lúdica para aprimorar o raciocínio lógico de alunos do 8º e 9º ano de uma escola em Castanhal-PA, no âmbito do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Foram utilizados três quebra-cabeças: Quebra-cabeça Móvel, Torre de Hanói e Triângulos Amigos, que foram aplicados após contextualizações Matemáticas em sala de aula. A abordagem lúdica e interativa dos quebra-cabeças ajudou a consolidar o aprendizado, tornando-o significativo. Observou-se uma melhoria no desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos, refletindo a evolução em suas habilidades e confiança. A inclusão de quebra-cabeças no ensino mostra-se eficaz para desenvolver o raciocínio lógico dos alunos, preparando-os para enfrentar desafios matemáticos e do dia a dia com confiança e eficácia.*

Palavras-chave: *Matemática, raciocínio lógico, quebra-cabeças.*

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência fascinante que desempenha papel fundamental na compreensão do mundo. Embora muitas vezes seja vista como complexa, essa disciplina é essencial para decifrar os padrões em nosso universo, do complexo ao simples. Além disso, a Matemática não se limita apenas a fórmulas e cálculos, ela é uma ferramenta para desenvolver o raciocínio lógico e a capacidade de resolver problemas de forma eficaz.

O raciocínio lógico, continuamente ligado à Matemática, é uma habilidade que supera os limites da disciplina. Ele está presente em diversas áreas do ensino e aprendizagem, desde as ciências exatas até as humanas. Além disso, o raciocínio lógico desempenha um papel crucial no cotidiano das pessoas, muitas vezes de maneiras sutis e imperceptíveis (David, 2022).

[41]Universidade Federal do Pará.claudiamikaele1999@gmail.com
[42]Universidade Federal do Pará.adrianoataide36@gmail.com
[43]Universidade Federal do Pará. robertabraga@ufpa.br

No dia a dia, encontramos exemplos do uso da lógica em situações simples, como tomar decisões, resolver problemas domésticos ou mesmo interpretar informações. Mesmo que não estejamos conscientemente aplicando conceitos matemáticos, estamos constantemente usando o raciocínio lógico para analisar, avaliar e tomar decisões informadas.

É neste cenário que o objetivo deste texto se insere: explorar o uso de quebra-cabeças como uma ferramenta eficaz para o aprimoramento do raciocínio lógico e a resolução de problemas. Para ilustrar essa abordagem, os autores compartilham suas experiências com a aplicação de três diferentes quebra-cabeças, desenvolvidos com alunos do 8° e 9° ano do ensino fundamental, de uma escola de ensino básico da cidade de Castanhal-PA, participante do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID).

Então, com toda a Matemática a ser aprendida, por que incluir quebra-cabeças no ensino? Neste sentido Gonzaga *et al.* (2016, p.02) responde esta pergunta falando que "a resposta mais adequada para esse tipo de pergunta seja a de que os alunos, com essas atividades divertidas, possam se utilizar de habilidades importantes como: calcular, medir, raciocinar e resolver problemas". O mesmo ainda fala que "outro aspecto a ser valorizado é o fato de os alunos, até mesmo os desinteressados, sentirem-se desafiados a resolver os quebra-cabeças e assim, despertar interesse pela aula, e, na tentativa de encontrar a solução, aprenderem a pensar de forma mais lógica" (Id Ibdem).

Ao incorporar quebra-cabeças na rotina de ensino, aprendizagem e prática, pode-se melhorar as habilidades de resolução de problemas e cultivar uma mentalidade aguçada e interativa. Através do desafio e da superação apresentados pelos quebra-cabeças, os estudantes desenvolvem a paciência, a persistência e a capacidade de pensar fora da caixa (Adona e Vargas, 2013).

METODOLOGIA DA PESQUISA E APLICAÇÃO DOS QUEBRA-CABEÇAS

Os quebra-cabeças, eram utilizados, após a contextualização dos conteúdos matemáticos, onde os bolsistas Pibid, visavam relembrar os estudantes dos conteúdos já vistos por eles no ensino regular. Em seguida a aplicação dos quebra-cabeças, era se proposto problemas matemáticos, relacionados ao conteúdo visto.

Os quebra-cabeças apresentados neste texto foram selecionados e utilizados como ferramentas pedagógicas no subprojeto de reforço intitulado "Matemática? Te puxa, bora aprender!", vinculado ao Pibid. Este subprojeto foi desenvolvido no contraturno dos alunos, visando reforçar e aprimorar o raciocínio lógico e rápido dos estudantes.

Em seguida, a contextualização dos conteúdos matemáticos em sala de aula, para relembrar os estudantes dos conceitos e temas abordados no ensino regular, os bolsistas do Pibid utilizavam os quebra-cabeças como uma estratégia pedagógica para aguçar o raciocínio lógico dos estudantes. Esta abordagem lúdica e interativa tinha como objetivo consolidar o aprendizado, tornando-o significativo e envolvente para os alunos.

Após a resolução dos quebra-cabeças, os estudantes eram desafiados com problemas matemáticos práticos e relacionados ao conteúdo previamente revisado. Esta etapa permitia aos alunos a aplicação dos conhecimentos adquiridos de forma prática e contextualizada, incentivando a transferência de habilidades e a compreensão dos conceitos matemáticos.

É importante destacar que os quebra-cabeças foram aplicados em diferentes dias e momentos, proporcionando uma abordagem variada e dinâmica para o ensino e aprendizado da Matemática. Esta diversidade de atividades contribuiu para manter o interesse e a motivação dos alunos, além de oferecer múltiplas oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da capacidade de resolver problemas.

A seguir, será apresentada uma breve descrição de cada quebra-cabeça utilizado no subprojeto, destacando suas características.

Quebra-cabeça móvel

O quebra-cabeça móvel, é um jogo artesanal fácil de fazer e excelente para o desenvolvimento do raciocínio lógico. Ele consiste em um tabuleiro com 4 fileiras, 4 colunas e 16 tampinhas de garrafa PET em 4 cores diferentes. O primeiro passo é distribuir as tampinhas aleatoriamente nas casinhas do tabuleiro, de acordo com suas cores. O objetivo é posicionar as tampinhas nas colunas correspondentes às cores do tabuleiro. O jogo pode ser jogado individualmente ou com mais de um participante. Para tornar a brincadeira competitiva, pode-se cronometrar o tempo de cada jogador, e quem terminar primeiro será o vencedor.

Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça clássico e desafiador que consiste em uma base com três pinos verticais. Em um dos pinos, os discos são empilhados com os maiores embaixo e os menores em cima. O objetivo é transferir todos os discos para outro pino, seguindo regras específicas: mover apenas um disco por vez, nunca colocar um disco maior sobre um menor e manter a ordem crescente de diâmetros ao mover os discos entre os pinos. Seguir essas regras é fundamental para resolver o quebra-cabeça corretamente e completar o desafio. O jogador precisa planejar cuidadosamente cada movimento para assegurar que todos os discos sejam transferidos de acordo com as regras, promovendo assim um pensamento lógico em cada etapa do jogo.

Triângulos Amigos

Este jogo é composto por nove peças triangulares, cada uma com o formato de um triângulo equilátero e um desenho geométrico em cada vértice. As peças devem ser encaixadas no tabuleiro de forma que as pontas que se encontram apresentem sempre o mesmo desenho. No quebra-cabeça, os estudantes precisam identificar que algumas áreas do tabuleiro requerem mais desenhos iguais do que outras. Assim, devem organizar as nove peças no tabuleiro seguindo as regras do jogo, verificando e compartilhando seus raciocínios durante a resolução do desafio.

No âmbito do subprojeto, os dois primeiros jogos foram abordados individualmente, usando o tempo para determinar quem chegaria à solução do problema primeiro. Já o Triângulos Amigos foi trabalhado em duplas, devido à sua resolução complexa, que, apesar de parecer simples à primeira vista, revela-se desafiadora.

Fig. 12: Quebra-Cabeça Móvel, Torre de Hanói e Triângulos Amigos

Fonte: Repositório PIBID, 2023.

Após a realização dos quebra-cabeças, observou-se uma melhoria no desempenho dos estudantes ao resolverem problemas matemáticos. O que antes era motivo de reclamação por sua dificuldade passou a ser considerado fácil pelos alunos, refletindo uma evolução em suas habilidades e confiança na resolução de desafios matemáticos.

CONCLUSÕES

Os quebra-cabeças ofereceram uma oportunidade única para exercitar a mente dos estudantes, desafiando-os a pensar de forma crítica, analítica e criativa. Eles convidam a abordar problemas de maneira estruturada, identificando padrões, fazendo conexões e testando diferentes estratégias até encontrar a solução. Portanto, ao incorporar quebra-cabeças como uma abordagem lúdica e envolvente para o desenvolvimento do raciocínio lógico, estamos investindo na capacidade dos alunos de resolverem problemas matemáticos e do dia a dia com confiança e eficácia, preparando-os para situações complexas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Adona, C.T., Vargas, C.L.; **O quebra-cabeça como possibilidade de ensino aprendizagem na disciplina de educação física**. Produções Didático-Pedagógicas: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE-Cadernos PDE. Versão On-line. v. I, ISBN 978-85-8015-076-6. Paraná, 2013.

[2] David, E. A. ;**O raciocínio lógico e suas implicações na resolução de problemas da vida cotidiana**. Instituto Federal da Paraíba-IFPA, Campus Cajazeiras. Cajazeiras-PB, 2022.

[3] Gonzaga, A.E.S.,Assis,M.A.P., Lacerda, G.H., ; Silva, F.G.A.; **Quebra-cabeças com palitos de fósforo: um jeito lúdico de ensinar geometria plana no ensino fundamental**. Revista Práxis: saberes da extensão, [S. l.], v. 4, n. 6, p. 75-85, ISSN 2525-5355, mai. 2016.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Uma viagem pela história na feira matemática

Trindade, Cláudia Mikaele Moreira[44]; Ataide, Antonio Adriano Neves[45] e Almeida, Arthur da Costa[46]

Resumo: *O ensino da Matemática assume um papel crucial em um mundo dominado pela tecnologia e inovação, porém muitos educadores enfrentam desafios para tornar essa disciplina acessível e atrativa para os alunos. Estratégias diversas, como explorar a História da Matemática (HM), mostras e jogos, são essenciais para estimular o interesse e a participação ativa dos estudantes. A HM enriquece o aprendizado ao fornecer contexto e relevância aos conceitos matemáticos, enquanto mostras e jogos oferecem oportunidades para explorar a interconexão da Matemática com outras áreas do conhecimento de forma lúdica e interativa. As Feiras Matemáticas (FMat) surgem como uma plataforma educativa que permite aos alunos vivenciar e experimentar conceitos matemáticos. Na FMat, os alunos podem criar projetos que incorporam elementos da HM, além de oferecerem experiências interativas e jogos para os visitantes. Esses eventos demonstram a importância de tornar o ensino da Matemática acessível, interessante e significativo para todos os alunos, incentivando a construção de um ambiente educacional estimulante e inclusivo.*

Palavras-chave: *História da matemática, feira matemática, ensino e aprendizado.*

INTRODUÇÃO

Em um mundo onde a tecnologia e a inovação permeiam cada vez mais nossa sociedade, o papel do ensino da Matemática torna-se fundamental. No entanto, muitos educadores enfrentam o desafio de tornar essa disciplina acessível e interessante para os alunos. Nesse sentido, é essencial explorar uma variedade de estratégias e recursos pedagógicos que estimulem o interesse e a participação ativa dos estudantes no aprendizado matemático.

A Matemática, como uma disciplina ampla, possui várias ferramentas e abordagens que os professores podem utilizar para tornar o ensino envolvente. Perius (2012, p.11) enfatiza que “neste processo, o professor assume um papel de formador ou mediador da aprendizagem, ou seja, ele instiga o desenvolvimento da aprendizagem, utilizando-se de ferramentas pedagógicas que venham a contribuir para a construção do conhecimento”. Desde a explorações da História da Matemática (HM) até mostras e jogos, cada ferramenta desempenha um papel importante na promoção da compreensão e apreciação dos conceitos matemáticos.

[44]Universidade Federal do Pará, claudiamikaele1999@gmail.com
[45]Universidade Federal do Pará, adrianoataide36@gmail.com
[46]Universidade Federal do Pará, arthur@ufpa.br

Explorar a HM enriquece o processo de ensino e aprendizado, fornecendo contexto e relevância aos conceitos abordados em sala de aula. Ao aprender sobre os grandes matemáticos do passado e as contribuições que fizeram para o desenvolvimento da Matemática, os alunos podem ganhar uma apreciação pela disciplina e compreender como os conceitos matemáticos evoluíram ao longo do tempo (Gulin e Rosário, 2014).

Além disso, mostras e jogos oferecem oportunidades para explorar a interconexão entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Assim dando aos estudantes a oportunidade de explorar conteúdos matemáticos de forma interativa e lúdica, mostrando a eles como a Matemática está ligada a várias disciplinas e aspectos da vida humana.

Neste sentido, por que não juntar todas essas ferramentas em um evento escolar, mais precisamente em uma Feira Matemática (FMat)? As Feiras Matemáticas são oportunidades para os alunos explorarem e apresentarem a aplicabilidade da Matemática.

De acordo com Assunção e Escher (2018, p.04) "entende-se por Feiras de Matemática um processo educativo científico-cultural, que alia vivências e experiências". Elas constituem uma plataforma na qual os alunos podem adquirir conhecimento, vivenciar e experimentar conceitos matemáticos. Essa abordagem engloba a compreensão teórica e a aplicação do ensino, proporcionando uma experiência de aprendizado que estimula o interesse e a participação ativa dos estudantes.

Na FMat, os alunos podem criar e apresentar projetos que incorporam elementos da HM, demonstrando como os conceitos matemáticos evoluíram ao longo do tempo e como estão intrinsecamente ligados a outras áreas do conhecimento. Por exemplo, os alunos podem desenvolver projetos que exploram a contribuição de matemáticos famosos, como Tales de Mileto, Pitágoras ou Arquimedes, para o desenvolvimento da Matemática.

Além disso, as mostras Matemáticas na FMat oferecem aos alunos a oportunidade de criar experiências interativas que envolvem os visitantes em atividades e demonstrações divertidas. Os visitantes podem participar de experimentos de geometria, investigar padrões matemáticos na natureza, explorar as leis da probabilidade em jogos de azar ou mesmo realizar cálculos matemáticos para resolver enigmas.

Os jogos também desempenham um papel fundamental na FMat, proporcionando uma maneira divertida e prazerosa para os visitantes praticarem e explorarem conceitos matemáticos. Estandes com jogos de tabuleiro personalizados, quebra-cabeças matemáticos e desafios de lógica que incentivam a participação ativa dos visitantes e promovem a colaboração e competição saudáveis entre os alunos.

Além de oferecer uma oportunidade para os alunos demonstrarem sua compreensão e criatividade, a FMat também é uma forma eficaz de envolver a comunidade escolar e promover uma cultura de aprendizado colaborativo e inclusivo. Pais, professores, administradores e outros membros da comunidade podem participar do evento, compartilhando o entusiasmo dos alunos pela Matemática e reconhecendo a importância desta disciplina na educação e na vida cotidiana.

Assim, uma Feira Matemática é mais que uma simples exposição de projetos é um evento educativo que celebra a beleza e a relevância da Matemática em nossas vidas. Ao integrar elementos da HM, mostras interativas e jogos, a FMat oferece uma experiência que leva os alunos a se tornarem pensadores críticos, criativos e apaixonados pela Matemática.

De acordo com o exposto acima, objetivamos relatar a experiência em uma Feira Matemática, com enfoque especifico na História da Matemática. Visto que foi a área que os autores ficaram responsáveis, juntamente com a professora supervisora e três turmas do 8º ano, matutino e vespertino. Além de turmas do Ensino de Jovens, Adultos e Idosos (EJAI) no período noturno.

Entre o que se ensina e o que se aprende em Matemática, é que a "Feira Matemática" foi pensada, considerando a necessidade de que a escola se tornasse um ambiente de construção de saberes. Com o tema “Uma viagem pelo mundo da Matemática”, a FMat teve como objetivo proporcionar aos alunos de todos os turnos, manhã, tarde e noite a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma prática e interativa, através de atividades, jogos e projetos relacionados à Matemática. Ademais, a FMat veio com a estratégia de incentivar a aprendizagem Matemática e o intuito de melhorar o entendimento dos conteúdos básicos matemáticos de forma lúdica.

A FMat aconteceu no dia 26 de março, do ano vigente, em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na cidade de Castanhal-PA, em colaboração com os professores, bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) e os alunos. Neste contexto os bolsistas e as turmas ficaram divididos por áreas temáticas, abrangendo desde à HM, mostras e jogos.

A responsabilidade atribuída aos autores deste relato foi justamente a organização e condução das atividades relacionadas à HM antes e durante o evento. Ao longo do processo de preparação, nosso objetivo principal foi informar, envolver e inspirar os participantes, revelando a rica trajetória da Matemática ao longo dos séculos.

Para alcançar esse objetivo, foi elaborado atividades interativas e informativas. Primeiramente, foi feita a seleção de doze matemáticos com contribuições significativas para a Matemática na educação básica. Posteriormente foi realizada uma investigação da vida e trabalho dos matemáticos. Em seguida, foram criadas versões em primeira pessoa da pesquisa, para os alunos apresentarem interpretando o papel de matemáticos.

Os doze matemáticos selecionados foram: Tales de Mileto, Pitágoras de Samos, Platão, Hipátia, Euclides, Arquimedes, Bhaskara, François Viète, René Descartes, Isaac Newton, Leonhard Euler e as Equações Cúbicas, mesmo está não sendo um matemático, ela envolveu alguns matemáticos como Tartaglia e Cardano.

A fase de escolha dos matemáticos pelos alunos se deu, com a apresentação dos nomes deles e dessa forma os alunos iam escolhendo quem eles queriam interpretar. Foram escolhidos quatro alunos de cada turma da manhã para interpretar um dos matemáticos, os demais alunos das turmas da manhã e tarde foram divididos para montarem os cartazes para exposições, destacando as figuras históricas proeminentes, como Pitágoras, Euclides e Arquimedes, e suas contribuições para o campo da Matemática.

Após cada aluno escolher seu matemático, foram dadas orientações para que eles lessem os papeis e criassem pequenos resumos, com o intuito de se aprofundarem na narrativa que iriam apresentar. Um mês antes da realização da FMat, uma vez por semana era realizado os ensaios, a partir de cada encontro, foi observado que era necessário fazer ajustes nos textos, para melhorar a interpretação de cada aluno. Assim, houve melhoras significativas dos estudantes na interpretação.

No dia da FMat, as atividades tiveram início com a cerimônia de abertura e apresentações culturais pela manhã, seguidas por oficinas. Na sala dedicada à HM, as apresentações dos matemáticos transcorreram conforme o planejado, apesar do nervosismo visível dos estudantes. No entanto, eles conseguiram manter-se fiéis aos seus papéis, destacando as origens, contribuições e obras dos matemáticos em destaque.

CONCLUSÕES

Diante do exposto, podemos concluir que a realização da Feira Matemática (FMat) foi uma experiência gratificante para todos os envolvidos. Ao longo do evento, pudemos observar como a integração de diferentes ferramentas pedagógicas, como a exploração da História da Matemática (HM), a realização de mostras interativas e a incorporação de jogos, proporcionou aos alunos uma abordagem significativa da disciplina.

A FMat permitiu aos estudantes explorar conceitos matemáticos e promoveu o desenvolvimento de habilidades como pensamento crítico, resolução de problemas e trabalho em equipe. Além disso, a participação ativa dos alunos na organização e condução das atividades demonstrou o comprometimento e engajamento com o processo de aprendizado.

É evidente que eventos como a FMat desempenham um papel crucial na promoção do interesse pela Matemática e na melhoria do entendimento dos conteúdos por parte dos alunos. Ao oferecer uma oportunidade para a comunidade escolar se envolver e celebrar a importância da Matemática em nossas vidas, a FMat contribuiu para a construção de um ambiente educacional estimulante e inclusivo.

Portanto, é fundamental continuar incentivando e apoiando iniciativas como a Feira Matemática, que enriquecem o ensino da Matemática e inspiram os alunos a se tornarem pensadores crítico e criativos em nossa sociedade. Que possamos seguir buscando novas formas de tornar o ensino da Matemática acessível, interessante e significativo para todos os alunos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Assunção, E. M. de; ESCHER, M. A.; **Manual básico: como organizar uma feira de matemática.** Universidade Federal de Juiz de Fora. Instituto de Ciências Exatas. Produto educacional, set. 2018.

[2] Gulin, A. C.; Rosário+, R. R. L. de; **História da matemática e sua contribuição na compreensão do uso cotidiano dessa ciência. Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE.** Versão online; Cadernos PDE; ISBN 978-85-8015-080-3, Vol. I. p.3, Paraná, 2014.

[3] Perius, A. A, B.; **A tecnologia aliada ao ensino de Matemática.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS. Cerro Largo – RS, 2012.

Mulheres na matemática: desafios e perspectivas em um campo de dominação masculina

Da Silva Oliveira, Daiana[47]; Siqueira Santos, Karina[48] e Nunes Pereira, Alana[49]

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo discutir sobre a presença de mulheres na área da matemática, explorando os desafios que ainda tolhem a participação feminina neste campo. Analisaremos importantes contribuições dessas mulheres ao longo da história e a baixa representatividade, tanto na área de ensino quanto na pesquisa acadêmica. As análises a serem abordadas serão com base nos repositórios de teses e dissertações da Universidade de São Paulo (USP), da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), da Universidade Estadual Paulista (UNESP) e da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFMG), considerando o recorte temporal dos últimos 20 anos, sob uma perspectiva do histórico da presença feminina nessas instituições nas áreas da Educação Matemática e Matemática Pura. A pesquisa será de cunho qualitativo e exploratória. A produção de dados terá como base as teses e dissertações presentes nos repositórios de programas de pós-graduação das universidades citadas, estudos em artigos e livros, os quais são fundamentais para se basear e proporcionar uma visão mais profunda sobre a relação quantitativa e qualitativa de homens e mulheres nas instituições de ensino superior. Exploraremos a participação de pessoas do sexo masculino e do sexo feminino em programas de pós-graduação, incluindo mestrado e doutorado, nas áreas de Educação Matemática e Matemática Pura, sendo uma parte essencial da pesquisa em ação, uma vez que esse movimento poderá destacar as questões de desigualdades de gêneros existentes e as possíveis razões para haver essas discrepâncias.Este estudo verifica as razões por trás dessa disparidade de gênero, incluindo fatores históricos, sociais, culturais e institucionais que influenciam a escolha de carreira das mulheres e sua permanência na matemática.*

Palavras-chave: *Mulheres, matemática, gênero, pós-graduação.*

INTRODUÇÃO

O presente Trabalho tem como intenção iniciar uma pesquisa abordando, sucintamente, o contexto histórico da presença feminina na área da matemática, traçando um panorama sobre

[47]Universidade Federal do Espírito Santo
[48]Universidade Federal do Espírito Santo
[49]Universidade Federal do Espírito Santo

a inserção da mulher nesse campo do conhecimento. Essa abordagem tem como propósito oferecer uma visão acerca das dificuldades enfrentadas pelas mulheres ao longo de parte da história e tudo o que passaram para conquistar reconhecimento e espaço. Além disso, busca-se destacar a luta incansável das mulheres pelo direito de desenvolverem suas carreiras nas ciências exatas, revelando a desigualdade existente entre os gêneros nessa área. No decorrer do trabalho, serão apresentadas as vivências, desafios e obstáculos que algumas mulheres enfrentaram, com o intuito de alcançar a igualdade de oportunidades no campo científico. Ainda, o trabalho abordará uma análise sobre a disparidade numérica entre homens e mulheres em programas de pós-graduação, enfatizando a predominância masculina.

Este estudo consiste na análise da evolução do números de mulheres que fazem parte de alguns Programas de Pós-graduação nos últimos 20 anos, tendo como foco os armazenamentos de teses e dissertações dos programas escolhidos para análise, quais sejam os Programas de Pós-graduação em Matemática das seguintes instituições: Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Universidade de São Paulo (USP), Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG). Além destes, o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista - campus de Rio Claro (UNESP) também será analisado. A escolha dessas instituições proporciona fazer uma relação abrangente, levando em consideração que tais programas, por estarem alocados em grandes centros urbanos, poderiam contemplar uma diversidade de pessoas. A pesquisa tem como intenção fazer um estudo sobre as mudanças na estabilidade de gênero, ou seja, no número de homens e mulheres que ingressaram em programas de pós-graduação nas áreas de Matemática Acadêmica e Educação Matemática em universidades brasileiras que são consideradas grandes e de centros renomados. Este estudo, ainda, inspira-se na luta das mulheres pela igualdade de condições com relação aos homens, pois, por muito tempo os conhecimentos adquiridos pelas mulheres foram jogados fora e as mulheres eram vistas apenas para o cuidado do lar e os afazeres domésticos.

Apesar das conquistas históricas que confirmam as hierarquias sociais nas quais as mulheres estiveram, em posições de inferioridade, que garantiram alguns importantes direitos femininos gozados, atualmente, são ainda explícitas as disparidades de gênero em diferentes situações do cotidiano, em que as questões de igualdade, tais como o acesso às ciências, o empoderamento econômico, a ocupação de cargos de liderança, dentre outros temas, como a superação da violência contra as mulheres, aparecem como metas a serem alcançadas, são um indício de que há ainda muitos problemas a serem superados.

Para a compreensão do tema, foi realizado um estudo sobre a obra do sociólogo Pierre Bourdieu, "A Dominação Masculina". Exploramos sobre os conceitos centrais de violência simbólica, habitus e campo, elementos fundamentais para a análise desses fenômenos que perpetuam a desigualdade de gênero. O autor define violência simbólica como uma violência invisível às suas próprias vítimas, tornando esse desafio bem mais resistente a ser superado, uma vez que essa dominação leva os indivíduos a se posicionarem seguindo os padrões impostos. Ou seja, o sociólogo retoma os sujeitos como dominantes e dominados e interpreta os dominantes como sujeitos na sociedade que detém mais poder, não só financeiramente, mas socialmente e culturalmente. Habitus é um espaço social que está em função da sociedade e dos indivíduos. É a consolidação dos comportamentos e das estruturas sociais. Dessa forma, o habitus examina os comportamentos e as ideias e é através desse conceito que Bourdieu explica as desigualdades e diferenças nas estruturas sociais. Por fim, ele define campo como o lugar onde o habitus se reproduz. Cada campo possui um conjunto de características específicas. Nesse contexto, espera-se que os sujeitos desses campos se expressem de maneira semelhante. Ao analisar esse conceito, podemos entender como as relações de poder dentro do campo da matemática, considerado um campo masculino, contribuem para as desigualdades de gênero nessa área. Os espaços sociais estruturados onde se desenrolam lutas simbólicas pelo poder e reconhecimento, influenciando as dinâmicas de dominação e resistência.

METODOLOGIA

Diante dessa perspectiva, o estereótipo de que as mulheres são menos habilidosas em matemática tem sido um obstáculo, resultando, ainda, em baixas produções científicas por mulheres neste campo. Foi realizado um primeiro levantamento, de cunho numérico, nos seguintes programas: Programa de Pós-Graduação em Matemática da IM-UFRJ, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-MAT) - USP, Programa de Pós-Graduação em Matemática - UFMG e Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNESP - campus Rio Claro. Estes programas estão inseridos em grandes universidades e centros renomados, os quais, teoricamente, deveriam agregar maior diversidade. Dentro desses programas selecionados, destaca-se o da UNESP-Rio Claro, com foco na Educação Matemática, o que possibilita estabelecer conexões com os demais programas, mais orientados para a matemática acadêmica.

O objetivo é examinar as produções acadêmicas dos últimos 20 anos de cada um dos programas de pós-graduação escolhidos, destacando, especificamente, as contribuições femininas e comparando-as com a quantidade de trabalhos masculinos. Além disso, pretende-se analisar se os orientadores predominantemente foram homens ou se também incluíram mulheres em suas orientações. A pesquisa busca identificar se houve evolução no decorrer dos anos a respeito da participação das mulheres nesse campo acadêmico, ou se não houve evolução. O estudo também tem como objetivo realizar comparações entre os campos de matemática e educação matemática, considerando aspectos como quantidade de produções e o perfil de orientadores.

RESULTADOS PRELIMINARES

A análise quantitativa dos dados revela que o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UNESP apresenta uma distribuição significativa de gênero entre os egressos de mestrado e doutorado ao longo dos últimos 20 anos. No nível do mestrado, a porcentagem de mulheres que concluíram o curso foi de 54,02%, enquanto os homens representaram 45,98%. Já no doutorado, as estatísticas indicam uma presença maior de egressas, totalizando 54,10%, enquanto os homens correspondem a 45,90%.

A análise dos dados numéricos revela a predominância significativa de egressos do sexo masculino nos programas de pós-graduação das universidades UFRJ, USP e UFMG, assim como uma maior representatividade de orientadores do gênero masculino em teses e dissertações. No entanto, ao examinar a distribuição de gênero na UNESP, destaca-se um equilíbrio percentual entre homens e mulheres. Além disso, merece destaque a representação mais igualitária das mulheres nesse programa, contrapondo a predominância masculina.

Diante dos resultados, ainda pretende-se fazer algumas entrevistas com algumas egressas dos cursos de pós-graduação que foram escolhidos como objetos de estudo. Tais entrevistas poderão nos auxiliar a compreender melhor como foram as trajetórias das mulheres que compuseram minoria nos programas referentes à Matemática Acadêmica.

BIBLIOGRAFIA

[1] FERNANDES, Maria da Conceição Vieira et al. **A inserção e vivência da mulher na docência de matemática: uma questão de gênero.** 2006. NUNES, Maria Sara Andrade. A desigualdade de gênero na matemática: aspectos históricos e atuais. 2021.

[2] VENTURINI, Anna Carolina. **A presença das mulheres nas universidades brasileiras: um panorama de desigualdade.** Seminário Internacional Fazendo Gênero, v. 11, p. 1-15, 2017.

[3] BOURDIEU, Pierre. **A dominação masculina;** tradução Maria Helena Küner.- 2a ed. - Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2002.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Diferentes noções de produto desenvolvidas ao longo da história da matemática

Os casos de Graßmann e de Hamilton

Ferreira, Débora[50]; Schubring, Gert[51].

Resumo: *No século XIX, novos tipos de produtos foram desenvolvidos por matemáticos como Hermann Graßmann e William Rowan Hamilton, entre outros. Esses produtos não possuíam todas as propriedades observadas na multiplicação usual – por exemplo, não era exigida a comutatividade entre dois fatores. Tanto em Graßmann quanto em Hamilton percebemos a existência de produtos não comutativos, fato surpreendente dada a relevância dessa propriedade, na época, como um dos fundamentos da multiplicação. Desse modo, o desenvolvimento de produtos não comutativos constituiu uma quebra de paradigma na matemática, que possibilitou o desenvolvimento de novas álgebras e a criação de novas disciplinas. Pretendemos analisar os trabalhos de Graßmann e de Hamilton e relacioná-los com o desenvolvimento de duas disciplinas da atualidade: a Álgebra Linear e o Cálculo Vetorial. O presente trabalho é parte de minha pesquisa em andamento para tese de doutorado pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.*

Palavras-chave: *produto, Graßmann, Hamilton, cálculo Vetorial, álgebra Linear.*

INTRODUÇÃO

Até a primeira metade do século XIX, a convicção estabelecida entre os matemáticos era a de que a operação de multiplicação é comutativa. A partir dessa época, novas abordagens foram consideradas, não mais rejeitando a não comutatividade, mas até baseando novas teorias na possibilidade da não comutatividade da multiplicação. As duas principais conceitualizações desse tipo no século XIX foram construídas, de modo independente, por Hermann Graßmann (1809-1877) e William Rowan Hamilton (1805-1865).

GRASSMANN E A TEORIA DA EXTENSÃO LINEAL

Hermann Graßmann foi um matemático e linguista alemão nascido em Stettin, região que fazia parte da Prússia Ocidental. A principal biografia de Graßmann, *Grassmanns Leben*, foi escrita

[50]Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ).
[51]Universität Bielefeld, Alemanha. Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

por Friedrich Engel e publicada nas obras completas de Graßmann. Sua formação acadêmica, na Universidade de Berlim entre 1827 e 1830, não envolveu matemática – mas teologia e filologia. Porém, Graßmann estudou matemática e ciências de forma autodidata e em 1831 obteve aprovação em exames de habilitação para lecionar esta disciplina. Em 1840, como parte de um exame para lecionar matemática para séries mais avançadas do que aquelas às quais ele já estava habilitado, Graßmann escreve a dissertação *Theorie der Ebbe und Flut*, em que estabelece uma espécie de cálculo vetorial aplicado à teoria das marés. Nessa obra, há conceitos inovadores como o de produto linear (*lineären Produkt*) e produto geométrico (*geometrischen Produkt*) – o primeiro sendo idêntico ao produto interno praticado atualmente e, o segundo, parecido com o produto vetorial moderno. Esses conceitos serão desenvolvidos posteriormente por Graßmann até se transformar em sua teoria da extensão lineal[52].

Em 1844, Graßmann publica *Die Lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik*, ou A_1, considerada sua obra-prima; em que apresenta mais detalhadamente seus conceitos da teoria da extensão lineal. Entre as ideias contidas no livro estão a de 'vetor' (*Strecke*), 'espaço vetorial', 'combinação linear', 'base', 'dimensão', 'produtos vetoriais', centro de massa (similar ao praticado no cálculo baricêntrico de Möbius) etc. No entanto, a recepção do trabalho não foi como Graßmann esperava, e cópias do livro chegaram a ser descartadas pelo editor.

Em 1862, é publicada *Die Ausdehnungslehre Vollständing und in strenger Form bearbeitet*, ou A_2. Nela, os conceitos de Graßmann são apresentados de forma mais euclidiana. Além disso, nesta nova obra são omitidos os comentários de cunho mais filosófico que se encontravam no A_1, e que tinham sido considerados de difícil compreensão por alguns matemáticos.

HAMILTON E OS QUATÉRNIOS

Há relatos detalhados sobre a vida do matemático irlandês William Rowan Hamilton, nascido em Dublin, desde a primeira infância até a sua morte, nos três volumes de *Life of Sir William Rowan Hamilton*, escrito por seu amigo Robert Graves; e também em *Sir William Rowan Hamilton*, de Thomas Hankins. Hamilton ingressou no Trinity College Dublin aos 18 anos e obteve distinção entre os estudantes, tanto no âmbito das ciências quanto no estudo dos clássicos. Em 1827, ainda estudante do TCD, foi nomeado Astrônomo Real e professor de Astronomia.

Em 1843, Hamilton construiu um novo tipo de conjunto, simbolizado como H, cujos elementos ele denominou quatérnios. Tais números seriam do tipo $q = u + xi + yj + zk$, compostos de uma parte real u e três partes imaginárias: i, j e k, com x, y, z reais. No conjunto dos quatérnios eram observadas quase todas as propriedades da aritmética desejadas por Hamilton, com uma única exceção: a comutatividade da multiplicação. De fato, os produtos entre as unidades imaginárias presentes nos quatérnios seriam tais que:

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1; \\ ij = k, jk = i, ki = j; \\ ji = -k, kj = -i, ik = -j. \end{gathered}$$

Como podemos observar acima, o produto entre dois quatérnios tem o seu sinal alterado se trocarmos a ordem dos fatores. Hamilton utilizou pela primeira vez os termos *vector* e *escalar*, e estabeleceu o produto entre quatérnios.

[52]Optamos por traduzir o termo alemão *lineale*, adjetivo inventado e utilizado por Graßmann na *Ausdehnungslehre* de 1844, como lineal, pois em seu conceito original o autor estava produzindo o adjetivo *lineale* a partir do substantivo alemão *Lineal*, que significa régua.

O resultado do produto entre quatérnios é também um quatérnio, com uma parte escalar e uma parte vetorial. Multiplicando dois quatérnios que possuem partes escalares nulas, a parte escalar do produto é igual ao ‘produto interno’ moderno, apenas com sinal trocado; enquanto a parte vetorial seria idêntica ao atual ‘produto vetorial’ entre vetores tridimensionais. As principais obras de Hamilton sobre os quatérnios são *Lectures in Quaternions*, de 1853, e *Elements of Quaternions*, de 1866.

ALGUNS DESDOBRAMENTOS DAS TEORIAS DE GRASSMANN E DE HAMILTON

Percebemos nesse estudo que muitos dos conceitos da Álgebra Linear já estavam presentes nas obras de Graßmann desde a dissertação sobre Teoria das Marés, mas principalmente desde o A_1. Esses conceitos foram trabalhados posteriormente por outros matemáticos, como foi o caso de Giuseppe Peano e Hermann Hankel. Por outro lado, Crowe (1994) analisa as tranformações de ideias relacionadas aos quatérnios de Hamilton a conceitos do Cálculo Vetorial, levando em conta principalmente as recepções dessas ideias por Maxwell, Gibbs e Heaviside, que as desenvolveram de modo independente.

BIBLIOGRAFIA

[1] CROWE, M. **A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system**. New York: Courier Corporation, 1994.

[2] ENGEL, F. **Grassmanns Leben: Nebst einem Verzeichnisse dervon Grassmann veröffentlichten Schriften und einer Übersicht des handschriftlichen Nachlasses**. Leipzig: Teubner, 1911.

[3] HANKINS, T. **Sir William Rowan Hamilton**. Baltimore e London: Johns Hopkins University Press, 1980.

Explorando a beleza da matemática

Desvendando Sistemas de Numeração e Equações de Segunda Ordem

Araújo, Demetrius Gonçalves de[53]

Resumo: *Neste emocionante mergulho no universo matemático, somos conduzidos a descobrir a beleza oculta por trás de problemas e soluções. Cada desafio é uma oportunidade única de explorar a mente humana e expandir os horizontes do conhecimento. Em nosso percurso, nos deparamos com um intrigante quebra-cabeça matemático: a equação* $(57 + 33 = 112)$ *em um sistema de numeração de base* (b)*. Através de uma cuidadosa análise, compreendemos as nuances desse sistema e nos dedicamos a encontrar uma solução elegante. Ao explorar os fundamentos das bases numéricas e equações quadráticas, somos guiados por uma jornada de descoberta e aprendizado. Destaca-se especialmente o uso da fórmula resolutiva da equação de segunda ordem para determinar o valor de* (b)*, crucial para a resolução do problema proposto. Ao final, nossa busca nos leva a desvendar os segredos ocultos nos números e nas equações, revelando a verdadeira essência da matemática.*

Palavras-chave: *Matemática, bases numéricas, equação de segunda ordem.*

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Desvendando a Beleza dos Problemas e Soluções Matemáticas

Na vastidão do universo matemático, há uma beleza oculta, uma elegância que transcende os números e as fórmulas. Em cada desafio, em cada problema a ser resolvido, reside uma oportunidade única de explorar o poder da mente humana, de mergulhar nas profundezas do pensamento abstrato e de descobrir soluções que são verdadeiras obras-primas da criatividade e do raciocínio lógico.Imagine-se diante de um quebra-cabeça matemático, com suas peças dispostas em intricados arranjos, desafiando-o a encontrar a chave para desvendar seu mistério. Cada número, cada equação, é um convite para uma jornada de descoberta e aprendizado, uma oportunidade para exercitar a mente e expandir os horizontes do conhecimento.

Hoje, convido-o a mergulhar conosco nesse mundo fascinante dos “Belos Problemas e Belas Soluções” da matemática. Explore conosco a arte de formular questões desafiadoras, que estimulam a criatividade e o pensamento crítico. Juntos, vamos desvendar enigmas intrigantes, encontrar padrões surpreendentes e desfrutar da satisfação única de encontrar uma solução elegante e eficaz.

Para começar nossa jornada, vamos nos deparar com um problema simples, mas intrigante:

Em um sistema de numeração de base (b), temos a expressão $(57 + 33 = 112)$. Agora, o desafio é calcular $(57 * 33)$ nessa mesma base. Prepare-se para embarcar em uma jornada de descoberta e exploração matemática, onde cada passo nos levará mais perto da verdadeira essência da beleza dos números e das soluções.

[53]SEDUC-PA, demetrius.araujo@hotmail.com

Explorando o Problema e Buscando Soluções Elegantes

O problema apresentado é um exemplo intrigante da beleza e da profundidade da matemática. Ao nos depararmos com a equação $(57+33 = 112)$ em um sistema de numeração de base (b), somos desafiados a entender as nuances desse sistema e a aplicar nossos conhecimentos para encontrar uma solução adequada.

Para resolver esse problema, devemos primeiro compreender o que significa trabalhar em um sistema de numeração de base(b). Em um sistema de base(b), cada posição de um número representa uma potência de (b). Por exemplo, no sistema decimal (base 10), o número (112) representa:

$$1 * 10^2 + 1 * 10^1 + 2 * 10^0 = 112$$

Dessa forma, quando nos deparamos com a expressão $(57 + 33 = 112)$ em um sistema de base (b), podemos interpretá-la da seguinte maneira:

$$(5 * b^1 + 7 * b^0) + (3 * b^1 + 3 * b^0) = (1 * b^2 + 1 * b^1 + 2 * b^0)$$

Nossa tarefa agora é determinar o valor de (b) e calcular $(57 * 33)$ nesse sistema de numeração. Para isso, podemos expandir a expressão e igualar os termos semelhantes:

$$(5b + 7 * 1) + (3b + 3 * 1) = (1 * b^2 + 1 * b + 2 * 1)$$

$$(5b + 7) + (3b + 3) = (b^2 + b + 2)$$

$$5b + 7 + 3b + 3 = b^2 + b + 2$$

$$7b + 8 = b^2$$

Em seguida, podemos reorganizar os termos para obter uma equação quadrática em termos de:

$$b^2 - 7b - 8 = 0$$

Onde $a = 1$, $b = -7$ e $c = -8$. Substituindo esses valores na fórmula quadrática, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 * 1 * (-8)}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 9}{2}$$

$$x1 = \frac{7 + 9}{2} = 8$$

$$x2 = \frac{7 - 9}{2} = -1$$

Agora, temos duas soluções possíveis para b.

No contexto de sistemas de numeração, geralmente consideramos apenas soluções positivas para b. Portanto, a solução adequada é $b = 8$. Isso significa que a equação $57 + 33 = 112$ é verdadeira em um sistema de numeração de base 8.

Após determinarmos o valor de (b), podemos calcular $(57 * 33)$ nesse sistema de numeração de base (b), aplicando a mesma lógica de multiplicação que utilizamos no sistema decimal, mas agora considerando a base (b).

Para calcular $(57 * 33)$ em um sistema de numeração de base 8, devemos primeiro converter os números para base 10, realizar a multiplicação e depois converter o resultado de volta para base 8.

I. Convertendo os números para base 10:

57 em base 10 é:

$$(5 * 8^1) + (7 * 8^0) =$$
$$40 + 7 = 47.$$

$$(3 * 8^1) + (3 * 8^0) =$$
$$24 + 3 = 27.$$

II. Realizando a multiplicação em base 10:

$47 * 27 = 1269.$

III. Convertendo o resultado de volta para base 8:

Agora, precisamos dividir (1269) por (8) sucessivamente até que o quociente seja (0). Os restos de cada divisão serão os dígitos do número em base 8.

$$1269 \div 8 = 158, \text{ resto } 5$$
$$158 \div 8 = 19, \text{ resto } 6$$
$$19 \div 8 = 2, \text{ resto } 3$$
$$2 \div 8 = 0, \text{ resto } 2$$

Portanto, o resultado de $(57 * 33)$ na base 8 é (2365).

Com isso, concluímos nossa jornada para encontrar uma solução elegante para o problema proposto, explorando os conceitos matemáticos fundamentais e aplicando nosso raciocínio lógico para desvendar os segredos ocultos nos números e nas equações.

BIBLIOGRAFIA

[1] Strang, G. ; **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2010.

[2] Cormen, T. H.; Leiserson, C. E.; Rivest, R. L.; Stein, C.; **Introduction to Algorithms**. 2018.

[3] Brown, J.; **Álgebra Avançada: Teoria e Aplicações**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Editora Universitária, 2020.

Inteligência artificial no ensino de matemática

Potencialidades, Desafios e Perspectivas

Demetrius Gonçalves de Araújo[54];

Resumo: *O artigo investiga o impacto da inteligência artificial (IA) no ensino de Matemática, visando uma educação matemática mais acessível e eficaz. A metodologia incluiu uma revisão bibliográfica abrangente, analisando estudos que exploram oportunidades, desafios e percepções práticas relacionadas à integração da IA na educação matemática. Conclui-se que a IA tem o potencial de personalizar a instrução e enriquecer a experiência de aprendizado, porém é crucial abordar questões éticas e pedagógicas para garantir um uso alinhado com princípios educacionais sólidos. Em suma, a interseção entre IA e ensino de Matemática promete uma abordagem mais inclusiva e eficaz para a disciplina no futuro educacional.*

Palavras-chave: *Matemática, base numéricas, equações quadráticas.*

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No cenário educacional contemporâneo, a integração da inteligência artificial (IA) tem se destacado como uma ferramenta inovadora e transformadora, oferecendo potencialidades significativas para aprimorar o processo de ensino e aprendizado em diversas disciplinas (Kumar *et al.*, 2020). Dentro desse contexto, a Matemática, muitas vezes percebida como uma disciplina desafiadora, encontra na inteligência artificial uma aliada promissora para superar barreiras e otimizar a experiência de estudantes e educadores. O presente artigo visa explorar a crescente influência da inteligência artificial no ensino de Matemática, analisando suas aplicações, benefícios e desafios, proporcionando uma visão abrangente sobre como essa tecnologia pode revolucionar o modo como concebemos e praticamos o ensino desta importante disciplina. Ao mergulhar nesse universo interdisciplinar, buscamos compreender de que maneira a inteligência artificial pode contribuir para a construção de uma educação matemática mais acessível, personalizada e eficaz, promovendo, assim, um ambiente educacional mais inclusivo e adaptado às demandas do século XXI.

Para embasar nossa investigação, recorremos a diversas fontes que exploram o papel da inteligência artificial na educação, com foco específico no ensino de Matemática. O estudo de Kumar et al. (2020) destaca as oportunidades e desafios encontrados na integração da inteligência artificial na educação, fornecendo um contexto amplo para nossa análise. Além disso, a pesquisa

[54]SEDUC-PA, Demetrius Gonçalves de Araújo, `demetrius.araujo@hotmail.com`

de Hong e Khan (2021) oferece insights valiosos sobre a percepção dos profissionais da educação quanto ao impacto da inteligência artificial no ensino e aprendizado.

No que diz respeito ao ensino de Matemática, a revisão de literatura conduzida por Khan et al. (2019) apresenta uma análise abrangente das aplicações da inteligência artificial nesse campo, destacando tendências e desenvolvimentos recentes. VanLehn (2019), por sua vez, discute o potencial da inteligência artificial para personalizar a instrução em contextos educacionais, incluindo a Matemática, enquanto o capítulo de Rodrigues et al. (2021) oferece uma visão mais ampla sobre o papel da inteligência artificial na educação, com exemplos específicos de sua aplicação na Matemática.

Ao integrar essas perspectivas e evidências, buscamos fornecer uma análise robusta e informada sobre o impacto da inteligência artificial no ensino de Matemática, destacando seu potencial para promover uma educação matemática mais acessível, personalizada e eficaz.

METODOLOGIA

A revisão bibliográfica constitui o alicerce deste estudo, fornecendo uma base sólida para a compreensão do papel da inteligência artificial no ensino de Matemática. A pesquisa abrangeu uma ampla gama de fontes acadêmicas, incluindo artigos científicos, livros e teses, que exploram diversas facetas dessa interseção entre inteligência artificial e educação matemática.

Kumar, Patel e Bhatt (2020) oferecem uma visão abrangente das oportunidades e desafios encontrados na integração da inteligência artificial na educação, fornecendo um contexto amplo para compreender a aplicação dessa tecnologia no ensino de Matemática. Destacam-se também as tendências e desenvolvimentos recentes discutidos por Khan, Awang e Alghamdi (2019) em sua revisão de literatura sobre inteligência artificial no ensino de Matemática, fornecendo uma análise aprofundada das aplicações e implicações dessa abordagem.

Além disso, estudos de caso, como os analisados por VanLehn (2019), oferecem exemplos concretos de implementação de sistemas de inteligência artificial no contexto do ensino de Matemática, demonstrando os benefícios e desafios práticos enfrentados por educadores e alunos. Essas análises de casos reforçam a importância de investigar não apenas as potencialidades teóricas, mas também as aplicações práticas da inteligência artificial na educação matemática.

Para compreender melhor a percepção e experiência dos profissionais da educação, a pesquisa de Hong e Khan (2021) oferece insights valiosos sobre o impacto da inteligência artificial no ensino e aprendizado, destacando a importância de considerar não apenas os aspectos técnicos, mas também as implicações pedagógicas e sociais dessa integração.

Essa revisão bibliográfica abrangente proporcionou uma compreensão ampla e informada sobre o estado atual da pesquisa sobre inteligência artificial no ensino de Matemática, fornecendo uma base sólida para a análise e discussão dos resultados desta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

À medida que exploramos o papel da inteligência artificial no ensino de Matemática, torna-se evidente que essa fusão de tecnologia e educação desencadeia potencialidades transformadoras e inovações significativas. A revisão bibliográfica abordou os desafios e oportunidades apresentados pela integração da inteligência artificial no contexto educacional, especialmente no âmbito da disciplina matemática.

Os estudos revisados forneceram uma visão abrangente das aplicações específicas da inteligência artificial na educação matemática, destacando casos de sucesso, desafios práticos e tendências emergentes. A pesquisa de Kumar et al. (2020) delineou os desafios a serem enfrentados, enquanto Khan et al. (2019) aprofundaram as aplicações específicas dessa tecnologia no ensino de Matemática.

Os estudos de caso, como os examinados por VanLehn (2019), ofereceram exemplos concretos de como a inteligência artificial pode personalizar a instrução, adaptando-se às necessidades individuais dos alunos. Além disso, a perspectiva dos profissionais da educação, explorada por Hong e Khan (2021), forneceu insights valiosos sobre as percepções e experiências práticas relacionadas ao uso da inteligência artificial no ambiente educacional.

Diante dessas análises, é possível inferir que a inteligência artificial, quando adequadamente aplicada, pode não apenas superar obstáculos tradicionais no ensino de Matemática, mas também enriquecer a experiência de aprendizado, tornando-a mais personalizada e eficaz. No entanto, é crucial abordar questões éticas, sociais e pedagógicas que emergem nesse cenário, garantindo que o uso da inteligência artificial esteja alinhado com princípios educacionais sólidos e promova a equidade no acesso ao conhecimento matemático.

Em conclusão, o estudo desta interseção entre inteligência artificial e ensino de Matemática oferece uma visão promissora para o futuro da educação. Ao navegar por desafios e oportunidades, os educadores, pesquisadores e desenvolvedores podem moldar uma abordagem mais inclusiva e eficaz para o ensino da Matemática, proporcionando aos estudantes as ferramentas necessárias para prosperar em um mundo cada vez mais tecnológico e complexo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Hong, J.; Khan, M.;**The Impact of Artificial Intelligence on Education: The Perspective of Education Practitioners.** International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET), 16(12), 126–144, 2021.

[2] Khan, M. N.; Awang, H.; Alghamdi, F; **Artificial Intelligence in Mathematics Education: A Literature Review.** Journal of Educational Technology & Society, 22(2), 74–84, 2019.

[3] Kumar, V.; Patel, D.; Bhatt, N.; **Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities.** International Journal of Information Technology and Computer Science, 12(6), 51–61, 2020.

[4] Rodrigues, A.; Silva, S.; Cota, M. P.; **Handbook of Research on Integrating Artificial Intelligence Into Everyday Life.** Hershey, PA: IGI Global, (Eds.) 2021.

[5] VanLehn, K.; **Using Artificial Intelligence to Individualize Instruction: Promise and Pitfalls.** In R. Zheng (Ed.), Artificial Intelligence in Education: 20th International Conference, AIED 2019, Proceedings (pp. 3–14). Cham: Springer International Publishing, 2019.

Dificuldades de aprendizagem em matemática pós-pandemia na educação básica e estratégias de apoio

Um trabalho baseado em pesquisas bibliográficas e relato de experiência no PIBID

Sudario, Deyvison [55]; Ledoux, Paula [56]

Resumo: *Este trabalho faz abordagens acerca das dificuldades e desafios enfrentados por alunos da educação básica para aprender conceitos matemáticos e aponta estratégias de intervenção para ajudá-los a superar os problemas que se postam no dia a dia da sala de aula, após retorno das aulas presenciais. As dificuldades na aprendizagem de conceitos matemáticos, além de terem sido acentuadas pelo período pândemico, que deixou grandes desafios no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Com o fechamento das escolas, houve a necessidade de fazer adequações que dessem conta de dar continuidade as aulas, surgindo o ensino remoto. Este novo formato trouxe desafios, tanto para alunos que tiveram que enfrentar uma nova forma de aprender com limitações pela falta de interação presencial e de acesso a recursos tecnológicos, quanto os professores que tiveram que se reinventar, adequando-se ao novo formato de ensinar. Além destes aspectos, as dificuldades podem estar vinculadas a uma variedade de elementos que estão associadas as diferenças individuais, especialmente no que se refere a habilidade de aprender que pode estar comprometida pela falta de conhecimento, compreensão e aplicação de conceitos matemáticos fundamentais, somados as ineficiências que foram demarcadas na base matemática inicial. No entanto, compreende-se que com intervenções apropriadas, as dificuldades tendem ser reduzidas e as habilidades matemáticas desenvolvidas de forma espontânea e prazerosa. Os desafios também podem ser enfrentados por meio de estratégias de ensino, com a inserção de novas ferramentas de aprendizagem, como os jogos matemáticos, foco desta pesquisa, que podem ser vistos como mediadores na aprendizagem de conceitos matemáticos.*

Palavras-chave: *Matemática, dificuldade de aprendizagem, estratégias de ensino matemático, jogos matemáticos.*

[55]Graduando em licenciatura plena em matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA) Campus castanhal – CUNCAST – dede.deyvison5328@gmail.com

[56]Doutora em Educação em Ciências e Matemática, pelo Programa de Pós-Graduação REAMEC - Universidade Federal de Mato Grosso, Polo Universidade Federal do Pará/IEMCI –Professora Adjunta da Universidade Federal do Pará – UFPA. paulaledoux@hotmail.com

OBJETIVO GERAL

Buscar contribuir para as práticas educacionais mais inclusivas e eficazes, visando capacitar os alunos e professores a enfrentar os desafios do mundo contemporâneo de forma mais confiante e competente.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Investigar as principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes de educação básica em relação à aprendizagem da matemática após o período de pandemia, considerando fatores como a transição para o ensino remoto, a falta de interação presencial e as disparidades socioeconômicas.

2. Avaliar o impacto das dificuldades de aprendizagem em matemática pós-pandemia na progressão acadêmica e no desenvolvimento socioemocional dos alunos, identificando possíveis efeitos a longo prazo e áreas específicas de defasagem no aprendizado.

METODOLOGIA

Os métodos de aplicação e desenvolvimento deste trabalho se deu em pesquisas bibliográficas de trabalhos publicados e conceitos a partir de algumas leituras de revistas. Além, de relato de experiência do autor do trabalho.

INTRODUÇÃO E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O mundo foi surpreendido com o imprevisto de uma pandemia. Em meados de 11 de março de 2020, a Organização Mundial de Saúde (OMS), fez recomendações, das quais entre elas, o distanciamento social, dado como medida para tentar controlar o problema. O Ministério da Saúde declarou emergência total em saúde pública na Portaria nº188, e assim estados e municípios suspenderam as atividades escolares presencial.

E assim, vamos explorar as complexidades enfrentadas pelos alunos da educação básica no processo de aprendizagem de conceitos matemáticos, especialmente acentuada durante o período pandêmico que impactou profundamente o cenário educacional. Com o fechamento das escolas e a transição para o ensino remoto, tanto alunos quanto professores enfrentaram novos desafios, desde a adaptação quanto a uma nova forma de ensino até a superação das limitações impostas pela falta de interação presencial e acesso a recursos tecnológico de ambas as partes. Segundo Tjara (2012) que diz:

> “[...] a incorporação das novas tecnologias de comunicação e informação nos ambientes educacionais provoca um processo de mudança contínuo, não permitindo mais uma parada, visto que as mudanças ocorrem cada vez mais rapidamente e em curtíssimo espaço de tempo”.

Esta mudança abrupta destacou ainda mais as lacunas na compreensão e aplicação de conceitos matemáticos fundamentais, evidenciando a necessidade premente de intervenções eficazes para mitigar tais dificuldades. Além das adversidades enfrentadas no contexto pandêmico, as dificuldades na aprendizagem da matemática podem estar enraizadas em uma variedade de fatores, incluindo diferenças individuais e deficiências na base matemática inicial.

> A pandemia trouxe a grande necessidade de transformações rápidas e de certa forma, urgentes para o ensino realizado de forma remota. Pois, uma grande crise necessitou e acelerou o processo de adequação das práticas pedagógicas mediadas pelas tecnologias e fez com que os professores avançassem décadas em meses (MACHADO, 2020).

SANTOS, Marcele da silva (2020)

Desde o final do século XX, formação de professores tem sido tema de pesquisas na Educação, nas quais encontra-se ofertas, no mínimo interessantes, para uma formação continuada que privilegie o espaço da escola como potente local para essa formação. Seguindo essa perspetiva, Gauthier et al. (2013), ao falarem dos saberes docentes, preconizam o saber da ação pedagógica que consiste nas experiências profissionais refletidas e compartilhadas, saindo da esfera do particular para o público, podendo contribuir grandemente para o avanço da profissão. Para o autor existe uma correlação direta do saber da ação pedagógica e o reconhecimento da profissão docente, como podemos observar a seguir:

> [...] como a população em geral poderia reconhecer a pertinência e a especialidade de um saber pedagógico de alto nível se os próprios docentes não o fazem? Esse problema, a nosso ver, poderia ser resolvido pondo-se em evidência um saber da ação pedagógica legitimado pela pesquisa e pela própria atividade dos professores e integrado na formação docente. Desse modo, a formação inicial, recebida na universidade, refletiria melhor a prática no meio escolar, e o saber do próprio professor, difundido no seio da universidade, encontraria aí um reconhecimento de sua pertinência (GAUTHIER et al., 2013, p. 35).

Andrea Brandão Locatelli (2020)

Mesmo, contudo, acredita-se que com abordagens de intervenção adequadas, essas dificuldades podem ser reduzidas e as habilidades matemáticas podem ser desenvolvidas de formas mais eficazes e prazerosas. Nesse sentido, se propõe a explorar estratégias de ensino, com foco especial nos jogos matemáticos, visando oferecer soluções tangíveis para os desafios enfrentados por alunos e professores no ambiente educacional contemporâneo.

O autor deste trabalho é PIBIDIANO, e, juntamente com outros bolsistas do Pibid buscaram levar a matemática de forma lúdica, nesse contexto, foi e está sendo fundamental explorar estratégias de apoio que foram e estão sendo implementado tanto no contexto intraclasse quanto no extraclasse no ambiente escolar, onde foi implementado um subprojecto de reforço de matemática intitulado **'Matemática? Te puxa, bora aprender'**, no qual no extraclasse de onde o autor do trabalho faz parte. Levávamos os assuntos do qual seus próprios professores nos repassavam, e sempre no final da aula e explicação do assunto, trabalhávamos com jogos matemáticos, toda semana havia um jogo diferente e referente ao assunto em que ali estava sendo passado para eles, em uma aula de reforço no contra turno das turmas de 8º e 9º ano do ensino fundamental maior, e isso, gerou grandes resultados segundos os próprios alunos e depoimentos dos seus respectivos professores, a seguir uns exemplos de jogos matemáticos que envolvia o assunto dado no reforço escolar extraclasse no subprojecto: vemos agora dois dos muitos jogos feitos por esses bolsistas Pibidianos do qual o autor faz parte como: 'Dominó dos ângulos e fechando o adversário'.

O objetivo do jogo 'dominó dos ângulos' é proporcionar uma forma lúdica de interativa para os jogadores praticarem o reconhecimento e a classificação de ângulos. Ao invés de combinar números como do menor tradicional, neste jogo, os jogadores combinam peças que representam diferentes tipos de ângulos (reto, agudo, obtuso, etc.) de modo que, os lados correspondentes dos ângulos tenham medidas compatíveis.

Ainda neste viés, trouxe o jogo de tabuleiro semelhante ao jogo de xadrez, porém o objetivo do jogo também é mexer as tampinhas de forma que desse xeque-mate no adversário e deixasse o mesmo sem poder fazer nenhum movimento, e assim saia o ganhador do jogo. O intuito deste jogo, é trabalhar o raciocínio lógico, pensamento ágil, coordenação motora, e estratégias de chegar a uma solução. Com isso, podemos mostrar que na matemática é assim, quando pensamos direito e raciocinamos de forma correta, podemos chegar ao nosso objetivo de resolução.

E assim muitos alunos e professores foram vendo que a matemática tem muitos métodos de se trabalhar e metodologias de se aplicar, as diversas formas apresentadas pelo autor do trabalho na escola com o subprojecto **'Matemática? Te puxa, bora aprender'**, do qual foi um subprojecto desenvolvido por uma professora de matemática juntamente com 4 (quatro) alunos bolsistas do PIBID, do qual um deles é o autor deste trabalho. E assim, foi implementado e acrescentado mais interesse em busca do conhecimento pela matemática e ainda assim, foram fechadas algumas lacunas no processo de ensino e aprendizagem desses alunos de matemática na educação básica. Porém, ainda há muito a se fazer.

CONCLUSÃO

A pandemia global desencadeada pelo surgimento da COVID-19 em 2019 transformou radicalmente todos os aspectos da vida humana, e a educação não foi exceção. Com o fechamento em todo o mundo como medida de contenção da propagação do vírus, milhões de estudantes foram afetados, essa transição do ensino presencial para o ensino remoto fez uma grande mudança no senário estudantil. Na esteira dessas mudanças, surgiram desafios adicionais para o ensino e aprendizagem de disciplinas fundamentais, como a matemática na educação básica. Além disso, a crise sanitária expôs e aprofundou desigualdades pré-existentes no sistema educacional, afetando de forma desproporcional estudantes de comunidades marginalizadas, com acesso limitado à tecnologia e condições socioeconómicas desfavoráveis. Essa realidade complexa demanda uma abordagem multifacetada para compreender e abordar as dificuldades de aprendizagem e abordar as dificuldades de aprendizagem em matemática após a pandemia.

BIBLIOGRAFIA

[1] Machado, P.L. P. ;**Educação em tempos de pandemia: O ensinar através de tecnologias e mídias digitais**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 05, Ed. 06, Vol.08, pp. 58-68. junho de 2020. ISSN: 2448-0959 <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/tempos-de-pandemia>

[2] Castro, P.A. ; **A (im)pertinência das teorias pedagógicas no ensino de Ciências Exatas no Ensino Superior**,.Departamento de Física; Universidade Federal de Goiás – Regional Catalão, Brasil. padecastro@gmail.com

[3] Tajra, S. F. .;**Informática na Educação: novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. Saraiva Educação, São Paulo, 2011.

Uma aplicação da geometria analítica na construção de máscaras africanas: uma abordagem na sala de aula

Rocha, Dimas Francisco [57]

Resumo: *Este trabalho apresenta as máscaras africanas construídas no Geogebra tendo como base de construção os conceitos estudados na Geometria Analítica. O objetivo consiste em relacionar conceitos matemáticos, mais especificamente as secções cônicas com o movimento artístico "Cubismo" por meio de uma abordagem histó-rica referente a cultura africana. Este texto pretende demonstrar como se deu o desenvolvimento dos educan-dos de uma turma de terceiro ano do Ensino Médio em uma atividade interdisciplinar que abrangeu as disci-plinas de Matemática, Arte e História com o apoio do Recurso Educacional GeoGebra, na Escola Estadual Agostinho Grigoleto, localizada no município de Brejo Alegre, durante o segundo semestre de 2019. Com a aplicação desta atividade os educandos construiram as máscaras africanas no Geogebra, enriqueceram seus conhecimentos a respeito da cultura africana e obteve-se um aprimoramento das propriedades relacionadas as cônicas durante a construção das máscaras.*

Palavras-chave: *Geogebra, geometria analítica, máscaras africanas.*

INTRODUÇÃO

O presente estudo abordará as máscaras africanas construídas em um programa computacional baseado na geometria analítica o qual é o Geogebra. A ideia de aplicar os conceitos das secções cônicas de forma intuitiva, no processo de construção de máscaras africanas surge a partir do diálogo interdisciplinar entre o Cubismo (conteúdo estudado em Arte) e da análise dos diversos conhecimentos matemáticos esculpidos nas máscaras africanas com seus elementos geométricos e concomitantemente faz um resgate cultural, apresentando os significados das máscaras Fang e Chewa em suas respectivas culturas.

Este texto pretende demonstrar como se deu o desenvolvimento dos educandos de uma turma de terceira série de Ensino Médio em uma atividade interdisciplinar que abrangeu as disciplinas de Matemática, Arte e História com o apoio do Recurso Educacional GeoGebra, na Escola Estadual Agostinho Grigoleto, localizada no município de Brejo Alegre, durante o segundo semestre de 2019. Neste sentido foi solicitado aos alunos para elaborarem suas máscaras pensando nos conceitos matemáticos, não se distanciando da abordagem social, cultural e ancestral das mesmas.

[57]SEDUC-SP (Secretaria da Educação do Estado de São Paulo). Marília, SP. `dimasrocha@prof.educacao.sp.gov.br`

O objetivo central deste trabalho consiste em relacionar as equações algébricas das algébricas das cônicas com movimentos artístico cubismo que teve como principal precursor o artista plástico Pablo Picasso, de acordo com [5] o interesse e a curiosidade de Picasso pela arte Africana foram estimulados por visitas constantes ao Trocadero onde se terá deparado com esculturas do Congo e máscaras da África ocidental, como as máscaras da cultura Dan denominadas Gle concebidas como encarnações de seres espirituais chamados para benefício da comunidade. Deste modo, busca-se contextualizar os conteúdos matemáticos, a história e cultura africana, com o intuito de quebrar paradigmas e colaborar para a construção da identidade cultural e sobretudo o respeito mútuo entre as culturas e sua diversidade.

METODOLOGIA

A proposta deste projeto foi estabelecida por uma aprendizagem da geometria analítica percorrendo desde a distância entre dois pontos até a obtenção das equações da reta e das secções cônicas.

O presente trabalho teve como suporte a esfera tecnológica, a qual foi subsidiada pelo software de geometria dinâmica Geogebra. Os autores de [1] afirmam que estamos tomados pelo conhecimento científico e tecnológico, ou seja, ao utilizar um recurso tecnológico é importante frisar a importância destes na aprendizagem dos estudantes, uma vez que vivemos em era de grande evolução tecnológica e estamos rodeamos de programas, jogos e aplicativos a todo momento. De forma corroborativa, oportunas são as palavras de [4], o qual diz que a educação passa por um desafio de grande porte, adaptar-se aos avanços das tecnologias, orientando o caminho de todos para o domínio e apropriação crítica desses novos meios.

A ideia de se trabalhar com as máscaras africanas, surgiu a partir da minha participação no curso Formação Professores para o ensino da história e cultura Africana e Afro-brasileira, que além de trabalhar assuntos relacionados a cultura negra, heróis negros e figuras notáveis negras no Brasil, trata também da implementação da Lei 11645/08 nas escolas.

Após o período das férias de julho do ano de 2019, o segundo semestre recomeça sempre com um replaneja-mento anual, a fim de analisar os resultados acadêmicos dos estudantes e a partir dos resultados é planejado os novos percursos até o final do ano letivo. Ao analisar os conteúdos e temas desenvolvidos durante o primeiro bimestre, foram percebidas a defasagem em algumas habilidades, dentre elas entrou o tema das secções cônicas. Diante dos dados, para retomar tais habilidades foi planejada uma atividade com a perspectiva interdisciplinar entre as seguintes áreas do conhecimento: Arte, Geografia, História e Matemática.

Inicialmente foram retomados os conceitos e propriedades da geometria analítica tais como: distância entre dois pontos, equação da reta e equação da circunferência.

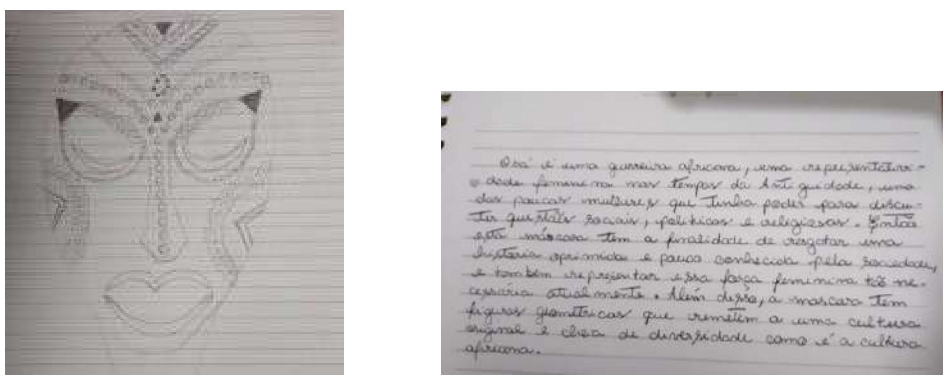
As discussões foram em torno das equações e suas aplicabilidades cotidianas como, por exemplo, na área da Engenharia, e da Arquitetura. Para aprofundar um pouco mais as discussões fizeram-se necessário recorrer as secções cônicas que são: hipérboles, elipses e parábolas.

No segundo momento foi exibido o filme Máscaras Africanas, que é um vídeo que retrata o contexto das más-caras africanas no Gabão e no Malawi. As máscaras presentes nestes dois países têm seus diversos significa-dos desde uma celebridade atual até um ancestral querido e sua utilidade também está presente em uma gama abrangente de rituais culturais, espirituais, dentre outros. Logo após a exibição e discussão do filme a sala foi dividida em grupos de até 4 membros. E então foi sugerido aos alunos que desenhassem máscaras africanas baseadas nas máscaras Fang (Gabão) e Chewa (Malawi), buscando desenhar as secções cônicas, segmentos de retas, polígonos, setor circular e identificar algumas propriedades destes entes matemáticos. Além da construção das máscaras os educandos foram orientados a desenvolverem uma lenda sobre a máscara desenvolvida pelo grupo.

RESULTADOS

Na Figura 1(a) é possível observar os elementos das secções cônicas, tais como: circunferência, parábola, hipérbole e elipse. E durante o processo de construção os estudantes foram orientados a observarem e destarem tais elementos. A Figura 1(b) mostra a lenda que representa a imagem da Figura 1(a), o texto traz a tona questões da igualdade de gênero, mostrando que as mulheres tem a mesma representatividade e importância dos homens para abordar questões relacionadas a política e sociedade.A terceira e última etapa foi desenvolvida no labora-tório de informática após o desenho e a lenda estarem concluídos. No laboratório os construção das máscaras no geogebra e para finalizar cada grupo fez a apresentação de sua máscara. Note que na Figura 2(a) o estudante tenta reproduzir a Figura 1(a) mas, ao tentar desenhar algumas curvas específicas os estudantes tiveram dificuldades, assim tentando deixar o mais próximo do desenho origem. Estas questões foram pontuadas com os estudantes. Mesmo com algumas limitações do software ao modelar as máscaras os estudantes conseguiram produzir belas máscaras e identificar as equações dos respectivos modelos como as que estão presentes na Figura 2(b).

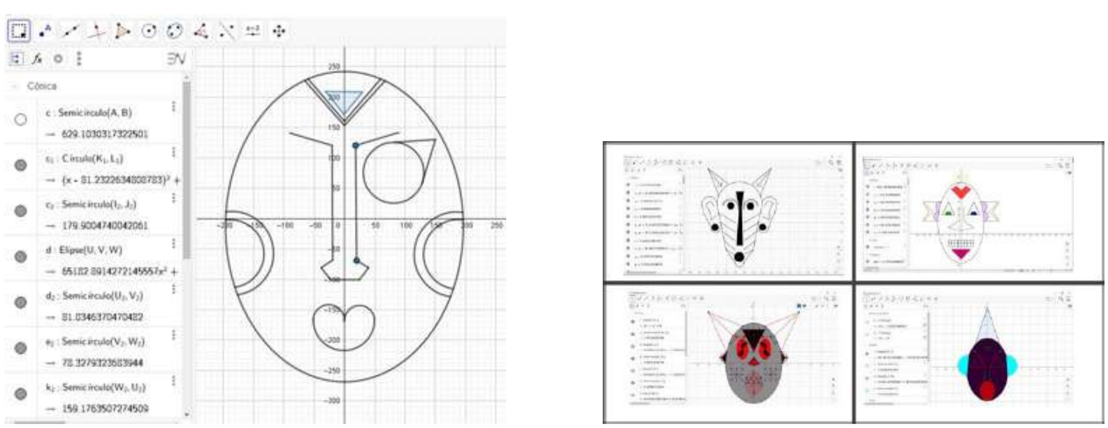
Fig. 13: Máscara africana e lenda relacionada



Obá é uma guerreira africana, uma representatividade feminina nos tempos da Antiguidade, uma das poucas mulheres que tinha poder para discutir questões sociais, políticas e religiosas. Então esta máscara tem a finalidade de resgatar uma história oprimida e pouco conhecida pela sociedade, e também representar essa força feminina tão necessária atualmente. Além disso, a máscara tem figuras geométricas que remetem a uma cultura original e cheia de diversidade como é a cultura africana.

(a) Máscara africana (b) Lenda relacionada

Fig. 14: Reprodução da figura 1 e Máscaras produzidas



(a) Reprodução da figura 1(a) no Geogebra. (b) Máscaras produzidas pelos estudantes

CONCLUSÕES

Após a realização das atividades desenvolvidas pelos grupos que culminou com a apresentação das máscaras, os estudantes compreenderam que a cultura Africana tem suas peculiaridades, pois pontuaram elementos culturais, religiosos, artísticos e científicos que valorizam os feitos e descobertas dos povos africanos, construindo assim para o fortalecimento da identidade cultural afrobrasileira e combatendo preconceitos enraizados. No que se refere ao aspecto do ensino da matemática, obteve-se um aprimoramento das propriedades relacionadas as secções cônicas durante a construção das máscaras, uma vez que os estudantes ao construírem os elementos de suas máscaras puderam observar as equações na janela de álgebra do geogebra. Além disso, os estudantes tiveram a oportunidade de experienciar como a matemática pode estar presente na cultura de um determinado povo e na arte.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bicudo, M. A. V., Rosa, M. ; **A presença da tecnologia na Educação Matemática: efetuando uma tessitura com situações/cenas do filme Avatar e vivências em um curso a distância de formação de professores**. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 6, n. 1, p. 61-103, abr. 2013.

[2] Cunha, J. H. ;**Afroetnomatemática: da filosofia africana ao ensino de matemática pela arte**. Revista da ABPN, v.9, n.22, mar-jun. 2017, p.107-122.

[3] Dantes, L. R. ;**Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. 3. ed. – São Paulo. Ática, 2016.

[4] Kenski, V. ;**Educação e tecnologias. O novo ritmo da informação**. Campinas: Papirus Editora. 2013.

[5] Muralha, F. ;**Influência da arte africana no cubismo.** Disponível em: https://citaliarestauro.com/influencia-da-arte-africana-no-cubismo/. Acesso em 22/11/2019.

[6] Silva, P. B. G. ;**Aprender, ensinar e relações étnicos-raciais no Brasil**. Porto Alegre/RS, n. 3 (63), p. 489-506, set. / dez. 2007.

Identidades polinomiais e isomorfismos das álgebras simples finitas

Gonçalves, Dimas José[58]

Resumo: *Sejam A e B duas álgebras associativas simples e finitas sobre um corpo $\mathbb{F}$. Nesta apresentação, será mostrado que A e B são isomorfas se, e somente se, possuem as mesmas identidades polinomiais. Além disso, sob certas hipóteses, uma versão graduada de tal resultado será apresentada: se A e B são álgebras de matrizes G-graduadas e G é um grupo abeliano tal que todo subgrupo finito seu é cíclico, então A e B são G-isomorfas se, e somente se, possuem as mesmas identidades polinomiais G-graduadas.*

Este trabalho foi realizado em conjunto com Diogo Diniz, Daniela Martinez Correa e Plamen Koshlukov.

Palavras-chave: *Identidades polinomiais, isomorfismo, álgebras simples, graduação.*

[58]Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo 2018/23690-6.

Introdução ao ensino de geometria com Google maps

Gonçalves, Douglas Pedroso; Saurin, Júlia Maria; Oliveira, Carlos Eduardo; Silva, Juliana Cristina da.

Resumo: *O presente trabalho tem por objetivo apresentar estudos relacionados ao desenvolvimento de uma atividade que aborda os conhecimentos relacionados à geometria euclidiana, com foco no tema da distância entre pontos, utilizando o teorema de Pitágoras. A proposta compreende o uso das tecnologias digitais como principal agente da aprendizagem, promovendo uma atividade que permitisse ao participante compreender na prática o conceito de distância entre dois pontos, utilizando o software Google Maps.*

Palavras-chave: *Geometria, tecnologias digitais, distância entre pontos, teorema de Pitágoras.*

INTRODUÇÃO

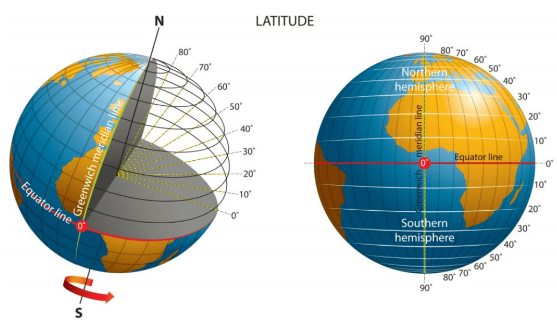
A utilização das tecnologias digitais na educação matemática tem se revelado uma ferramenta valiosa, proporcionando novas abordagens e recursos para a aprendizagem dos estudantes. Diversas tecnologias, desde simples aplicativos até ambientes de aprendizagem online, têm sido integradas nas práticas educacionais, contribuindo para um ensino mais dinâmico e envolvente. Nos últimos anos, especialmente no período pós pandêmico, essa tendência de amplo uso da tecnologia na sala de aula tem sido cada vez mais observada.

O propósito da atividade apresentada neste estudo é investigar e destacar as capacidades oferecidas pelo uso das Tecnologias Digitais, especificamente o Google Maps. Permitindo que os estudantes assimilassem, de maneira prática, o conceito de distância entre dois pontos. O Software assumiu o papel primordial como facilitador principal desse entendimento, transformando a tecnologia escolhida em um meio fundamental de aprendizado, ultrapassando sua função convencional de mero suporte.

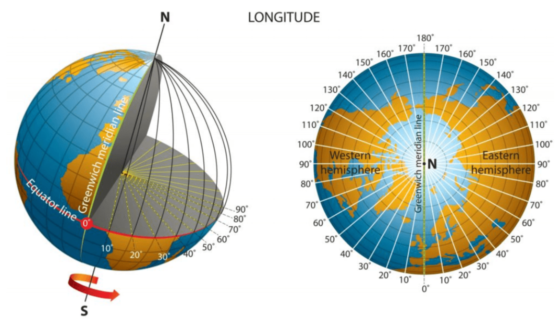
Através do Google Maps os usuários podem calcular áreas, traçar rotas alternativas, medir distâncias e explorar uma variedade de informações geográficas com facilidade. Isso proporciona aos discentes a oportunidade de aplicar conceitos matemáticos de uma maneira prática e significativa com o auxílio de uma ferramenta que já faz parte do seu cotidiano.

DESENVOLVIMENTO

Visando uma abordagem educacional mais dinâmica, o uso do software Google Maps, tem por objetivo permitir que os estudantes percebam de maneira prática, como relacionar conceitos matemáticos para encontrar a distância entre dois pontos.
Em primeiro momento, ao escolher dois pontos no mapa, suas coordenadas serão identificadas através das métricas em graus de latitude e longitude. Para realizar a atividade é importante entender que a latitude representa qualquer ponto da superfície terrestre até a Linha do Equador, variando de 0° a 90° tanto no Hemisfério Norte quanto no Hemisfério Sul. As figuras 15(c) e 15(d) mostram as interpretações da latitude e longitude da Terra.



(c) Latitude



(d) Longitude

Fig. 15: Latitude e Longitude, FONTE: BRASIL ESCOLA

Ao analisar dois pontos **relativamente próximos**, o conceito de distância pode ser aplicado usando alguns recursos de aproximações e o uso de preceitos da geometria euclidiana.
Em virtude dos fatos mencionados, deve-se considerar um fator que terá a função de converter as informações de latitude e longitude, que são originalmente expressas em graus, para uma aproximação em quilômetros. Segundo os dados da Organização da Aviação Civil Internacional, sabemos que o raio da Terra é de $6.366,70$ quilômetros e considerando a aproximação de $\pi \approx 3,14$. Criamos o fator de conversão aproximado de $1^{\circ} \approx 111,1$ quilômetros
Tendo em vista o fator definido, é possível relacionar os dados obtidos com um triângulo retângulo, em que seus catetos são as representações das diferenças de latitude e longitude e a hipotenusa a distância que queremos de fato encontrar. A figura 16 ilustra essa situação.

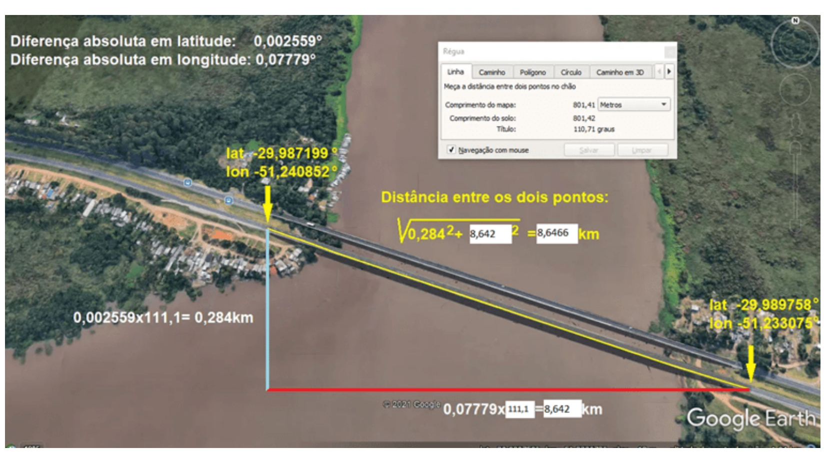


Fig. 16: Distância entre dois pontos. FONTE: CREF

Vale ressaltar que todos os dados obtidos são apenas aproximações para coordenadas relativamente próximas. Para analisar pontos com distâncias maiores, podemos utilizar outras formas epistemológicas e metodológicas como medida de Arcos de Circunferência. Além disso, pode-se citar também a possibilidade do uso de Coordenadas Esféricas, ou dos conceitos da Geodésia, que é o campo de estudo sobre as dimensões e formas da Terra.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado no trabalho desenvolvido, o uso do software Google Maps como principal recurso de aprendizagem, apresenta diversos pontos positivos como a sua gratuidade e acesso facilitado, diversos recursos geográficos como rotas, apresentação de imagens, formação de mapas e coordenadas geográficas.
Levando em consideração o objetivo do trabalho, foi desenvolvido um método de conversão de dados para analisar distâncias mais próximas com o uso de conceitos da Geometria Euclidiana, de forma que os participantes possam compreender de maneira prática como a matemática está inserida em seu contexto. Entretanto, durante seu desenvolvimento, foi possível perceber que o trabalho apresenta capacidade de aprofundar temas mais refinados, podendo contemplar não apenas princípios da educação básica, mas também permite adaptações para o ensino superior, abordando conceitos de Coordenadas Esféricas, Geodesia e Geometria Esférica.

BIBLIOGRAFIA

[1] BANKER, Mucio Piragibe Ribeiro de. **Cartografia: noções básicas.** Rio de Janeiro: DHN, 1965.

[2] SILVA, Welder Dan, **Uma introdução à Geometria Esférica - TCC**, UNESP 2015.

[3] INFOESCOLA, 2019. Disponível em: <https://www.infoescola.com/geografia/latitude-e-longitude/>. Acesso em 31/03/2024

[4] CREF, Centro de Referência para o Estudo de Física, UFRGS, Disponível em <https://cref.if.ufrgs.br/>. Acesso em 31/03/2024

Board games: estratégias de ensino para uma mudança atitudinal nas aulas de Matemática

Biazoli, Paulo[59] e Silva, Edgard[60]

Resumo: *O intuito da pesquisa é revelar os resultados de um projeto educacional que procura vincular processos educativos, em que haja a construção por parte dos alunos de conteúdos atitudinais, num contexto de imersão em oficinas de jogos de tabuleiro modernos - board games – com a prerrogativa de se investir em mecânicas colaborativas entre os indivíduos participantes (alunos) seja a principal propulsora das habilidades a serem desenvolvidas. Os board games podem ser utilizados nas aulas de Matemática a fim de melhorar os efeitos de variáveis cognitivas, emocionais e atitudinais, inseridos no processo de aprendizagem da Matemática em contextos formativos, de alunos dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio, capitaneados pelos professores em formação do curso de licenciatura em Matemática da faculdade SESI-SP de Educação. O desenvolvimento da pesquisa consiste na imersão dos participantes em sessões de jogos, acomodados em grupos, para a realização de oficinas organizadas em estações com rotatividade. Os board games oferecem muito mais do que apenas diversão. Seus setups (configurações), ou melhor, sua coleção de componentes e a arquitetura inicial de arranque dos jogos (organização / preparação / configuração) é composta por uma imensa variedade de itens, como cartas, dados, peças e tabuleiros – coletivos, individuais e mistos. Estes tipos de jogos estão ganhando muita visibilidade em contextos sociais alheios às salas de aula – corporativos e familiares, por exemplo - e podem, no cotidiano escolar, potencializar a relação com as propostas de aprendizagens em termos metodológicos e, assim, com a própria aprendizagem dos objetos matemáticos.*

Palavras-chave: *Board games, formação de professores, conteúdos atitudinais, Matemática*

INTRODUÇÃO

A relevância de se pensar conteúdos atitudinais no processo de formação de alunos, ganhou destaque na década de 1990 com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – os PCN's – que surgiram com diversos propósitos, dentre eles o de contribuir para que os alunos enfrentassem o mundo atual como cidadãos participativos, reflexivos, autônomos, colaborativos e que (re)conhecessem seus direitos e deveres. Em diversas partes do PCN+ (BRASIL, 2006) podemos observar referências à palavra atitude em muitos contextos: "... adquirir uma atitude de

[59]Faculdade Sesi de Educação - SP,paulo.biazoli@sesisp.org.br

[60]Faculdade Sesi de Educação - SP, edgard.silva@sesisp.org.br

permanente aprendizado ...”; “... uma nova atitude da escola e do professor.”; “... mudanças de atitude na organização de novas práticas.”; “... é importante uma atitude coletiva dos professores e da comunidade ...”; “... formação de hábitos e atitudes para a aquisição de princípios.”; “... conhecimentos, atitudes e valores que a escola deveria ter por meta promover no ensino ...”; “... desenvolvimento das habilidades, competências, conhecimentos, atitudes e valores desejados.”; “... novas atitudes relativamente ao processo de ensino e aprendizagem ...”.

Esses comportamentos atitudinais que pretendemos de nossos alunos podem influenciar, mobilizar e proporcionar aprendizagens mais significativas, afinal, “... o comportamento é o elo entre a realidade, que informa, e a ação, que a modifica. A ação gera conhecimento, que é a capacidade de explicar, de lidar, de manejar, de entender a realidade Matemática” (D’AMBROSIO, 2012).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (1999): À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescente e globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.(1, p.251).

Neste aspecto, entendemos que a utilização dos board games em sala de aula, pode trazer uma mudança atitudinal nos professores (no sentido de uma nova perspectiva do ensino dos conteúdos de Matemática) e dos alunos (no que tange ao prazer de conhecer novas possibilidades de aprendizagens e, assim, se motivarem em adquirir novos conhecimentos).

An algorithm for solving the problem $\max\{cx : x^t Q_n(a)x \leq 1, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$

Madriz, E.[61]; Sicre, M.[62], Barreto, M. V.[63],
Maculan, N.[64]

Abstract: *In this paper, we present an algorithm to solve the integer nonlinear program of maximizing a linear functional over the set of non-negative integer points, which means vectors with non-negative integers coordinates, located inside an ellipsoid of in a n-dimensional real space. To this purpose, we used the fact that every ellipsoid contains an integral polytope, which means a polytope whose vertices are all integer points, with the property that in the region between the polytope and the ellipsoid there are no integer points. The algorithm builds on these facts and solves the problem by generating the set of vertices of the aforementioned integral polytope.*

Keywords: *Integral polytope, ellipsoid , non linear problem.*

INTRODUCTION

In this work we use the following notations: given any $n \in \mathbb{N}$, $\hat{0} \in \mathbb{R}^n$ and $\hat{1} \in \mathbb{R}^n$ denote the vectors with all components equal to 0 and 1, respectively; $\mathbb{R}^n_{++}$ denotes the vectors of $\mathbb{R}^n$ with positive components; $\{e_i\}_{j=1}^n$ denotes the canonical base of $\mathbb{R}^n$. In addition, for $a \in \mathbb{R}^n_{++}$, we denote by $Q_n(a)$ the matrix defined by $Q_n(a)_{i,i} = \frac{1}{a_i^2}$ and $Q_n(a)_{i,j} = 0$ if $i \neq j$, for all $i, j \in \{1, \dots, n\}$, and $E(Q_n(a)) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^t Q_n(a)x \leq 1\}$. Also, for $r \in \mathbb{R}$, $\lfloor r \rfloor$ denotes the integer part of r.

Let $a \in \mathbb{R}^n_{++}$, and $c \in \mathbb{R}^n_{++}$ be given, we consider the problem $IOE(Q_n(a))$:

$$\max\{cx : x^t Q_n(a)x \leq 1, x \in \mathbb{Z}^n_+.\}$$

[61]CETEC-UFRB, Cruz das Almas, BA
[62]IME-UFBA, Salvador, BA
[63]CETEC-UFRB, Cruz das Almas, BA
[64]COPPE-UFRJ, Rio de Janiero, RJ

The Algorithm $AIOE(Q_n(a))$

For any $m \in \mathbb{N}$ with $m \geq 2$, and given $\bar{a} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \in \mathbb{R}^m_{++}$, we will consider the following functions $f_{\bar{a}} : E(Q_{m-1}((\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}))) \to \mathbb{R}$ and $g_{\bar{a}} : E(Q_m(\bar{a})) \to \mathbb{R}$,

$$f_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_{m-1}) = \left\lfloor \bar{a}_m \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{x_i^2}{\bar{a}_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\rfloor \tag{5}$$

$$g_{\bar{a}}(x_1, \ldots, x_m) = \left\lfloor \bar{a}_m \left(1 - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{x_i^2}{\bar{a}_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} - x_m \right\rfloor. \tag{6}$$

Note that, for a given $x \in E(Q_{m-1}((\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}))$, $f_{\bar{a}}(x)$ gives the largest integer such that $(x, f_{\bar{a}}(x)) \in E(Q_m(\bar{a}))$; and, for a given $x \in E(Q_m(\bar{a}))$, $g_{\bar{a}}(x)$ gives the largest integer such that $x + g_{\bar{a}}(x)e_m \in E(Q_m(\bar{a}))$.

Next we present the algorithm.

Algorithm 1 $AIOE(Q_n(a))$

Data: $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n_{++}$
Result: p^* the optimal solution of the $IOE(Q_n(a))$ problem
Initialize: $p^* = \hat{0} \in \mathbb{R}^n$
if $n = 2$ **then**
  $w^0 = (\lfloor a_1 \rfloor + 1, 0)$
  for $k = 1$ to $(\lfloor a_1 \rfloor + 1)$ **do**
    $w^k = w^{k-1} - e_1 + g_a(w^{k-1} - e_1)e_2$
    $p^* = argmax\{cw^*, cw^k\}$
  end for
else
  for $i_1 = 0$ to $\lfloor a_1 \rfloor$ **do**
    for $i_2 = 0$ to $f_{(a_1,a_2)}(i_1)$ **do**
      $\vdots$
      for $i_{n-3} = 0$ to $f_{(a_1,\ldots,a_{n-3})}(i_1, \ldots, i_{n-4})$ **do**
        for $i_{n-2} = 0$ to $f_{(a_1,\ldots,a_{n-2})}(i_1, i_2, \ldots, i_{n-3})$ **do**
          $s = f_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}(i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}) + 1$
          $w^0 = (i_1, \ldots, i_{n-2}, s, 0)$
          for $k = 1$ to s **do**
            $w^k = w^{k-1} - e_{n-1} + g_a(w^{k-1} - e_{n-1})e_n$
            $p^* = argmax\{cw^*, cw^k\}$
          end for
        end for
      end for
      $\vdots$
    end for
  end for
end if

Theorem 4.1 *The algorithm $AIOE(Q_n(a))$ finds an optimal solution of the $IOE(Q_n(a))$ problem*

Proof. First, we will consider the case when $n = 2$. For $a \in \mathbb{R}^2_{++}$, let $w = (w_1, w_2) \in E(Q_2(a)) \cap \mathbb{Z}^2_+$ be an optimal solution of the $IOE(Q_2(a))$ problem. Notice that it holds $w_1 \leq \lfloor a_1 \rfloor + 1$. Hence, for some $k \in \mathbb{N}$ with $k \leq \lfloor a_1 \rfloor + 1$, it holds $w_1^k = w_1$. Since w is optimal for the $IOE(Q_2(a))$ problem and we have that $c \in \mathbb{R}^2_{++}$, it follows that $w_2 \geq w_2^k$. On the other hand, from the definition of the function g_a in (6) with $\bar{a} = a$, it follows that $w_2 \leq w_2^k$. Hence, we conclude that $w^k = w$ and the claim holds. Next, we will prove the general case. For $a \in \mathbb{R}^n_{++}$, let $w = (w_1, \ldots, w_n)$ be an optimal solution of the $IOE(Q_n(a))$ problem. Clearly, from the definition of the functions $f_{\bar{a}}$ in (5) with $\bar{a} = \bar{a}^k$ as in the algorithm, and the fact that $w \in E(Q_n(a)) \cap \mathbb{Z}^n_+$, it follows that $w_1 \leq \lfloor a_1 \rfloor$ and $w_k \leq f_{(a_1,\ldots,a_k)}(w_1, \ldots, w_{k-1})$ for $k = 1, \ldots, n-2$. These relations imply that, for $k = 1, \ldots, n-2$, the index i_k will take eventually the value w_k. Next, we will analyze the iterations of the most inner cycle of the algorithm when $i_k = w_k$ for $k = 1, \ldots, n-2$. First, notice that only the last two components of the vectors w^k change along these iterations. In addition, simple calculations show that in these two components we have iterations of the algorithm $AIOE(Q_n(a))$ in the particular case when $n = 2$, applied to the resolution of the problem $\max\{(c_{n-1}, c_{n-2})x : x \in E(Q_n(\bar{a})) \cap \mathbb{Z}^2_+\}$, with $\bar{a} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-2} \left(i_k^{.2}/a_k^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} (a_{n-1}, a_n)$. Now, it follows from the first part of the proof that these iterations will result in the computation of the solutions of this related problem. In particular, we will obtain the pair (w_{n-1}, w_n), which is optimal since it completes the optimal solution w. In summary, the algorithm will find the optimal solution w at the end of the most inner cycle considered above. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] MADRIZ E.; SICRE, M.; ROCHA, C, MACULAN, N.:A pseudopolynomial algorithm for solving the problem $\max\{cx : ||x|| \leq r, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$, submitted (2024)

[2] WITZGALL, C.: An all-integer programming algorithm with parabolic constraints. Soc. Ind. and Appli. Math. 11, 855–870 (1963)

Campeonato de xadrez, dama e cubo de Rubik

A relação desses jogos com a matemática

Martins, Emanuelly[65]; Costa, João Flávio Gomes Duarte da[66]

Resumo: *O presente artigo constitui um relato de experiência acerca do Campeonato de Xadrez, Dama e Cubo de Rubik desenvolvido no meio acadêmico do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia (CCET/UFMA). Este campeonato foi denominado pelos alunos de Matemática – Licenciatura como Game Math e tem como objetivo explorar as conexões desses jogos com a Matemática, como também apresentar curiosidades sobre esses jogos, desenvolver oficinas relacionadas e outras ações. O objetivo deste trabalho é demonstrar como tais jogos podem se tornar eficazes ferramentas no processo de ensino e aprendizagem.*

Palavras-chave: *Cubo de rubik, damas, matemática, xadrez.*

INTRODUÇÃO

GAME MATH – Campeonato de Xadrez, Dama e Cubo Rubik, é um evento acadêmico científico-cultural e artístico, que tem como objetivo apresentar a Matemática presente nos jogos de Xadrez, Dama e Cubo Rubik. Vale destacar que estes jogos têm uma estreita relação com a Matemática e, a prática deles no meio acadêmico, além de proporcionar diversão também permite desenvolver o raciocínio lógico; aperfeiçoar habilidades de tomada de decisões; otimizar a melhoria da memória; melhorar a capacidade de resolver problemas; melhorar o desempenho nos estudos, principalmente no que diz respeito à Matemática.

O evento ocorre no final do segundo semestre, no hall do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET/UFMA. Até o momento, já foram realizadas edições em 2022 e 2023, consistindo em dois dias consecutivos repletos de atividades. Entre as atividades oferecidas, destacam-se as oficinas de Xadrez, Dama e Cubo Rubik, ministradas pelos monitores (alunos da disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática) aos visitantes do evento, que podem incluir alunos, professores e técnicos administrativos. Além das oficinas, são realizadas exposições em estandes previamente organizados, onde uma variedade de jogos de Xadrez, Dama e Cubo Rubik, em diversos modelos, são exibidos. Em cada visita, são destacadas as relações matemáticas presentes nestes jogos e alguns dos conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados a partir dos jogos como Aritmética; Geometria (coordenadas, simetria); Álgebra (relação de igualdade,linguagem algébrica); Análise Combinatória e Probabilidade; Lógica; entre outros. Este artigo tem como objetivo apresentar brevemente essas relações.

[65]Graduanda em licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Maranhão
[66]Graduando em licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Maranhão

Xadrez

O jogo de xadrez tradicional é um jogo de tabuleiro com 64 casas, jogado por duas pessoas, contendo 32 peças, sendo 16 para cada jogador. A divisão de peças, para cada jogador, é feita da seguinte forma: oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma dama. SILVA. (2021).

O objetivo do jogo é capturar o rei adversário, essa jogada se chama xeque-mate.

Um dos problemas matemáticos apresentadas na oficina a respeito do Xadrez foi: Qual a probabilidade de um jogador abrir uma partida de xadrez movimentando o cavalo?
Este é um problema de análise combinatória e probabilidade e pode ser solucionado da seguinte maneira:

Sabendo que as peças brancas abrem o jogo, e o jogador pode sair usando um dos 8 peões ou um dos 2 cavalos, tendo assim 10 peças ao todo como opções de saída. Logo:

P$(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$, onde:

$P(A)$ **:** a probabilidade de um jogador abrir uma partida de xadrez movimentando o cavalo
$n(A)$ **:** o número de elementos do conjunto A
$n(\Omega)$ **:** o espaço amostral

Então $n(A) = 2$ e $n(\Omega) = 10$, portanto:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 20\%$$

Dama

O Jogo de Damas, assim como o Xadrez, é um jogo de estratégia disputado entre dois jogadores, uma das principais diferenças reside na estrutura do tabuleiro que pode ser composto por 64 casas e 24 peças ou por um tabuleiro de 100 casas e 40 peças. O objetivo do jogo é capturar todas as peças do adversário, ou imobilizá-las.

Nota-se no estudo de sua complexidade diversos outros exercícios de ordem cognitiva, principalmente no que diz respeito à estratégia, concentração e raciocínio lógico. FROELICH. (2009). Vejamos uma questão que relaciona fração ao jogo de dama:

Durante uma partida de dama, em um tabuleiro de 64 casas, foi observado que restam 7 peças brancas e 8 peças pretas. Indique quantas casas do tabuleiro as peças brancas ocupam. Expresse a fração que representa as peças brancas do tabuleiro. Faça o mesmo com as pretas.

A resposta pode ser dada da seguinte forma:
As peças brancas ocupam 7 casas. A fração que corresponde a isso é $\frac{7}{64}$
As peças pretas ocupam 8 casas. A fração que corresponde a isso é $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

Cubo de Rubik

O cubo de Rubik ou, como é conhecido, cubo mágico é um jogo de quebra-cabeça tridimensional que possui diferentes modelos e níveis de dificuldades. Ele tem por objetivo estimular o raciocínio lógico e ajudar no processo da criatividade com o planejamento de estratégias para conseguir alinhar as cores rapidamente, além também do estímulo da concentração e interpretação dos alunos.

Dessa forma, o Cubo Mágico apresenta-se como uma importante ferramenta pedagógica, auxiliando o ensino de diversos conteúdos matemáticos. No Ensino Básico, por exemplo, é possível trabalhar noções de funções, volume, simetria, permutação, além dos conceitos de aresta, vértices e lados. No Ensino Superior, pode ser utilizado em aulas de Álgebra Abstrata, por exemplo. RONCOLLI. (2016).

Sendo um cubo de Rubik de tamanho 3x3 e outro maior de tamanho 4x4. Qual a quantidade de cubinhos que compõem cada cubo?

Resposta: Podemos observar ao manipular o cubo de Rubik que ele possui 3 dimensões: base, altura e profundidade. Assim, a quantidade de cubinhos que ele é formado viria da multiplicação dessas 3 dimensões, a partir da relação com o volume de um cubo:
$base$ × altura × profundidade

Para o cubo de tamanho $3x3$: $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

Para o cubo de tamanho $4x4$: $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

Logo, serão necessários 27 e 64 cubinhos, respectivamente, para compor esses cubos.

Da mesma forma, para um cubo grande de qualquer tamanho, podemos calcular o número total de cubinhos multiplicando suas dimensões.

CONCLUSÕES

Em suma, o GAME MATH - Campeonato de Xadrez, Dama e Cubo Rubik oferece uma oportunidade única para explorar a interseção entre jogos e Matemática. Destacamos como os jogos de Xadrez, Dama e Cubo Rubik são ferramentas educacionais valiosas, envolvendo conceitos matemáticos diversos e promovendo habilidades cognitivas e lógicas. Em essência, o evento GAME MATH celebra a diversão e o desafio dos jogos, enquanto enfatiza a importância da Matemática como parte fundamental dessas experiências, proporcionando uma jornada científica-cultural, prazerosa e educativa.

BIBLIOGRAFIA

[1] FROELICH, Henrique Daniel. **JOGO DE DAMAS**: UMA POSSIBILIDADE PARA ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA. 2009. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd _egem/fscommand/RE/RE _36.pdf>

[2] RONCOLLI, Gislaine. Cubo mágico: uma ferramenta pedagógica para as aulas de matemática. 2016. Disponível em:<http://dspace.nead.ufsj.edu.br/trabalhospublicos/bitstream/handle/123456789/74/ GISLAINE %20APARECIDA%20RONCOLLI _12217 _assignsubmission _file _UFSJ%20-%20TCC.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 15 dez. 2022

[3] SILVA, Geni Ester Boschetti da O jogo de xadrez: possibilidades pedagógicas para práticas interdisciplinares / Geni Ester Boschetti da Silva, Anderson Martins Corrêa – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Newton, Leibniz e o maior embate matemático de todos os tempos

Silva, Erick Felipe Maia[67], Almeida, Arthur da Costa[68]

Resumo: *O século XVII foi um período de grande avanço na Matemática, destacando-se o desenvolvimento do Cálculo diferencial e integral, conhecido também como Cálculo infinitesimal. Esta disciplina revolucionou áreas como física, engenharia e economia, permitindo modelar e resolver problemas complexos relacionados a mudanças e movimentos. Este trabalho propõe uma abordagem inovadora ao Cálculo, integrando-o à sua rica história. Ao contextualizar sua evolução ao longo dos séculos, destaca-se a contribuição de grandes matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Ambos são considerados co-inventores independentes do Cálculo, cada um com sua abordagem e notações. Newton desenvolveu seu método de "fluxos e fluentes", enquanto Leibniz introduziu suas próprias notações e conceitos, como as diferenciais dy/dx e as regras de cálculo que ainda são utilizadas hoje. A disputa entre Newton e Leibniz por reconhecimento e autoria do Cálculo resultou em acusações de plágio e uma intensa rivalidade conhecida como as "guerras do Cálculo". Apesar das disputas, ambos impulsionaram a Matemática para frente, deixando um legado valioso. Conclui-se que o estudo do Cálculo com um enfoque histórico proporciona aos alunos uma compreensão mais profunda e significativa. Esta abordagem desperta o interesse e a curiosidade, permitindo que os alunos se conectem com a história da ciência e vejam o Cálculo não apenas como um conjunto de regras, mas como uma jornada empolgante de descobertas e evoluções.*

Palavras-chave: *História da atemática, cálculo, Newton, Leibniz.*

INTRODUÇÃO

O século XVII foi marcado por um florescimento extraordinário na Matemática, testemunhando tanto o surgimento de novas áreas de estudo quanto a consolidação de outras já existentes. Contudo, dentre todas as realizações desse período, destaca-se o desenvolvimento do Cálculo diferencial e integral, também conhecido como Cálculo infinitesimal (Boyer, 2010).

Essa disciplina revolucionou não apenas a Matemática, mas também suas aplicações em áreas tão diversas como física, engenharia e economia. A capacidade do Cálculo em lidar com problemas envolvendo mudança e movimento conferiu-lhe um papel fundamental na modelagem, análise e resolução de desafios complexos, desde calcular a velocidade de um objeto em queda livre até determinar a área sob uma curva (Boyer, 2010).

[67]Universidade Federal do Pará rfelipeerick842@gmail.com
[68]Universidade Federal do Pará arthur@ufpa.br

Apesar de sua familiaridade no currículo educacional, propomos uma abordagem inovadora neste trabalho: integrar o Cálculo à sua rica história. Tal perspectiva visa facilitar o aprendizado e despertar o interesse dos alunos por essa disciplina fundamental da Matemática. Ao contextualizar o desenvolvimento do Cálculo ao longo dos séculos, os educadores podem destacar os desafios e as realizações de grandes matemáticos como Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Essa jornada histórica revela a natureza gradual do conhecimento e as diversas perspectivas que moldaram as ferramentas matemáticas que utilizamos hoje. Ao invés de apresentar o Cálculo como um conjunto abstrato de regras e fórmulas, essa abordagem histórica permite que os alunos compreendam a Matemática como uma atividade humana em constante evolução. Essa compreensão, por sua vez, os motiva a se envolverem ativamente no processo de aprendizado, buscando compreender as motivações por trás dos conceitos e explorando diferentes métodos de resolução de problemas.

No início do século XVIII, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Sir Isaac Newton (1642-1726) estavam à beira de um conflito intelectual. Por mais de uma década, até o fim de suas vidas, essas figuras proeminentes da Matemática alemã e britânica estiveram envolvidas em uma acirrada disputa pública. Nessa batalha, cada um buscava reivindicar a autoria do Cálculo, um ramo da análise Matemática usado para investigar desde formas geométricas até órbitas planetárias em torno do Sol (Bardi, 2008).

O Cálculo, um dos legados intelectuais mais importantes do século XVII, foi inicialmente desenvolvido por Newton durante seus anos de estudo na Universidade de Cambridge, entre 1665 e 1666. Enquanto estava isolado em sua propriedade rural, Newton realizou experimentos e contemplou as leis que regem o universo, resultando em uma enorme contribuição para a ciência, que incluiu descobertas em ótica, mecânica de fluidos, física das marés e gravitação universal. Além disso, Newton inventou o Cálculo, referido como seu método de "fluxos e fluentes"' , embora tenha mantido seus trabalhos em segredo por décadas (Boyer, 2010).

Newton descreveu em seu método que uma curva surgia a partir do deslocamento contínuo de um ponto no tempo. Ele denominava uma quantidade que varia como fluente, representado por y, e sua taxa de variação como *fluxão do fluente,* simbolizada por $\dot{y}$ ou ainda, *velocidade*, inspirado em conceitos da mecânica.

De maneira similar, as notações x e $\dot{x}$, z e $\dot{z}$ eram utilizadas. Newton não detalhou claramente a origem da fluxão do fluente (velocidade), tratando-a como um conceito intuitivo já aceito. No seu método, Newton estabelece uma relação entre os fluentes para derivar uma relação entre as fluxões dessas quantidades. Para isso, ele introduz o conceito de *momento de um fluente*, que é o acréscimo infinitesimal de um fluente x em um intervalo de tempo extremamente pequeno, representado por o. É crucial distinguir o do número 0 (zero). Newton sugere que o momento do fluente x seja o $\dot{x}o$, o produto da fluxão do fluente x pelo incremento infinitamente pequeno o. Essa abordagem é bastante restritiva e hoje é vista como incongruente com a compreensão atual de derivadas e velocidades (Silva, 2015). Dessa forma, Newton trabalhava com as seguintes quantidades:

$x =$ fluente;

$\dot{x} =$ fluxão do fluente (velocidade);

$o =$ incremento infinitesimal do tempo;

$\dot{x}o =$ momento (incremento infinitesimal) do fluente;

Leibniz, por sua vez, explorou o Cálculo cerca de dez anos depois, durante sua estada em Paris por volta de 1675. Ao longo da década seguinte, refinou suas descobertas e criou um sistema original de símbolos e representações gráficas. Embora tenha sido o segundo a abordar o assunto, Leibniz foi o primeiro a publicar seu sistema de Cálculo em dois trabalhos datados de 1684 e 1686, estabelecendo sua reivindicação à autoria intelectual do desenvolvimento do Cálculo.

Uma derivada é concebida como o limite do quociente entre a variação da quantidade e a variação temporal à medida que essa última se aproxima de zero. Assim, assumir que a variação da quantidade é igual ao produto da derivada pelo incremento temporal gera ambiguidades que só o conceito de limite consegue esclarecer. Leibniz via a diferencial como a variação entre dois valores muito próximos de uma variável. Ele introduziu as notações dy e dx para representar as diferenciais de y e x, respectivamente.

Leibniz considerava essas diferenças como infinitamente pequenas e comparáveis entre si, permitindo ignorar termos de ordens superiores. Ele afirmava que a razão $dy : dx$ era finita, indicando que eram infinitésimos do mesmo grau e poderiam ser negligenciados em relação a grandezas não infinitesimais, como $x + dx = x$. Hoje, entenderíamos melhor isso com o conceito de limite.

Leibniz buscava determinar a inclinação da reta tangente a uma curva no ponto (x, y) considerando variações até um segundo ponto $(x + dx, y + dy)$. Ele reconhecia que dy e dx poderiam ter magnitudes diferentes dependendo do ponto escolhido. O quociente $\frac{dy}{dx}$ representaria a inclinação da tangente à curva. Sem o conceito de limite, como tornar essas diferenciais efetivamente infinitesimais? Leibniz optou por desconsiderar diferenciais de ordens superiores, o que se tornou a base para suas regras de cálculo ainda usadas hoje, como:

$da = 0$ se a é constante

$d(u + v) = du + dv$

$d(uv) = udv + vdu$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

$d(u^n) = nu^{n-1}du$ (válido para n racional ou negativo)

Essas regras surgem da eliminação de diferenciais de ordens superiores. Por exemplo, para o produto, ele manipulava as expressões até obter resultados úteis. Leibniz operava de forma intuitiva, sem uma definição precisa de quantidades infinitesimais (Silva, 2015).

Ambos Leibniz e Newton são hoje reconhecidos como co-inventores independentes do Cálculo, sendo creditados por impulsionar a Matemática para frente. No entanto, no final do século XVII, disputas acaloradas surgiram entre seus seguidores, com acusações de plágio sendo lançadas de ambos os lados. As décadas seguintes testemunharam o auge das “guerras do Cálculo", com Newton e Leibniz atacando-se mutuamente, tanto publicamente quanto anonimamente, utilizando suas reputações e influências para obter vantagem.

Embora a disputa tenha perdurado até a morte de Leibniz em 1716, Newton continuou a publicar defesas de suas reivindicações mesmo após esse evento. Se eles tivessem se conhecido sob circunstâncias diferentes, talvez pudessem ter sido amigos, dado seu interesse comum em questões filosóficas e matemáticas. No entanto, suas escassas interações ao longo da vida resultaram em uma animosidade profunda durante as “guerras do Cálculo".

Apesar de serem consideradas por muitos como uma perda de tempo e uma representação desfavorável de ambos os gênios, as “guerras do Cálculo"são fascinantes por representarem o maior debate sobre propriedade intelectual de todos os tempos, revelando a complexidade e humanidade de Newton e Leibniz, esses gigantes da Matemática, em uma narrativa que transcende o mero embate acadêmico.

CONCLUSÕES

A experiência em sala de aula demonstra que a introdução de uma teoria através da sua história é uma ferramenta poderosa para despertar o interesse e a compreensão dos alunos. Essa perspectiva se torna ainda mais relevante quando se trata de áreas abstratas como o Cálculo, presente nas graduações em ciências exatas.

Ao iniciar o estudo do Cálculo com um enfoque histórico, proporcionamos aos alunos uma experiência que vai além da mera assimilação de técnicas e fórmulas. Eles embarcam em uma jornada que revela a evolução do conhecimento matemático ao longo do tempo, desvendando os desafios, conquistas e a relevância dos indivíduos e contextos que moldaram a ciência em diferentes épocas.

Ao conhecer como os grandes pensadores da Matemática elaboraram suas teorias e os contextos em que viveram, os alunos se aproximam desses personagens históricos, reconhecendo a dimensão humana da ciência. Essa experiência permite abordar o conteúdo de forma mais motivadora, empática e cativante, abrindo espaço para a imaginação e a reconstrução de pensamentos, sentimentos e cenários. Acreditamos que essa abordagem, fundamentada em estudos e experiências práticas, justifica a ideia de que a contextualização histórica da ciência, com seus protagonistas e contextos sociais, torna o estudo de disciplinas como o Cálculo mais agradável, significativo e mais facilmente assimilável para os alunos.

Ao invés de apresentar o Cálculo como um conjunto de regras e fórmulas abstratas, essa perspectiva transforma o aprendizado em uma jornada empolgante, onde os alunos se conectam com a história da ciência e se reconhecem como parte de uma grande narrativa intelectual.

Ao despertar a curiosidade e a fascinação pelo conhecimento matemático, abrimos portas para um futuro promissor, onde os alunos se tornam agentes ativos na construção do conhecimento científico.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bardi, J.S. ;**A guerra do cálculo**. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[2] Boyer, C.; **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] Silva, W. M. ; **A descoberta do cálculo sob as perspectivas de Newton e Leibniz**. Monografia (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG. Belo Horizonte, p.33, 2015.

Análise geométrica de sistemas bidimensionais de equações diferenciais

BARBOSA, Érik[69]; FERREIRA, Fabiana[70] e LAVAGNOLI, Gabriel[71]

Resumo: *No presente trabalho são apresentadas análises dos aspectos geométricos de sistemas bidimensionais de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e algumas construções utilizando o Software GeoGebra, a fim de auxiliar na visualização das soluções e de suas propriedades qualitativas. Além disso, é apresentado um problema de competição entre espécies cuja dinâmica é analisada por meio de uma construção realizada no Software GeoGebra.*

Palavras-chave: *Sistemas dinâmicos, análise qualitativa, software GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

A teoria de Sistemas dinâmicos remonta aos trabalhos de J.H. Poincaré (1854-1912) a respeito das equações diferenciais ordinárias. Até o final do século XIX, buscavam-se fórmulas que retratassem com precisão as soluções das equações, porém, Poincaré percebeu que o estudo qualitativo das soluções podia ser investigado, e assim iniciou-se a busca por abordagens qualitativas para as equações diferenciais.
Buscar soluções explícitas para determinados tipos de equações diferenciais pode ser um papel complicado, e é frequentemente impossível no caso de equações diferenciais não-lineares, porém, por meio de métodos qualitativos é possível analisar o comportamento das soluções dessas equações. Sendo assim, neste trabalho busca-se apresentar os aspectos qualitativos dos Sistemas Bidimensionais de Equações Diferenciais Ordinárias, como por exemplo: diagrama de fase, pontos de equilíbrio ou singularidades, e linearização no caso de sistemas não-lineares. Para melhor desenvolvimento e compreensão, busca-se utilizar recursos computacionais para auxiliar na visualização de tais aspectos.

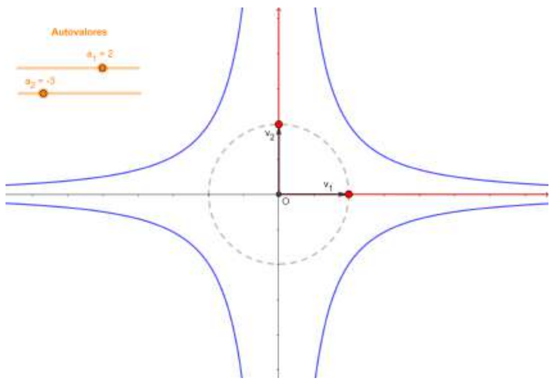
Sistemas Lineares Bidimensionais

A teoria apresentada sobre os sistemas lineares bidimensionais foi baseada nas referências [1] e [3].Pode-se analisar os sistemas lineares bidimensionais dividindo-os em três grupos: sistemas

[69]Universidade Federal do Espírito Santo
[70]Universidade Federal do Espírito Santo
[71]Universidade Federal do Espírito Santo

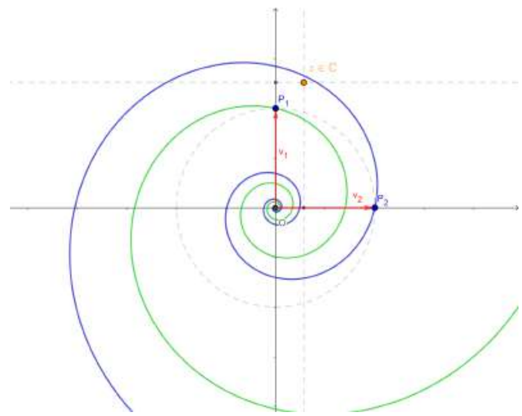
lineares com autovalores λ_1 e λ_2 complexos (α representando a parte real e β representando a parte imaginária), sistemas lineares diagonalizáveis com autovalores λ_1 e λ_2 reais e sistemas lineares não-diagonalizáveis com autovalores reais iguais . Neste trabalho, serão analisados os dois primeiros casos. Por meio do diagrama de fase, é possível analisar o conjunto de órbitas do sistema linear, e, consequentemente, classificar os pontos de equilíbrio, que são os pontos nos quais as derivadas das variáveis são zero. As Figuras 17 e 18 apresentam alguns exemplos de diagramas de fase.

Fig. 17: Diagrama de fase no caso de sistemas lineares diagonálizáveis com autovalores reais de sinais opostos.



Fonte: `https://www.geogebra.org/m/qr3aktex`

Fig. 18: Diagrama de fase de um sistema linear com autovalores complexos no caso em que $\alpha, \beta > 0$.



Fonte: `https://www.geogebra.org/m/j6u2nyy5`

Com o links disponibilizados acima é possível ter acesso às construções, alterar os autovalores e os autovetores em cada caso, e assim analisar o comportamento das soluções e o sentido de suas trajetórias.

Sistemas Bidimensionais Não-Lineares

A análise de sistemas bidimensionais não-lineares é dada por meio da linearização do sistema. Tal ferramenta possibilita analisar o comportamento das órbitas próximo a pontos de equilíbrio. Neste caso, o Teorema de Hartman-Grobman apresentado por [2] é muito importante, pois garante que o diagrama de fase de um sistema não-linear localmente em torno de um ponto de equilíbrio $X^* = (x^*, y^*)$ é equivalente ao diagrama de fase do sistema linearizado em X^*. Em notação vetorial, o sistema linearizado é dado por

$$X' = AX,$$

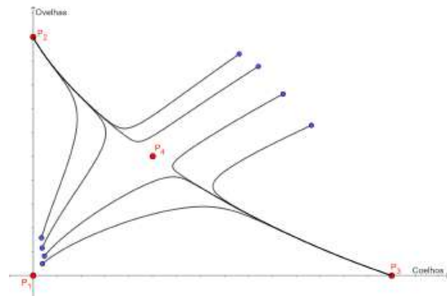
onde A é a matriz jacobiana do sistema calculada no ponto X^*. Segue abaixo um exemplo mencionado por [4] que faz o uso deste teorema.

Exemplo 4.1 *Suponha que uma população de coelhos e uma população de ovelhas estejam competindo pelo mesmo suprimento de alimentos e a quantidade disponível seja limitada. Serão ignoradas outras situações como predadores e outras fontes de alimentos. Segue abaixo o modelo que descreve esta situação.*

$$\begin{cases} x' = x(3 - x - 2y) \\ y' = y(2 - x - y) \end{cases} \tag{7}$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio deste sistema, resolvemos $x' = 0$ *e* $y' = 0$. *Com isso, quatro pontos fixos são obtidos:* $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$ *e* $(1,1)$. *Utilizando o Teorema de Hartman-Grobman e analisando cada ponto separadamente conseguimos deduzir o comportamento das soluções e assim construir o diagrama de fase. Veja a Figura 19.*

Fig. 19: diagrama de fase do sitema bidimensional não-linear 7



Fonte:`https://www.geogebra.org/m/nsvf7hgc`

Por meio do link disponibilizado acima é possível alterar as condições inicias (pontos azuis) e analisar o comportamento das soluções em relação aos pontos de equilíbrio P_1, P_2, P_3 *e* P_4. *Observe que o diagrama de fase mostra que uma espécie geralmente leva a outra à extinção.*

CONCLUSÕES

O estudo qualitativo dos sistemas de equações diferenciais interligado com recursos computacionais, proporciona um amplo conjunto de ferramentas eficientes para a compreensão, principalmente sobre sistemas bidimensionais não-lineares.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações diferenciais aplicadas.** Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[2] MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos.** 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

[3] ROSA, R. M. S. **Equações Diferenciais.** IM: UFRJ, 2017. Disponível em: <apostila-ed-maio2017.pdf(rmsrosa.github.io)> . Acesso em: 13 mar. 2024., 21:50.

[4] STROGATZ, S, H. **Nonlinear dynamics and chaos:** with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. CRC press, 2018.

LAMATEC:

Laboratório Virtual de Matemática, Ciência e Tecnologia

Spindola, Flausino[72]; Nascimento, Yago [73]; Ribeiro, Matheus[74];
Barros, Raimundo [75] Siqueira, Pedro [76];
Passinho, Guilherme[77] Cardoso, João [78];

Resumo: *Apresentamos o projeto do Laboratório Virtual de Ensino de Matemática (LAMATEC), do BICT - UFMA, cujo objetivo é realizar atividades didáticas em ambiente virtual e por meio de tecnologias, complementando as aulas teóricas dos cursos de Cálculo e Álgebra Linear. São realizados experimentos computacionais em rede, hipertextos, bem como oficinas de materiais didáticos, lives, aprendizagem por meio audiovisual e minicursos virtuais.*

Palavras-chave: *Ensino superior, tecnologias de informação e comunicação, cálculo, laboratório de matemática, extensão universitária.*

INTRODUÇÃO

O Laboratório Virtual de Matemática, Ciência e Tecnologia (LAMATEC), do BICT - UFMA, tem o propósito de realizar atividades didáticas de apoio às atividades curriculares das disciplinas de matemática do curso de Ciência e Tecnologia da UFMA, além de atividades de extensão.

Atualmente, é constituído por uma página oficial da Universidade, com textos, materiais didáticos instrucionais produzidos pelo pessoal do laboratório, e experimentos com softwares livre. Além disso, há uma página de YouTube, com vídeos, lives e minicursos. Alguns membros deste laboratório produzem vídeos em outras plataformas virtuais, como Instagram e TikTok, de modo a complementar o rol de atividades do laboratório.

Por meio do site oficial do LAMATEC , os estudantes passaram a efetuar a escrita de textos de divulgação científica, sob a orientação do professor, a fim de publicá-los em blog e treinar a habilidade de redação científica, conforme a Figura 20.

[72]Universidade Federal do Maranhão
[73]Universidade Federal do Maranhão
[74]Universidade Federal do Maranhão
[75]Universidade Federal do Maranhão
[76]Universidade Federal do Maranhão
[77]Universidade Federal do Maranhão
[78]Universidade Federal do Maranhão

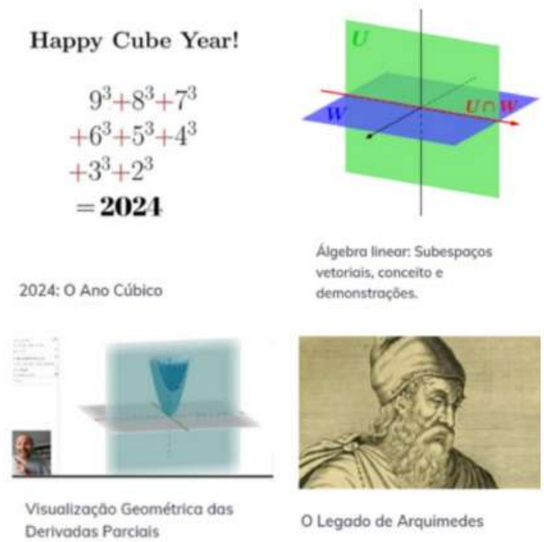


Fig. 20: Ilustração dos textos confeccionados pelos alunos no site do LAMATEC

A recepção dos calouros do curso de BICT do semestre 2024/1 motivou o LAMATEC a planejar e realizar um minicurso de Pré-Cálculo aos ingressantes do curso.

Durante este planejamento, foram pensadas estratégias para abordar matemática básica com ingressantes em cursos de ciências exatas. Assim, juntando a proposta de minicurso de Pré-Cálculo para ingressantes no BICT com os vídeos já realizados, foi realizada, sob supervisão do professor, uma oficina de confecção de materiais didáticos, que resultou em dois produtos: uma resolução comentada das questões do ENEM 2023 e um material de Pré-Cálculo.(Figura 21)

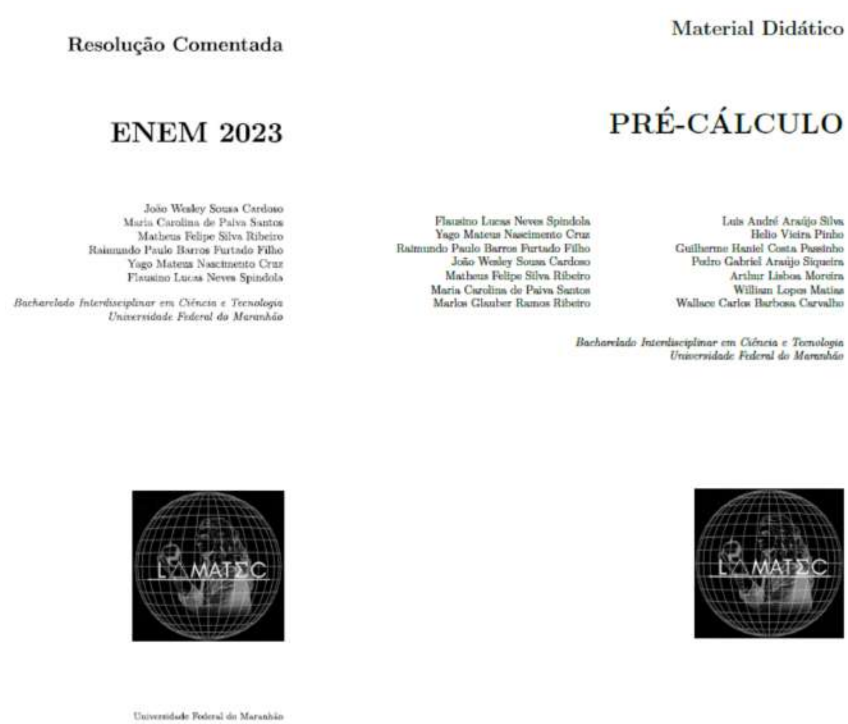


Fig. 21: Front dos materiais produzidos por integrantes do grupo. À esquerda, resolução comentada do ENEM 2023 e, à direita, material didático de Pré-Cálculo.

De posse do material didático confeccionado pelo grupo, foram realizadas aulas ao vivo pelo Youtube do LAMATEC , Figura 22. Com alta participação e interação, pretende-se apresentar, na bienal, resultados de pesquisas sobre o efeito deste minicurso no rendimento em cálculo dos alunos, dada a base de dados colhida durante o ingresso.

Fig. 22: Imagens do minicurso de Pré-Cálculo

CONCLUSÃO

Novas abordagens no ensino superior, principalmente no que tange às disciplinas de matemática, em que as taxas de reprovação e evasão de alunos são tão altas, são sempre bem vindas. Aqui, apresentamos uma estratégia que tenta utilizar dos meios digitais para levar o conteúdo matemático de forma dinâmica e interativa, complementando a aprendizagem formal da sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bonilla, Maria Helena S. Concepções do Uso do Computador na Educaç ao. Espaços da Escola, Ano 4, No. 18 (59-68). Ijuí: 1995.

[2] Guidorizzi, H. L., Um curso de Cálculo, V. 1, Livros Técnicos e Científicos Ed. Ltda, 5a edição (2001).

O problema de Sturm-Liouville

Introdução aos espaços de dimensão infinita

Prucoli, Gabriel[79]; Ferreira, Fabiana[80]

Resumo: *Neste trabalho apresentaremos o problema de Sturm-Liouville como uma generalização de um problema de autovalores conhecido em Álgebra Linear, mas agora em espaços vetoriais de dimensão infinita. Veremos que alguns resultados obtidos em dimensão finita podem ser generalizados para a infinita, e demonstraremos alguns teoremas importantes. Por fim, traremos a versão de um relevante resultado de Álgebra Linear em dimensão finita e que pode ser generalizado para espaços com dimensão infinita: o Teorema Espectral.*

Palavras-chave: *Sturm-Liouville, produto interno, autoadjunto, teorema espectral.*

INTRODUÇÃO

O problema a ser tratado é associado aos nomes dos matemáticos Jacques Charles François Sturm (1803 - 1855) e Joseph Liouville (1809 - 1882), e historicamente deu início a uma série de novas ideias que conduziram, no começo do século XX, ao surgimento de uma nova e importante área da Matemática, a Análise Funcional, uma generalização da Álgebra Linear para espaços vetoriais de dimensão infinita.

O problema de Sturm-Liouville é um problema de valores de contorno que surgiu a partir do método de separação de variáveis para a resolução de algumas classes de equações diferenciais parciais, como a equação da onda, da corda vibrante, do calor e de Laplace. Ele consiste em equações diferenciais ordinárias da forma

$$[p(t)y']' - q(t)y + \lambda r(t)y = 0, \quad p \in \mathcal{C}^1([a,b]), \quad q, r \in \mathcal{C}([a,b]), \tag{8}$$

com as condições de fronteira

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0; \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad \alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

A pergunta que fica é: para quais valores de λ a equação diferencial possui solução não-trivial? Conhecemos problemas semelhantes da teoria de Matrizes e Operadores Lineares, como por exemplo o sistema álgébrico $Ax = \lambda x$. Nesse caso, aos valores de λ chamamos de autovalores, e para cada autovalor, a equação matricial possui soluções não-triviais, às quais damos o nome de autovetores.

[79]Universidade Federal do Espírito Santo, gabriel.prucoli@edu.ufes.br
[80]Universidade Federal do Espírito Santo, fabiana.m.ferreira@ufes.br

O OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE

Definamos o operador diferencial linear $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ da seguinte forma:

$$L[y] = \frac{1}{r(t)}((p(t)y')' - q(t)y).$$

Assim, a equação (8) pode ser reescrita como $L[y] = -\lambda y$. Logo, um problema de Sturm-Liouville é um problema de autovalores que se traduz em determinar uma função $y = y(t)$ que seja solução da equação acima sujeita às condições de fronteira dadas. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um **autovalor** do Problema de Sturm-Liouville se a equação $L[y] = -\lambda y$ tem solução não-trivial que satisfaz às condições de fronteira. A solução $y = y(t)$ é chamada de **autofunção** associada ao autovalor λ.

Os problemas de Sturm-Liouville e a equação $Ax = \lambda x$, onde A é um operador linear autoadjunto, são semelhantes. Em dimensão finita, o Teorema Espectral garante que, dado um espaço vetorial V e um operador autoadjunto $A : V \to V$, existe uma base ortonormal de V formada apenas por autovetores de A, logo, podíamos escrever qualquer vetor do espaço como combinação linear dos autovetores do operador A. Todavia, o operador de Sturm-Liouville está definido em um espaço de dimensão infinita, o que motiva a generalização da Teoria Espectral.

Observação 4.1 *Consideraremos o espaço vetorial* $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$ *sobre* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) *como sendo o espaço* $\mathcal{C}([a,b])$ *munido do produto interno de função peso* $r(t)$*, com* $r(t) > 0$*, definido como* $\langle f, g\rangle_r = \displaystyle\int_a^b r(t)f(t)\overline{g(t)}dt$.

Teorema 4.3 *Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.*

Demonstração: Ver Teorema 2.7 do capítulo II de [2]. □

Proposição 4.1 *O operador de Sturm-Liouville* $L[y]$ *é autoadjunto, isto é,* $\langle L[y_1], y_2\rangle = \langle y_1, L[y_2]\rangle$ *para todo* y_1, y_2 *do conjunto de soluções do problema de Sturm-Liouville.*

Demonstração: Ver Teorema da página 251 de [1]. □ O teorema que demonstraremos agora estabelece uma importante relação entre duas autofunções distintas do problema de Sturm-Liouville.

Teorema 4.4 *Sejam* λ_1 *e* λ_2 *dois autovalores distintos do problema de Sturm-Liouville. Então as autofunções associadas a* λ_1 *e* λ_2 *são ortogonais entre si.*

Demonstração: Sejam y_1 e y_2 duas autofunções associadas aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, isto é, $L[y_1] = \lambda_1 y_1$ e $L[y_2] = \lambda_2 y_2$. Como L é autoadjunto,

$$\langle -\lambda_1 y_1, y_2\rangle = \langle L[y_1], y_2\rangle = \langle y_1, L[y_2]\rangle = \langle y_1, -\lambda_2 y_2\rangle$$

então,

$$\lambda_1\langle y_1, y_2\rangle = \lambda_2\langle y_1, y_2\rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, y_2\rangle = 0$$

como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue que $\langle y_1, y_2\rangle = 0$. □ Algumas das principais propriedades do problema de Sturm-Liouville estão listadas no próximo teorema, que está demonstrado no capítulo IV em [3].

Teorema 4.5 *Considere o problema de Sturm-Liouville expresso em (8) com condições de fronteira (9). Então:*
a) Os autovalores do problema formam uma sequência infinita e crescente $\{\lambda_n\}$ *de números reais tais que* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty$*;*
b) Os autovalores do problema formam um conjunto enumerável;
c) A sequência de autofunções $\{y_n\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathcal{C}_{L^2}([a,b])$.

Com esses resultados, podemos apresentar um dos mais belos teoremas da Matemática, desta vez generalizado para a dimensão infinita: o Teorema Espectral, cuja demonstração pode ser vista no capítulo III de [3].

Teorema 4.6 *(Teorema Espectral) Seja* E *um espaço vetorial com produto interno e* L *um operador autoadjunto e compacto. Então, existe uma sequência* $\{\lambda_n\} \in \mathbb{R}$ *(finita ou infinita) de autovalores não-nulos de* L *e uma sequência* $\{y_n\}$ *de autovetores correspondentes que formam uma base ortonormal de* E*.*

Pode-se ver uma bela semelhança entre o problema de Sturm-Liouville e o caso de operadores lineares autoadjuntos em espaços de dimensão finita. Em ambos, os autovalores são reais e as autofunções ou os autovetores formam um conjunto ortogonal que é base do espaço vetorial. A diferença mais importante mora no fato de que, em dimensão finita, o operador possui um número finito de autovalores, ao passo que, em dimensão infinita, o operador de Sturm-Liouville possui infinitos. Agora, generalizando a Teoria Espectral para espaços vetoriais de dimensão infinita, tem-se que qualquer função contínua pode ser escrita como uma série de autofunções do Operador de Sturm-Liouville.

BIBLIOGRAFIA

[1] BORTOLATTO, R. B. ***Equações com Derivadas Parciais:*** *conceitos fundamentais.* 1. ed. São Paulo: EdUSP, 2023. 440p.

[2] CAVALHEIRO, A. C. *Minicurso:* ***O Problema de Sturm-Liouville.*** II Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Estadual de Londrina, 2012. Disponível em: `https://www.uel.br/eventos/colmatsul/livros/minicurso%28SturmLiouville%29.pdf`

[3] HONIG, C. S. ***Análise Funcional e o problema de Sturm-Liouville.*** São Paulo: EdUSP, 1978, 178p.

OMU - O *fazer matemático* em uma olimpíada

Firer, Marcelo; Oliveira, Andrês; Monteacutti Filho, Denilson e Zugliani, Giuliano[81]

Resumo: *Esta apresentação visa reportar como a Olimpíada de Matemática da Unicamp vem desenvolvendo suas últimas edições, especialmente durante e no pós-pandemia. Em particular, acreditamos que a Olimpíada vem se tornando, pelo seu formato e pelas suas questões, um pouco mais próxima de como é a essência da pesquisa matemática.*

Palavras-chave: *Olimpíadas de conhecimento, divulgação matemática, pensamento matemático.*

A Olimpíada de Matemática da Unicamp (OMU) destaca-se como uma das principais competições desse gênero no Brasil, inserindo-se no contexto das diversas olimpíadas de matemática existentes no país. Criada em 1985 pelo professor Antônio Carlos do Patrocínio, a OMU está prestes a realizar sua 40ª edição em 2024. Consagrada como uma das mais tradicionais olimpíadas de conhecimento do Brasil, a OMU é realizada em três fases e atende estudantes do ensino médio (nível Beta) e dos anos finais do ensino fundamental (nível Alfa).

Por várias décadas, a OMU foi uma olimpíada regional[82], estabelecendo uma conexão vital com escolas e professores em todo o país. Como tal, proporcionou uma importante plataforma de acesso à renomada Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que por sua vez serve como um trampolim para competições internacionais.

A partir do surgimento da Olimpíada de Matemática da Escola Pública (OBMEP) em 2006, a OMU, juntamente com outras olimpíadas regionais, passou a ocupar um espaço definido, caracterizado pela proximidade com as escolas e pela abordagem de conteúdos alinhados aos programas das boas instituições de ensino básico.

No contexto das restrições impostas pela pandemia de Covid-19 em 2020, frente aos novos desafios, a OMU iniciou uma trajetória inovadora. No primeiro semestre de 2020, quando ainda não se vislumbrava a extensão das medidas de distanciamento social, a OMU organizou provas a serem resolvidas remotamente, sem qualquer premiação prevista, mas como um desafio para os estudantes confinados em suas residências. Essas provas, realizadas em grupo, promoveram um envolvimento significativo dos participantes, evidenciando um potencial promissor para a mudança de formato.

Esse momento desencadeou a transição da OMU para uma competição em equipe, seguindo o modelo adotado pela bem-sucedida Olimpíada Nacional em História do Brasil[83]. Nas edições de

[81] Unicamp

[82] Hoje há quase três dezenas de olimpíadas regionais, que em sua maioria podem ser acessadas em `https://www.obm.org.br/competicoes/regionais/`

[83] Olimpíada criada em 2009 pelo Museu Exploratório de Ciências, hoje vinculada ao Departamento de História da Unicamp, contando com 120 mil participantes em 2023

2020 e 2021, a competição ocorreu em equipes de três estudantes, acompanhadas por um professor responsável, e foi realizada em três fases remotas, cada uma com duração de uma semana. As provas foram digitalizadas pelos próprios alunos e submetidas ao sistema administrativo para correção por uma equipe da Unicamp, composta por estudantes de pós-graduação supervisionados por docentes-pesquisadores do IMECC-Unicamp.

A partir de 2022, com a redução das restrições de isolamento social, a terceira fase da OMU passou a ser realizada presencialmente, garantindo a integridade do processo de premiação e permitindo a realização de uma cerimônia de premiação animada no dia seguinte. Em 2023, a OMU envolveu mais de 10 mil alunos e professores de 25 estados e do Distrito Federal, consolidando-se como uma olimpíada nacional. Além disso, a OMU tornou-se credenciada para o edital de Vagas Olímpicas da Unicamp, por meio da realização de uma prova presencial e individual. Um pequeno documentário sobre a edição de 2022 está disponível para visualização online em `https://shorturl.at/dVW14`.

A transição para provas em equipe com duração de uma semana transformou esses momentos não apenas em avaliações de conhecimento e proficiência, mas também em oportunidades de aprendizado. A consulta bibliográfica foi não apenas permitida, mas incentivada, e o debate matemático foi estimulado de forma eficaz. Essa abordagem singular posiciona a OMU em um cenário peculiar entre as olimpíadas de matemática, enfatizando a importância da aprendizagem durante o processo, em contraste com as abordagens pré e pós-competição adotadas por outras competições do gênero.

A respeito da escrita dos alunos, o relaxamento do fator tempo possibilitou o estímulo a uma redação mais elaborada, que não apenas apresenta soluções corretas, mas também explana ideias com fluidez, oferece explicações detalhadas e apresenta exemplos relevantes. Esse aspecto é avaliado por meio de um julgamento comparativo das respostas, que podem estar todas corretas, mas diferem em qualidades importantes que não podem ser quantificadas em uma grade de correção tradicional. Essa abordagem comparativa pode adicionar até 20% à pontuação das equipes[84]. A dedicação e desenvolvimento dos alunos para a qualidade da escrita matemática é relatada por seus professores e testemunhada pela equipe da OMU na correção destas provas.

Além disso, as questões abordadas nas provas em equipe e com prazo de uma semana permitem explorar temas e habilidades de maneira diferenciada, incluindo a generalização de situações, a formulação de conjecturas e o uso de recursos computacionais para tratar de casos particulares.

Essas características tornam a participação na OMU uma experiência enriquecedora, aproximando os estudantes dos elementos da matemática vivenciada por pesquisadores e profissionais da área: o estudo de fontes bibliográficas, a troca de ideias com os colegas, as conjecturas (verdadeiras ou falsas), os exemplos que ajudam a entender os fenômenos mais complexos, e a redação como uma forma de comunicação efetiva. Isso sem contar a valorização da cooperação e da perseverança.

Jorge Wagensberg (1948-2018)[85], enfatizava em seus cursos de formação a importância de compreender e interpretar o que fascina os cientistas de uma área para comunicar e fascinar o público. A OMU, ao seguir essa abordagem, está trilhando o caminho certo para tornar a matemática acessível e cativante para um público mais diversificado.

[84] Para saber mais sobre julgamento comparativo de matemática, veja detalhes em [1].

[85] Uma excelente entrevista abordando estes temas pode ser lida em `https://revistapesquisa.fapesp.br/na-pele-do-cientista/`.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jones, I., Swan, M. and Pollitt, A., Assessing mathematical probelm solving using comparative judment *Int J of Sci and Math Educ* 13, 151–177, 2015.

Geração de números a partir da quantidade de divisores

Gerando números cúbicos imperfeitos

SOUZA, Gladys[86]

Resumo: *Este trabalho apresenta um estudo sobre a geração dos números compostos a partir da quantidade de seus divisores, inicialmente identificando cada número natural a partir da quantidade de divisores pelo uso do TFA. Este estudo nos levou ao cálculo inicial para identificar os números naturais iniciais até 1000, a partir da quantidade de divisores e, além disso, também foram feitos os cálculos para se obter fórmulas que gerem os números de 3 até 100 divisores e, além disso, foi possível perceber um tipo de número que denominei de número cúbico imperfeito,* p^5 *e* p^7*, são exemplos desses números que podem ser representados de duas formas:* p^{6n+5} *e* p^{6n+1}*, desde que* $6n + 5 = p$ *e* $6n + 1 = p$*. Contudo, sabe-se que estas duas fórmulas também produzem números que denominei compostos primazes* $\check{C}$ *devido serem gerados pelas mesmas fórmulas que geram números primos. Assim, para que essas fórmulas gerem somente números primos de um determinado intervalo de números, elaborou-se a fórmula (F3), sendo, para* $(6n + 1) = (F3)_1 = \check{C}$ *ou* $(6n + 1) \neq (F3)_1 = P$*, e para* $(6n + 5) = (F3)_2 = \check{C}$ *ou* $(6n + 5) \neq (F3)_2 = P$*, nessas condições, as três fórmulas como resultado final se obterá apenas os números primos de qualquer intervalo dado. Portanto, de* $(6n + 1) \neq (F3)_1 = P$ *e* $(6n + 5) \neq (F3)_2 = P$*, pode-se encontrar todos os números cúbicos imperfeitos de qualquer intervalo de números.*

Palavras-chave: *Números primos, geração de números cúbicos imperfeitos., quantidade de divisores.*

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um estudo sobre a identificação dos números naturais pela quantidade divisores, tendo por base os números primos, e além disso, apresentar um dos resultados que me levou a identificar os números cúbicos não perfeitos, pois de maneira como estes números se apresentam não parecem ser dessa forma. Os números primos, desde a época da graduação em licenciatura em Matemática, me chamaram a atenção e aguçaram minha curiosidade, e alguns resultados obtidos com este estudo, motivaram-me mais ainda para estudá-los com mais atenção, principalmente pelo fato de serem tão importantes na resolução de vários problemas matemáticos em aberto. Sabe-se que até hoje ainda há alguns problemas em aberto em que os números primos são a base para se encontrar a solução. Há muitos aspectos que já foram estudados

[86]Universidade Federal de Roraima (UFRR). `gladys.souza@ufrr.br`

desde um passado remoto. Os matemáticos gregos já sabiam da grande relevância do papel dos números primos, pois foram os primeiros a perceber que os números primos eram os pilares da construção dos demais números naturais.

Neste estudo iremos abordar basicamente os números e compostos para apresentar a geração dos números naturais. Desse modo, usando as palavras de [1] Steffenon e Guarnieri (2016, p. 9-10), apresenta-se as definições de números primos e compostos, bem como a demonstração e o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) e as demonstrações usando o princípio da Indução Matemática.

Definição 1. Um número inteiro $p > 1$ *é dito primo se os únicos divisores positivos são 1 e p. São números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 127, 641.*

Definição 2. Um número inteiro $n > 1$ *é dito composto se ele não for primo. Uma característica importante de um número composto n é que ele pode ser escrito na forma* $n = a.b$, *com* $1 < a \leq b < n$. *São números compostos:* $4 = 2.2$, $51 = 3.17$, $1001 = 7.11.13$.

Lema 1. Todo número inteiro $n > 2$ *é produto de números primos.*

Observação. Um resultado conhecido sobre números primos e que não será provado aqui é que se p é primo, a e b são inteiros tais que ab é divisível por p, então, a é divisível por p ou b é divisível por p. Com isso podemos provar o resultado abaixo.

Teorema 1. Teorema Fundamental da Aritmética – TFA. Todo número inteiro $n > 1$ *pode ser escrito de maneira única, na forma* $n = p_1^{e_1}.p_2^{e_2}\dots p_k^{e_k}$, *onde* $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ *são números primos,* $e_1, e_2, \dots, e_k$ *são inteiros positivos e* $k \geq 1$. *Além disso, n possui* $(e_1+1)(e_2+1)\dots(e_k+1)$ *divisores positivos.*

Demonstração. A existência da escrita foi provada no lema acima. Agora vamos provar a unicidade. Supõe que n possui duas fatorações diferentes $n = p_1.p_2\dots.p_s = q_1.q_2.\dots.q_t$, *onde* $p_1, p_2, \dots, p_s, q_1, q_2, \dots, qt$ *são todos primos, com* $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_s$ *e* $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_t$. *Removendo todos os primos comuns obtemos* $p_{i1}.p_{i2}\dots p_{iu} = q_{j1}.q_{j2}\dots q_{jv}$, *onde não há mais primos comuns dos dois lados,* $u \geq 1$ *e* $v \geq 1$. *Pela observação acima segue que* q_{jk} *é divisível por* p_{i1} *para algum* jk, *o que dá uma contradição.*

O trabalho a ser apresentado é sobre a geração dos números a partir da quantidade de divisores com base nos números primos. Quando estava fazendo minha pesquisa para a tese de doutorado sobre o tema divisibilidade nos livros didáticos de Matemática da Educação Básica percebi que não havia questões do tipo: Quais os números de 2, 3 ou 4 divisores? E, essa lacuna não estava só nos livros didáticos, ao fazer entrevistas com alguns professores de Matemática da Educação Básica e do Ensino Superior fiz a seguinte pergunta: "Se eu quiser saber quais são os números que têm quatro divisores no intervalo de 1 a 100? Como faço para encontrar a solução? Dos professores que entrevistei nenhum soube responder. Essa situação me aguçou a curiosidade mais ainda, e então surgiu a vontade de resolver este tipo de problema. Para isso tive que voltar minha atenção para os números primos. Portanto, este trabalho é para dar uma resposta a esse tipo de questão.

Ribeboim [2, 2015, p.340] enfatiza que "Teorias precisam de exemplos e, se teoremas não forem provados, conjecturas são formuladas, ou seja, conseguimos mais mistérios para resolver".

Assim, se o exposto neste trabalho não for suficiente como prova, resta-nos contar como conjecturas, para que mais pesquisadores se aventurem por este caminho.

Em se tratando da quantidade de divisores positivos de um número natural,para [3] Alencar Filho (1988, p. 2) são funções aritméticas usuais da "Teoria dos Números" as funções numéricas

d, s, t e v de N em N assim definidas: $d(n)$ – número de divisores positivos de n; $s(n)$ = soma dos divisores positivos de n; $t(n)$ = número total de fatores primos de n; $f(v)$ = número de divisores distintos de n. Em particular, para todo primo p: $d(p) = 2$, $s(p) = 1 + p$, $t(p) = 1$ e $v(p) = 1$.

De modo geral, se $n = p_1^{a1}.p_2^{a2} \dots p_r^{ar}$ é a fatoração canônica de um inteiro positivo $n > 1$, então:
$d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_r + 1) = \prod_{(i=1)}^{r}(a_i + 1)$
$t(n) = a_1 + a_2 + \dots = a_r, v(n) = r$

Exemplo: $n = 360 = 2^3.3^2.5$, temos:

$$d(360) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 4.3.2 = 24 \text{ divisores; } t(360) = 3 + 2 + 1 = 6; v(360) = 3.$$

Como se pode verificar neste exemplos dado por [3] primeiro se tem o número, depois decompõe-se este número em fatores primos para se aplicar d(n) e, então se obtém a quantidade de seus divisores.

O que propomos neste trabalho é identificar os números naturais a partir de quantidade de divisores, nas suas mais diversas variações.

Geração dos números naturais

A geração dos números naturais a partir da quantidade dos divisores usando como base os números primos são de três tipos:

1º tipo de geração – Números da forma $p^n, p^{n+1}, p^{n+2}, \dots, p^{n+r}$, com $n \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Números da forma p^3 – de quatro divisores (dv). São produtos de números primos iguais $(p^{2+1} = p^3 = p_i.p_i.p_i)$. Exemplo: $2^3 = 8, 3^3 = 27, \dots, p^3 = \hat{C}_{4dv}$. Assim, tem-se que $p^2 = 3dv, p^3 = 4dv, p^4 = 5dv, \dots, p^n = (n + 1)dv$ divisores, com $n \geq 1$.

2º tipo de geração – na forma de produto de primos distintos, iniciando com dois fatores primos diferentes $(p_i.p_s)$, tem sua representação da 1ª forma $(p_i.p_s)$. Generalizando: $(p_1.p_2), \dots, (p_1.p_{n2}) = [(1 + 1).(1 + 1)]dv \Rightarrow 2 \times 2 = 2^2dv; (p_1.p_2.p_3), \dots, (p_1.p_2.p_{n3}) = [(1 + 1).(1 + 1).(1 + 1)]dv \Rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 2^3; (p_1.p_2.p_3.p_4), \dots (p_1.p_2.p_3.p_n) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 = 2^4dv, \dots, 2^ndv$, com $n \geq 2$.

3º tipo de geração – produtos de números primos diferentes, em que misturam-se os dois primeiros tipos. Iniciamos por: $(p_i^2.p_s)$ e $(p_i.p_s^2) = 6dv$; $(p_i^3.p_s)$ e $(p_i.p_s^3) = 8dv$; $(p_i^n.p_s)$ e $(p_i.p_s^n) = (2n + 2)dv$, com $n \geq 2$. e se amplia para n formas.

Exemplo: $n = 2 \Rightarrow 2 \times 2 + 2 = 6dv, n = 3 : 2 \times 3 + 2 = 8dv, n = 4 : 2 \times 4 + 2 = 10dv, \dots, (2n + 2)dv$. Para $(2n + 2)dv \Rightarrow$ um conjunto de divisores $\{6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}$, com progressão aritmética de razão 2.

Os números de 9 divisores são da forma $p^2.p_s^2$. Exemplos: $2^2.3^2 = 36, 2^2.5^2 = 100$, $3^2.5^2 = 225$. O produto de dois quadrados perfeitos de números primos é um quadrado perfeito, ou o quadrado de produto de dois fatores primos é um número quadrado perfeito, ou seja, $(p_i^2.p_s^2) = (p_i.p_s)^2$. Generalizando a forma $= (p_ip_s)^n$.

$2^2.3^2 = 36 = 9 = 3^2dv \Rightarrow p^2.p_s^2 = (p_ip_s)^2$

$2^3.3^3 = 216 = 16 = 4^2dv \Rightarrow p^3.p_s^3 = (p_ip_s)^3$

$2^4.3^4 = 1.296 = 25 = 5^2dv \Rightarrow p^4.p_s^4 = (p_ip_s)^4$

$(p_ip_s)^2, (p_ip_s)^3, (p_ip_s)^4, \ldots, (p_ip_s)^n = (n+1)^2 dv$, com $n \geq 2$.

No produto de três primos distintos com expoentes 1, 2 e 3, há a possibilidade de arranjos combinatórios e cada possibilidade têm $(2 \times 3 \times 4) = 24$ divisores, fixando um número primo como 1º fator, temos $2 \times 3 = 6$ combinações.

$$[(p_1^1.p_2^2.p_3^3), (p_1^1.p_2^3.p_3^2), (p_1^2.p_2^1.p_3^3), (p_1^2.p_2^3.p_3^1), (p_3^3.p_1^1.p_2^2), (p_3^3.p_2^2.p_1^1)] = 24dv.$$

Exemplo: a 1ª combinação, $2 \times 3^2 \times 5^3 = 2.250$ resulta no maior número de todas as demais combinações e a última combinação, $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$, resulta no menor número de todas as demais combinações com, todos com 24 divisores.

As fórmulas para se calcular $d(n)$ do 3º tipo são diversas, cada uma dessas apresentadas, podem gerar outras fórmulas. Por exemplo:

- $(p_1.p_2.p_3) = 2^3 dv, (p_1^2.p_2^2.p_3^2) = 3^3 dv, (p_1^3.p_2^3.p_3^3) = 4^3 dv, \ldots, (p_1^n.p_2^n.p_3^n) = (n+1)^3 dv$
- $(p^3.p_s^2$ e $p^2.p_s^3) = 12dv$, $(p^4.p_s^2$ e $p^2.p_s^4) = 15dv$, $(p^5.p_s^2$ e $p^2.p_s^5) = 18dv, \ldots, (p^n.p_s^2)$ e $(p^2.p_s^n) = (3n+3)dv$, com $n \geq 2$

  $(p^3.p_s^2), (p^4.p_s^2), (p^5.p_s^2), \ldots, (p^n.p_s^2) = (3n+3)dv$, com $n > 2$

  $(p^2.p_s^3), (p^2.p_s^3), (p^2.p_s^3), \ldots, (p^2.p_s^n) = (3n+3)dv$, com $n > 2$.

Para $(3n+3)dv \Rightarrow$ um conjunto de divisores $\{12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$ com progressão aritmética de razão 3.

Exemplos:

$2^3 \times 3^2 = 72 => d(72) = 12dv = 3 \times 3 + 3 = 12dv; 2^2 \times 3^3 = 108 \Rightarrow d(108) = 12dv$

$2^4 \times 3^2 = 144 \Rightarrow d(144) = 15dv = 3 \times 4 + 3 = 15dv; 2^2 \times 3^4 = 324 \Rightarrow d(324) = 15dv.$

Quantidade de divisores nas formas: $[(p_1^n.p_2.p_3), (p_1.p_2^n.p_3), (p_1.p_2.p_3^n)] = (4n+4)dv$, com $n \geq 2$.

- Um conjunto de divisores $\{12, 16, 20, 24, 28, 32, \ldots\}$, com progressão aritmética de razão 4.
- Nas seguintes projeções do tipo 3 temos:

$P = 2^1 dv$	$P^2 = 3dv \Rightarrow (3^1)$	$P^3 = 4dv \Rightarrow 4^1$
$p_1.p_2 = 4 = 2^2 dv$	$p_1^2.p_2^2 = 9dv \Rightarrow (3^2)$	$p_1^3.p_2^3 = 16dv \Rightarrow 4^2$
$p_1.p_2.p_3 = 8 = 2^3 dv$	$p_1^2.p_2^2.p_3^2 = 27dv \Rightarrow (3^3)$	$p_1^3.p_2^3.p_3^3 = 64dv \Rightarrow 4^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_1.p_2 \ldots p_n = (1+1)^n dv$	$p_1^2.p_2^2 \ldots p_n^2 = (2+1)^n dv$	$p_1^3.p_2^3 \ldots p_n^3 = (3+1)^n dv$

Logo, $(1+1)^n dv, (2+1)^n dv, (3+1)^n dv, \ldots, np^x = (x+1)^n dv$

Se a base são fatores primos distintos e os expoentes distintos sem nenhuma ordem, então usa-se a fórmula geral para contar a quantidade de divisores.

$p_1^x.p_2^y.p_3^z = [(x+1).(y+1).(z+1)]dv$

Exemplo: $2^1 \times 3^3 \times 5^2 = (1+1).(3+1).(2+1) = 24$ divisores

Algumas considerações:

1. Com os resultados obtidos pode-se perceber que há números apenas de um tipo de geração, ou seja, só é gerado de uma única forma: são números cuja quantidade de divisores são números primos do tipo $p^n = (n+1) = pdv$.

2. Números que são somente gerados de duas formas: são os números de quatro divisores; p^3 e $(p_i.p_s)$.

3. Sendo a quantidade de divisores um número primo só há uma forma de se calcular esses números: $(p^{2n}) = (2n+1)dv$, sendo $(2n+1 = p)dv$ e $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Exemplo: $2^{2.1} = (2 \times 1 + 1) = 3dv$, $2^{2.2} = (2 \times 2 + 1) = 5dv, 2^{2.3} = (2 \times 3 + 1) = 7dv$. Não há outra forma de encontrar números de 3, 5, 7,..., p divisores. Sendo p^{2n} será sempre um número quadrado perfeito.

4. Quando os números primos são elevados a expoentes primos são números cúbicos não perfeitos.

Gerando números cúbicos imperfeitos

Com a geração dos números naturais a partir da quantidade de divisores foi possível perceber um tipo de números que denominei de números cúbicos imperfeitos, por exemplo: 2^5 e 2^7. Verificamos que poderá haver infinitos números da forma similar a $2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[3]{32} = 2^1.2^{(2/3)} \Leftrightarrow 32 = (2^1.2^{(2/3)})^3$, de maneira similar, poderá haver infintos números da forma $2^7 = 128 \Rightarrow \sqrt[3]{128} = 2^2.2^{(1/3)} \Leftrightarrow 128 = (2^2.2^{(1/3)})^3$.

Exemplo 1:
$2^5 = 32 \Rightarrow \sqrt[3]{32} = 2^1.2^{(2/3)} \Leftrightarrow 32 = (2^1.2^{(2/3)})^3$,

$2^{11} = 2048 \Rightarrow \sqrt[3]{2048} = 2^3.2^{(2/3)} \Leftrightarrow 2.048 = (2^3.2^{(2/3)})^3$,

$2^{17} = 131072 \Rightarrow \sqrt[3]{131072} = 2^5.2^{(2/3)} \Leftrightarrow 131.072 = (2^5.2^{(2/3)})^3$,
$\Rightarrow (2^1.2^{(2/3)})^3, (2^3.2^{(2/3)})^3, (2^5.2^{(2/3)})^3, \ldots, (p^5.p^{(2/3)})^3$

Aplicando as propriedades da potenciação e da radiciação resolvendo $(p^5.p^{(2/3)})^3$, temos:
$P^{q1} = (p^{2n+1}p^{2/3})^3 = (p^{2n+1})^3.(p^{(2/3)})^3 = (p^{6n+3}.p^2) = p^{6n+5}$, com $n \geq 0, n \in \mathbb{N}$,
logo $q_1 \geq 5$ e $q_1 \in P$.

Exemplo 2:
$2^7 = 128 \Rightarrow \sqrt[3]{128} = 2^2.2^{(1/3)} \Leftrightarrow 128 = (2^2.2^{(1/3)})^3$.

$2^{13} = 8.192 \Rightarrow \sqrt[3]{8192} = 2^4.2^{(1/3)} \Leftrightarrow 8.192 = (2^4.2^{(1/3)})^3$,

$2^{19} = 524.288 \Rightarrow \sqrt[3]{524.288} = (2^6.2^{(1/3)})^3$
$\Rightarrow (2^2.2^{(1/3)})^3, (2^4.2^{(1/3)})^3, (2^6.2^{(1/3)})^3, \ldots, (p^{2n}.p^{(1/3)})^3$

Aplicando as propriedades da potenciação e da radiciação resolvendo $(p^{2n}.p^{(1/3)})^3$, temos:
$P^{q2} = (p^{2n}p^{1/3})^3 = (p^{2n})^3.(p^{(1/3)})^3 = (p^{6n}.p^1) = p^{6n+1}$, com $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$,
logo $q_2 \geq 7$ e $q_2 \in P$.

Para saber quais são os expoentes primos em que os números são da forma cúbica imperfeita, nos dois casos: 1º caso: $p^{q1} = p^{6n+5}$, ou seja, $q_1 \geq 5$, com $n \geq 0$, e $n \in \mathbb{N}$. 2º caso: $p^{q2} = p^{6n+1}$, com de $q_2 \geq 7$, com $n \geq 1$, e $n \in \mathbb{N}$. Deve-se obter todos os números primos desse intervalo gerados pelas fórmulas (F1): $6n+1 = p$ e F(2):$6n+5 = p$. Contudo, sabe-se que ambas as fórmulas também geram númeos compostos. Desse modo, para identificar os números compostos gerados pelas duas fórmulas, elaborou-se uma fórmula nova fórmula com base nas F1 e F2: $(F3)_{1,2} : r.n + m(p)_{1,2} = (\hat{C})$, com $r = 6p$ e $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para identificar números primos em um intervalo (a, b) gera-se um universo de números com F1 e F2, bem como, deve-se calcular os primos básicos (p_s) para o intervalo (a, b), com $p_b \leq \sqrt{b}$, para se calcular os múltiplos desse primos $m((p_b)_1, (p_b)_2, \ldots, (p_b)_n \leq \sqrt{b})$, através de (F3), que estão contidos em F1 e F2. Assim, tem-se $(F3)_1$ para $6n + 1 : (6p)n + m(p)_1 = \hat{C}$ e $(F3)_2$ para $6n + 5 : (6p)n + m(p_b)_2 = \hat{C}$. Ao se encontrar os compostos primazes pela F3, deve-se identificar esses números produzidos pelas fórmulas $6n + 1$ e $6n + 5$, sendo, para $(6n + 1) = (F3)_1 = \hat{C}$ ou $(6n + 1) \neq (F3)_1 = P$, e para $(6n + 5) = (F3)_2 = \hat{C}$ ou $(6n + 5) \neq (F4)_2 = P$.

Portanto, as duas fórmulas $6n + 1$ e $6n + 5$ em conjunto com a F3 têm como resultado apenas os números primos de qualquer intervalo dado.

Desse, modo, pode-se encontrar todos os números cúbicos imperfeitos de qualquer intervalo de números. Vamos dar alguns exemplos dos números cúbicos imperfeitos com números primos menores que 300.

De $(6n + 5) \neq (F3)_1 = P$, sendo
$p^{6n+5} : p^5, p^{11}, p^{17}, p^{23}, p^{29}, p^{41}, p^{47}, p^{53}, p^{59}, p^{71}, p^{83}, p^{89}, p^{101}, p^{107}, p^{113}, p^{131}, p^{137}, p^{149}, p^{167}$,
$p^{173}, p^{179}, p^{191}, p^{197}, p^{227}, p^{233}, p^{239}, p^{251}, p^{257}, p^{263}, p^{269}, p^{281}, p^{293}$.

De $(6n + 1) \neq (F3)_1 = P$, sendo
$p^{6n+1} : p^7, p^{13}, p^{19}, p^{31}, p^{37}, p^{43}, p^{61}, p^{67}, p^{73}, p^{79}, p^{97}, p^{103}, p^{109}, p^{127}, p^{139}, p^{151}, p^{157}, p^{163}$,
$p^{181}, p^{193}, p^{199}, p^{211}, p^{223}, p^{229}, p^{241}, p^{271}, p^{277}, p^{283}$.

CONCLUSÕES

Com estes resultados espero que este trabalho possa acrescentar mais relevância ao papel que os números primos têm no desenvolvimento do conhecimento matemático e possa ser usado para futuras pesquisas e, além disso, incrementar mais questões problemas a serem usadas nas disciplinas da Teoria dos Números e Olimpíadas de Matemática. Com os experimentos empíricos da aplicação das fórmulas apresentadas conseguimos identificar todos os números de 1 a 1000 pela quantidade de seus divisores e, além disso, compomos uma tabela com todas as possibilidade de identificar todos os números de 3 a 100 divisores.

BIBLIOGRAFIA

[1] Rogério, S. ,Guarnieri, F.; **Belos problemas de Matemática: indução e contagem**. IV Colóquio de Matemática da Região Sul. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2016. ISBN (eBook) 978-85-8337-099-4.

[2] Ribenboim, P.; **Números Primos: Velhos Mistérios e Novos Recordes**. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. (Coleção matemática universitária).

[3] Alencar Filho, E.; **Funções aritméticas: números notáveis**. São Paulo: Nobel, 1988.

[4] Coelho, E.C.. **Uma introdução aos primos gêmeos**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR. Curitiba, 2021.

[5] Silva Junior, J.C.; **O Teorema de Dirichlet: primos em progressão aritmética**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, 2017.

Interações entre espécies via equações diferenciais parciais

Um modelo de Holling-Tanner

Silveira, Graciele P.[87] e Garcia, Raphael de O.[88]

Resumo: *Neste trabalho, simulações de cenários de dinâmicas populacionais entre espécies, distribuídas espacialmente, foram implementadas via modelo de Equações Diferenciais Parciais do tipo Holling-Tanner e métodos numéricos. Os resultados evidenciaram que essa abordagem é adequada e pode auxiliar na compreensão do fenômeno, assim como na elaboração de estratégias para lidar com determinadas consequências advindas de fatores, como as mudanças climáticas.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, equações diferenciais parciais, populações.*

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática de fenômenos biológicos possibilita o estudo de interações entre espécies. Atrelada às equações diferenciais e aos métodos numéricos, as previsões de possíveis cenários podem auxiliar em tomadas de decisões. Dessa forma, o propósito deste trabalho foi investigar o impacto de termos advectivos e difusivos na dinâmica populacional de presas e predadores, descritos por um modelo do tipo Holling-Tanner [2], cujas populações estão distribuídas espacialmente em diferentes localidades.

MODELAGEM MATEMÁTICA

Considere o seguinte sistema de Equações Diferenciais Parciais:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \bullet P_1 & = & b_1\left(\dfrac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}\right) + P_1\left(1 - P_1\right) - \dfrac{P_1}{a + P_1}P_2 \\ \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \bullet P_2 & = & b_2\left(\dfrac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}\right) - P_2\left(d - b\dfrac{P_2}{P_1}\right) \end{array}\right. , \qquad (10)$$

[87]Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba
[88]Universidade Federal de São Paulo - Campus Osasco

em que $P_1 = P_1(x, y, t)$ é a distribuição da população de presas; $P_2 = P_2(x, y, t)$ é a distribuição da população de predadores que se alimentam de P_1 e se beneficiam do encontro entre P_1 e P_2, representado por P_1P_2. Os coeficientes advectivos $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y)$ e $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y)$ descrevem, respectivamente, o deslocamento das populações no domínio espacial e os coeficientes difusivos b_1 e b_2 o espalhamento das populações. A expressão $-\dfrac{P_1}{a + P_1}P_2$ é a função resposta, a constante a refere-se a capacidade das presas evitarem o ataque dos predadores. As constantes d e b interferem diretamente da dinâmica dos predadores.

As discretizações das equações diferenciais foram realizadas via esquemas de diferenças finitas, a saber, o método *Upwind* para o termo advectivo, um método de diferenças finitas centrado para o termo difusivo e um método de diferenças finitas avançado para a derivada temporal [3]. Os códigos próprios foram elaborados em linguagem *Python*.

SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Considerou-se o domínio espacial $(x, y) \in [0, 20] \times [0, 20]$, com uma malha de 60×60 subintervalos e um domínio temporal $t \in [0, 30]$, com 600 subintervalos, isto é, $\Delta x = 1/3$, $\Delta y = 1/3$ e $\Delta t = 0,05$. Tais escolhas satisfazem os critérios de estabilidade de Courant, Friedrichs e Lewy (CFL) e o critério do termo difusivo [3].

Os parâmetros foram adotados conforme [1], isto é, $a = 0,5$, $b = d = 0,1$. Com esses valores, um ponto de equilíbrio das populações é $(P_1, P_2) = (0,5\ ,\ 0,5)$. Deslocamento das populações $\overrightarrow{u} = (-0,1\ ,\ -0,1)$, $\overrightarrow{v} = (0,2\ ,\ 0,2)$ e espalhamento $b_1 = b_2 = 0,01$.

As condições iniciais são descritas na Figura 23, gráfico à esquerda para presas P_1 e gráfico à direita para predadores P_2. Os valores diferentes de $0,5$, indicam que as populações não estão no ponto de equilíbrio. As evoluções temporais das presas e predadores, para $t = 4$ ver Figura 24 e para $t = 8$ ver Figura 25, revelaram que pequenas perturbações nas populações iniciais das espécies causam desequilíbrios, que se propagam pelo domínio. Atualmente, as mudanças climáticas vêm gerando muitos desequilíbrios, o que prejudica os ecossistemas como um todo.

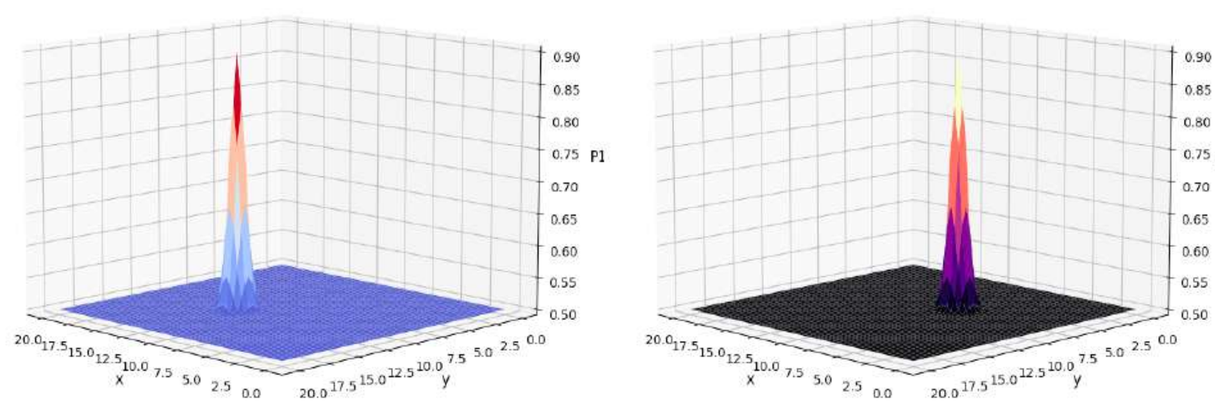


Fig. 23: Condições Iniciais. Autoria própria.

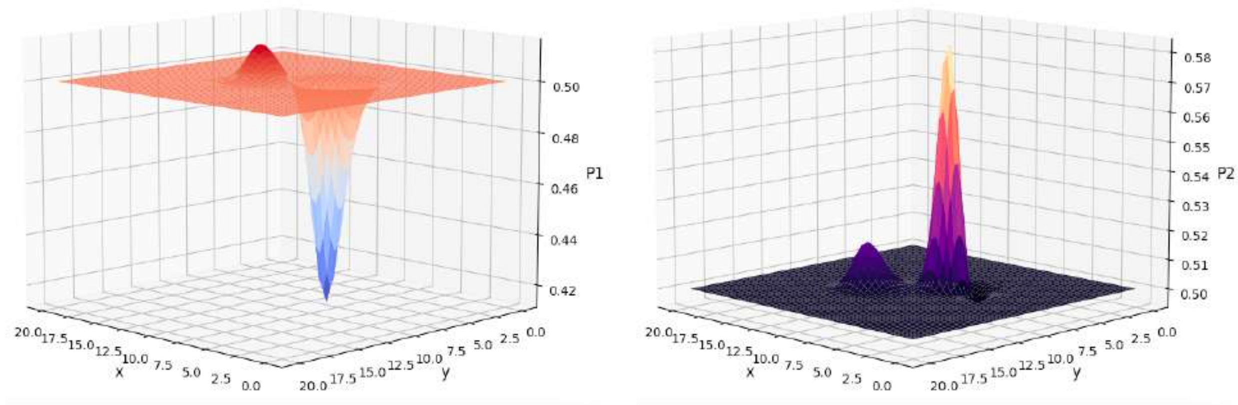


Fig. 24: Evolução temporal 1. Autoria própria.

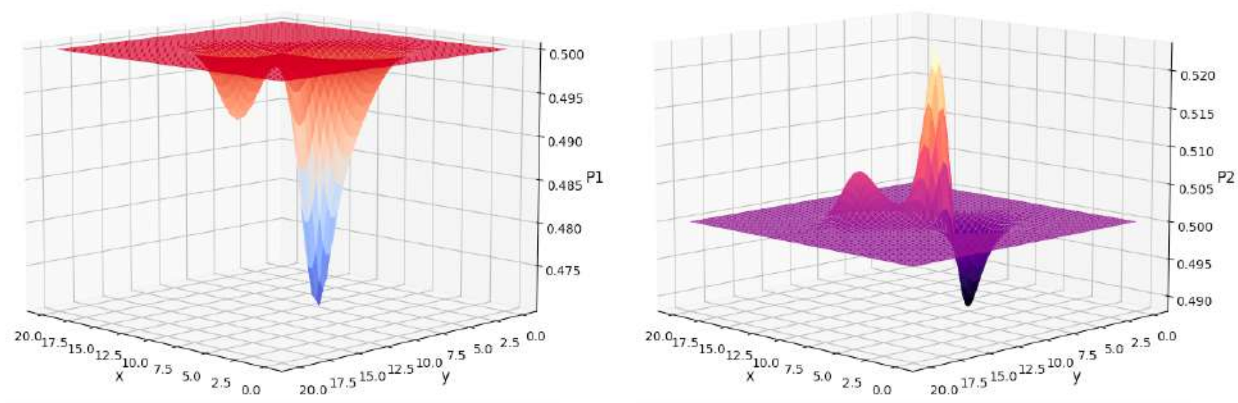


Fig. 25: Evolução temporal 2. Autoria própria.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIU, P.-P. An analysis of a predator–prey model with both diffusion and migration, **Math. Compt. Model.**, v. 51, p. 1064-1070, 2010.

[2] MURRAY, J. D. **Mathematical Biology: I. An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 2002.

[3] THOMAS, J. W. **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods**. New York: Springer-Verlag, 1995.

Uma propriedade dos dodecágonos

Rezende, Hanna[89] e Santos, Rogério[90]

Resumo: *A partir de uma propriedade da geometria plana que diz que um quadrilátero com vértices nos pontos médios dos lados de um outro quadrilátero qualquer é um paralelogramo e do trabalho de Santos, Comby e Silva (2018), que demonstrou uma propriedade semelhante para um octógono qualquer, o objetivo desse trabalho é investigar se algo parecido valeria também para um dodecágono qualquer. Nesse trabalho esse resultado é demonstrado, o que abre caminhos de futuras pesquisas sobre uma possível generalização dessa propriedade para polígonos com quantidade de lados múltipla de quatro. As demonstrações realizadas envolvem Geometria Plana e Geometria Analítica, podendo assim ser trabalhadas com alunos de Ensino Médio da Educação Básica, como complementação ao ensino desses dois conteúdos.*

Palavras-chave: *Geometria, polígonos, dodecágonos.*

INTRODUÇÃO

Uma propriedade já conhecida na geometria plana diz que o quadrilátero com vértices nos pontos médios dos lados de um outro quadrilátero qualquer é, necessariamente, um paralelogramo.

No artigo de Santos, Comby e Silva (2018), publicado na Revista do Professor de Matemática uma propriedade semelhante foi descrita para um octógono qualquer. Nesse trabalho os autores mostraram que podemos tomar um octógono qualquer $A_1A_2A_3...A_8$. Nesse caso, vamos definir M_1, M_2, ..., M_8 como pontos médios dos lados A_1A_2, A_2A_3, ..., A_8A_1 respectivamente. Tomando agora os pontos I, J, K e L como pontos médios, respectivamente, dos segmentos M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7 e M_4M_8, temos que o quadrilátero $IJKL$ é, necessariamente, um paralelogramo ou um polígono degenerado.

Tendo em vista as duas propriedades acima, o objetivo desse trabalho é investigar se algo parecido valeria também para um dodecágono qualquer pois, assim como o quadrilátero e o octógono, esse polígono possui quantidade de lados múltipla de quatro.

RESULTADOS

Vamos considerar um dodecágono qualquer $A_1A_2A_3...A_{11}A_{12}$. Podemos tomar os pontos M_1, M_2, M_3, ..., M_{11} e M_{12} como os pontos médios, respectivamente, dos segmentos A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{11}A_{12}$ e $A_{12}A_1$, como na figura 1.

[89]Afiliação. Este autor foi apoiado pelo Instituto Federal de Brasília
[90]Afiliação. Este autor foi apoiado pela FUP/ Universidade de Brasília

Podemos agora construir quatro triângulos utilizando esses pontos médios como vértices. Esses triângulos são $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_6M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$. Ao denominarmos I, J, K e L os baricentros, respectivamente, dos triângulos $M_1M_5M_9$, $M_2M_6M_{10}$, $M_3M_6M_{11}$ e $M_4M_8M_{12}$, então o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo ou um polígono degenerado.

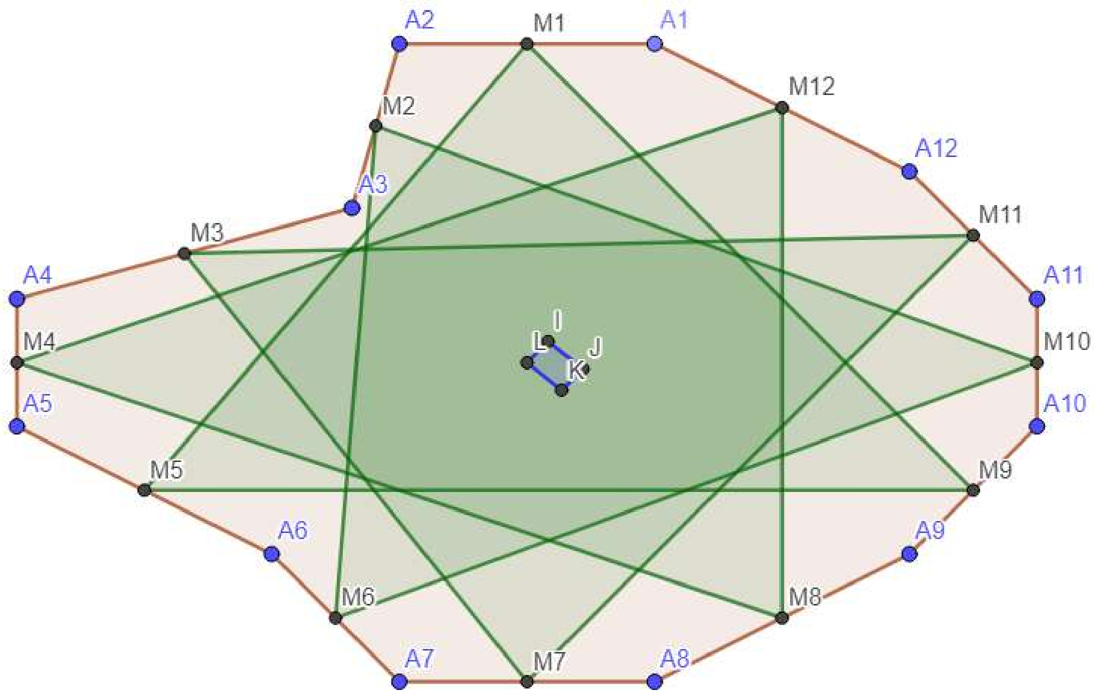


Fig. 26: Paralelogramo qualquer produzido a partir de um dodecágono qualquer(Autoria própria)

Para mostrar a veracidade dessa afirmação mostraremos que $IJ = KL$ e $IL = JK$ pois, um quadrilátero é um paralelogramo se, e somente se seus lados opostos são congruentes.

É possível considerar cada vértice do dodecaedro como um ponto do plano cartesiano. Dessa forma, cada vértice terá coordenadas $A_n = (x_{A_n}, y_{A_n})$. Sabemos que as coordenadas do ponto médio de um segmento é a média aritmética das coordenadas dos extremos. Assim, temos que $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, $M_2 = \dfrac{A_2 + A_3}{2}$, $M_3 = \dfrac{A_3 + A_4}{2}$, ..., $M_{11} = \dfrac{A_{11} + A_{12}}{2}$ e $M_{12} = \dfrac{A_{12} + A_1}{2}$. Nessa notação, é importante ressaltar que dizer que $M_1 = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$ significa que $x_{M_1} = \dfrac{x_{A_1} + x_{A_2}}{2}$ e $y_{M_1} = \dfrac{y_{A_1} + y_{A_2}}{2}$.

Além disso, sabemos que as coordenadas do baricentro de um triângulo são dadas pela média aritmética das coordenadas dos vértices desse triângulo. Logo,

$$I = \frac{M_1 + M_5 + M_9}{3} = \frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6}$$

$$J = \frac{M_2 + M_6 + M_{10}}{3} = \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6}$$

$$K = \frac{M_3 + M_7 + M_{11}}{3} = \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6}$$

$$L = \frac{M_4 + M_8 + M_{12}}{3} = \frac{A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12} + A_1}{6}$$

.

Dados os pontos A e B, no plano cartesiano, denotamos $|A - B|$ como o comprimento do segmento AB. Assim, o comprimento do segmento IJ é dado por

$$|I - J| = \left|\frac{A_1 + A_2 + A_5 + A_6 + A_9 + A_{10}}{6} - \frac{A_2 + A_3 + A_6 + A_7 + A_{10} + A_{11}}{6}\right|$$

$$|I - J| = \left|\frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6}\right|$$

Por outro lado, o comprimento do segmento KL é dado por

$$|L - K| = \left|\frac{A_4 + A_5 + A_8 + A_9 + A_{12} + A_1}{6} - \frac{A_3 + A_4 + A_7 + A_8 + A_{11} + A_{12}}{6}\right|$$

$$|L - K| = \left|\frac{A_1 - A_3 + A_5 - A_7 + A_9 - A_{11}}{6}\right|.$$

Logo, $|I - J| = |L - K|$, ou seja, os comprimentos dos segmentos IJ e KL são congruentes. De forma análoga, conseguimos mostrar que os comprimentos dos segmentos IL e JK também são congruentes.

Portanto, o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo.

CONCLUSÕES

Concluímos, então, que é válida uma propriedade semelhante para quadriláteros, octógonos e dodecágonos. A partir desse resultado, faremos uma investiagação sobre a validade dessa propriedade para outros polígonos com quantidade de lados múltipla de quatro.

BIBLIOGRAFIA

[1] SANTOS, R.; COMBY, A.; SILVA, B. Uma propriedade curiosa dos octógonos. **Revista do professor de matemática**, n. 99, p. 21-22, 2018.

Aspectos históricos das equações diferenciais na área de química

Faria, Henrique Antonio Mendonça[91]; Capela, Jorge Manuel Vieira[92]; Capela, Marisa Veiga[93]; Chavarette, Fábio Roberto[94]

Resumo: *As equações diferenciais permeiam a química, modelando desde a taxa de reações até o comportamento de fluidos em reatores. Sua história é rica, com marcos como a lei da cinética química de primeira ordem por Wilhelmy em 1850, a equação de Arrhenius em 1889, a equação de Navier-Stokes para fluidos viscoso e a equação de Michaelis-Menten para cinética enzimática em 1913. Atualmente, a modelagem de reatores quími-cos com equações diferenciais parciais caracteriza muitas reações químicas como sistemas complexos caóti-cos, mas determinísticos. Este texto tem como propósito apresentar alguns dos marcos históricos relevantes sobre a aplicação das equações diferenciais na química.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais, história, química.*

INTRODUÇÃO

Embora em enfoques específicos busque-se relacionar e interpretar os fatos históricos sobre as equações diferenciais, a história deste tema está intrinsecamente ligada à história da matemática. Na segunda metade do século XVII, a resolução do problema da área e do problema da tangente sobre curvas quaisquer motivou o desenvolvimento dos métodos infinitesimais. É relevante ressaltar que, cronologicamente, o conceito de função como conhecemos hoje foi introduzido somente após o desenvolvimento do cálculo diferencial por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716). O tratamento do cálculo, que considera a função como uma expressão analítica, objeto central da análise matemática, só foi levado a termo, inicialmente, com Leonhard Euler (1707-1783). No livro *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise infinita), publica-do em 1748, Euler definiu que "Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica..." (RO-QUE, 2012). Posteriormente, Lagrange (1736-1813) apresentou contribuições relevantes para a definição de funções ao relacioná-las com uma fórmula finita, mas que também poderia ser representada por séries de potência, prática usual até então. Lagrange desenvolveu a mecânica

[91]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Química, Araraquara. `henrique.faria@unesp.br`
[92]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Química, Araraquara. `jorge.capela@unesp.br`
[93]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Química, Araraquara. `marisa.capela@unesp.br`
[94]Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Química, Araraquara. `fabio.chavarette@unesp.br`

analítica na qual os fenômenos deviam ser descritos pela análise, isto é, por meio de expressões matemáticas que pudessem representá-los. Para Lagrange, a mecânica era um ramo da análise, assim, os fenômenos começaram a ser compreendidos e explicados pela dedução e resolução de equações diferenciais. Insere-se nesse contexto mais moderno a maioria das aplicações das equações diferenciais na área de química. A partir da mecânica analítica, os fundamentos do cálculo diferencial se consolidaram e a definição moderna de função começou a se estabelecer. Nesse contexto, os estados sucessivos de um sistema poderiam ser conhecidos ao se resolver a equação diferencial relacionada às variáveis envolvidas. Neste texto, ao serem apresentados marcos históricos relevantes das equações diferenciais aplicadas à química, foram utilizados os conceitos atuais de função e da representação de um sistema dinâmico por uma equação diferencial.

MARCOS HISTÓRICOS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAS NA ÁREA DE QUÍMICA

As equações diferenciais estão presentes em diversos campos de estudo na área de química. As aplicações dessas equações tem uma cronologia histórica significativa, especialmente a partir do período em que a com-preensão dos processos químicos possibilitou em maior escala a representação e a análise matemática. A física-matemática se consolidou a partir das obras de Laplace e Lagrange. Embora explicitamente não tenha se caracterizado uma área da química-matemática, muitos fenômenos analiticamente descritos podem ser considerados tanto da física quanto da química, dependendo do enfoque em que é tratado. O exemplo mais marcante dessa superposição entre áreas foi o desenvolvimento da mecânica quântica, que recebeu contribuições de renomados cientistas tanto físicos, químicos quanto matemáticos.

A primeira aplicação das equações diferenciais na área foi a lei da cinética química de primeira ordem. A cinética química moderna pode ser definida como o estudo das transformações de reagentes em produtos. A taxa de reação química é expressa como a mudança na concentração de alguma espécie envolvida ao longo do tempo. O primeiro estudo quantitativo em cinética química foi realizado por Ludwig Wilhelmy (1812–1864) em 1850, que utilizou a polarimetria para investigar a conversão de sacarose catalisada por ácido. Neste estudo, Wilhelmy reconheceu que a taxa de reação (dZ/dt) era proporcional à concentração de sacarose (Z) e de ácido (S), de acordo com a equação diferencial: $\frac{dZ}{dt} = MZS$ cuja solução é do tipo exponencial decrescente: $Z = Ce^{-MSt}$. Onde M é o coeficiente de transformação da sacarose, que está relacionado com a unidade de tempo, ou seja, a constante de velocidade da reação e C é a constante de integração (PTÁČEK et al., 2018). Portanto, essa lei descreve a taxa de uma reação química proporcional à concentração do reagente por meio de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

O estudo sistemático da cinética das reações químicas prosseguiu após os primeiros experimentos de Wilhelmy. Embora, desde o início tenha-se percebido que as taxas de reação apresentavam uma dependência apreciável da temperatura, os estudos cinéticos foram direcionados para quantificar o efeito das concentrações dos reagentes. Em 1889, Svante Arrhenius (1859-1927), por meio da análise de conjuntos de dados da década de 1880, mostrou que a temperatura e a constante de velocidade poderiam ser correlacionadas por uma única equação (LOGAN, 1982). Arrhenius propôs que a velocidade de uma reação química depende da energia de ativação e da temperatura, o que pode ser descrito matematicamente por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem: $\dfrac{dlnk}{dt} = \dfrac{E}{RT^2}$ cuja solução por integração resulta na expressão para a constante de velocidade $k = Ae^{\frac{-E}{RT}}$. Sendo A um fator dependente da área de contato, E a Energia de ativação (J/mol ou cal/mol), R a constante dos gases (8,314 J/mol.K) e T a temperatura absoluta em kelvin. A equação de Arrhenius permite calcular a variação da constante de velocidade de uma reação química dependente da temperatura.

Ela é considerada uma das mais importantes na físico-química.

A teoria cinética da matéria, proposta no início do século XX, descreve o comportamento molecular dos gases e líquidos por equações diferenciais, destacando-se como mais relevante a equação diferencial de Navier-Stokes para fluxos de fluidos viscosos (BRUSH, 2004). Em reatores químicos nos quais o transporte de massa e calor é significativo, as equações de Navier-Stokes podem ser usadas para modelar o fluxo de fluidos, a dispersão de reagentes, produtos, e a transferência de calor. A primeira proposta da equação de Navier-Stokes foi introduzida em 1822 por Claude Navier (1785-1836). Até então, as equações de movimento eram limitadas a fluidos perfeitos, seguindo a equação de Euler para fluidos não viscosos de 1755. O envolvimento de George Stokes (1819-1903) com a equação começou em 1845, quando da publicação da obra *On the theories of the internal friction of fluids in motion* (BISTAFA, 2023). Embora muitos investigadores tenham corro-borado com o entendimento desta equação, Stokes empreendeu esforços significativos para confrontar a teoria com experimentos, podendo esta ser a razão pela qual esteja associado a Navier.

As equações de Navier-Stokes foram classificadas como um dos sete problemas abertos do milênio pelo Instituto Clay de Matemática (Navier-Stokes, 2024). A pergunta a ser respondida é: em um espaço tridimensional, existe um campo de velocidade inicial, um vetor de velocidade e um campo escalar de pressão, em que ambos sejam suaves e globalmente definidos, que resolvam as equações de Navier-Stokes? Apesar da ampla gama de aplicações em diversas áreas, o problema de existência e suavidade das equações de Navier-Stokes ainda não foi resolvido. A equação de Navier-Stokes é uma equação diferencial parcial não linear que governa o movimento de fluidos viscosos reais da forma: $\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u\right) = \rho g - \nabla p + \mu \nabla^2 u$. O termo do lado esquerdo da equação representa a aceleração da partícula de um fluido de velocidade u e contém o termo não linear. O lado direito da igualdade representa a força externa, em que o primeiro termo se refere à força atuante no fluido, o segundo termo é devido à pressão e o terceiro se refere à força viscosa. Quanto as variáveis e constantes, p é a pressão, u é a velocidade vetorial, ρ é a densidade do fluido e μ é a viscosidade dinâmica. A equação conforme apresentada, é válida apenas para fluxos laminares. Esta é uma restrição séria porque a maioria dos fluxos de interesse são geralmente turbulentos. A busca pelas soluções da equação de Navier-Stokes favoreceu o desenvolvimento de métodos matemáticos que permitiram a compreensão mais profunda dos fluxos laminares, e impulsionaram o desenvolvimento de soluções numéricas para fluxos turbulentos.

Em uma publicação de 1913 na revista Biochemistry Zeitung, Leonor Michaelis (1875-1949) e Maud Menten (1879-1960) apresentaram a equação cinética de Michaelis-Menten. Os estudos mostraram que um complexo sacarose-enzima pode decair em enzimas livres, glicose e frutose, levando ao previsão de que a taxa de inversão deve ser proporcional à concentração predominante do complexo (JOHNSON e GOODY, 2011). A velocidade de reação v depende das taxas temporais de concentração da sacarose S e da frutose F e é proporcional ao complexo enzima-sacarose ES: $v = \frac{dF}{dt} = \frac{dS}{dt} = cES$. Esta equação diferencial ordinária de primeira ordem é fundamental para entender a cinética das reações enzimáticas ficou conhecida com lei de Michaelis-Menten.

Ao longo do século XX, a modelagem de reatores químicos tornou-se uma área importante de pesquisa e aplicações. Equações diferenciais parciais são frequentemente usadas para descrever a distribuição de concentração de massa em reatores químicos. Nas reações químicas reversíveis e autocatalíticos há evidências experimentais da presença de comportamento caótico. Essas reações são governadas por equações diferenciais não lineares e as evidências de características deterministas foram consolidadas a partir dos anos de 1980 (VIDAL e PACAULT, 1981).

CONCLUSÕES

Os marcos históricos relevantes apresentados nesta breve proposta tem como objetivo ampliar a discussão sobre a aplicação de equações diferenciais na área de química. Evidentemente, o tema deverá ser revisitado e os próximos estudos poderão elucidar muitos aspectos interdisciplinares entre a matemática e a química. A partir da segunda metade do século XX, a dinâmica molecular emergiu como uma técnica de simulação computacional. Desde então, equações diferenciais têm sido amplamente utilizadas para modelar uma variedade de fenômenos químicos e entender melhor o comportamento de sistemas químicos complexos. O que revela a relevância deste tema para ambas as áreas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bistafa.S.R.; **200 Years of the Navier-Stokes Equation**. arXiv e-prints, p. arXiv: 2401.13669, 2023.

[2] Brish, S. G. ;**History of the Kinetic Theory of Gases**. Istituto della Enciclopedia Italiana, v. 1, 2004.

[3] Logan, S. R. ;**The origin and status of the Arrhenius equation**. Journal of Chemical Education, v. 59, n. 4, p. 279, 1982.

[4] Navier-Stokes. Millennium Prize Problems: Navier–Stokes Equation, claymath.org, Clay, March 27, 2017. Disponível em: https://www.claymath.org/millennium/navier-stokes-equation/. Acesso em: 27/03/2024.

[5] Johnson, K. A. Goody, R.S. **The original Michaelis constant: translation of the 1913 Michaelis–Menten paper**. Biochemistry, v. 50, n. 39, p. 8264-8269, 2011.

[6] Ptáčaev, P.; Opravil, T.; Šoukal, F. **A Brief Introduction to the History of Chemical Kinetics.** InTech; 2018. doi.org/10.5772/intechopen.78704.

[7] Roque, T. ; **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512p.

[8] Vidal, C., Pacault, A.,;**Nonlinear Phenomena in Chemical Dynamics**. Proceedings of an International Conference, Bordeaux, France, September 7–11, 1981.

GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino de parábolas na educação matemática

Silva, Islane[95]; Silva, Amanda[96]; Soares, David[97]

Resumo: *Neste estudo, apresentamos uma sugestão de atividade que visa facilitar o ensino de funções quadráticas de forma dinâmica e atraente para os estudantes do primeiro ano do ensino médio. Desta maneira, exploraremos o software GeoGebra como ferramenta de apoio para o ensino de parábolas.*

Palavras-chave: *Parábolas, função quadrática, geogebra.*

INTRODUÇÃO

No presente artigo, propomos o software GeoGebra como uma ferramenta de apoio essencial no ensino de funções quadráticas para estudantes do primeiro ano do ensino médio. Esta proposta surge da constatação da predominância de métodos tradicionais de ensino, os quais frequentemente carecem de atratividade devido a exercícios matemáticos que não conseguem despertar o interesse dos estudantes nos conteúdos matemáticos. A abstração dos conceitos da função quadrática no Ensino Tradicional, as dificuldades dos estudantes de visualizarem esses conteúdos devido as abordagens tradicionalistas que se utilizam de recursos estáticos, são exemplos da necessidade de métodos de ensino que são eficazes e atrativos.

Este estudo apresenta uma sugestão de atividade interativa a partir do GeoGebra que tem o potencial de fazer o estudante compreender o conteúdo de forma dinâmica. Por esta razão, evidenciaremos o GeoGebra como um software que pode facilitar o entendimento dos estudantes para o ensino de parábolas, essa abordagem tecnológica centrada no aluno, possibilita o aprendizado autônomo e colaborativo.

[95]Graduanda pelo Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Pará. islane.silva@castanhal.ufpa.br
[96]Graduanda pelo Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Pará. amandacp995@gmail.com
[97]Graduando pelo Curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal do Pará. davidgsoares2050@gmail.com

REFERENCIAL TEÓRICO

As TDIC nas salas de aula surgem como uma tendência para melhorar o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, a inserção de softwares dinâmicos podem possibilitar um aprendizado prático e eficiente. Essa tendência pode ser observada por meio de Fonseca e Barrére (2013, p. 2) que destacam que “nestes últimos anos, a utilização das Tecnologias Digitais está cada vez mais presente na vida dos alunos e dos professores, sendo indispensável para uso na educação como apoio didático no espaço escolar”. Ademais, Morello (2022) argumenta que a integração das TDIC nas atividades curriculares do ensino médio pode trazer benefícios significativos para a aprendizagem de conteúdos abstratos. Essa integração não apenas redefine os espaços de ensino, mas também promove uma abordagem educacional dinâmica, na qual os métodos tradicionais são auxiliados pela utilização das TDIC.

Castro (2016) destaca que as TDIC são fundamentais no ensino de Matemática, ampliando as abordagens além das tecnologias tradicionais (lousa, giz, canetões, lápis e papel), proporcionando novas formas de com-preensão de conteúdos. As limitações das tecnologias tradicionais promovem um ensino estático e pouco atra-ente aos estudantes, devido a isso, não promovem um estudo dinâmico das parábolas, desta forma os estudantes não conseguem interagir com as variáveis da função do segundo grau. Em contrapartida a esse método tradicional, softwares de ensino como o GeoGebra com sua interface interativa e dinâmica, possibilitam a interação necessária para fazer com que os estudantes sejam atraídos, em virtude disso, faz com que o aprendizado seja atraente.

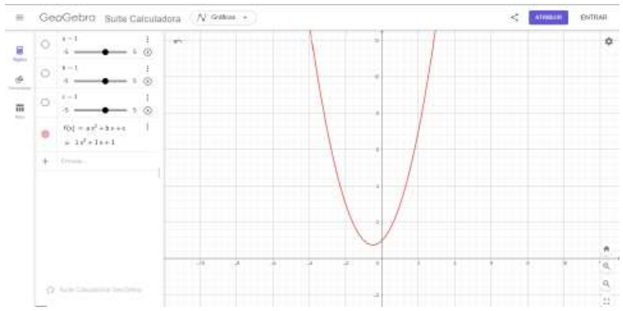
Souza e Miranda (2022) aplicaram e comprovaram que o software GeoGebra no ensino de funções quadrá-ticas possibilitou a compreensão e absorção desse conteúdo. Assim como Sousa (2014, p. 1), “chegou a um parecer de que o uso do GeoGebra ajuda a compreender (...) o conceito de função quadrática diante dos desafios desencadeados pelo processo de busca e de descoberta do novo, do prático e do tecnológico”. Desta forma, podemos perceber o potencial das TDIC no ensino desse conteúdo e como pode facilitar a aprendizagem nos estudantes.

METODOLOGIA

A metodologia proposta visa proporcionar prática e interativa para explorar as propriedades da parábola por meio do GeoGebra. Apresentaremos uma sugestão de atividade que será dividida em quatro etapas. Utilizaremos o controle deslizante do GeoGebra e seu recurso dinâmico controle deslizante como ferramenta para manobrar e visualizar vários aspectos do sistema de funções quadráticas.

Com o controle deslizante, é possível ajustar os coeficientes da função quadrática $y = ax^2+bx+c$, em que, a, b e c são constantes que influenciam a forma da parábola. Para inserir o controle deslizante basta inserir na barra de entrada do GeoGebra a função quadrática $(y = ax^2 + bx + c)$, após realizar esse procedimento, resultará na figura abaixo.

Fig. 27: Controle deslizante e a função quadrática



Fonte: Software GeoGebra

1. **Introdução teórica sobre a parábola**

   O primeiro passo consiste em uma introdução teórica sobre a parábola, incluindo a forma geral da equação quadrática $y = ax^2 + bx + c$ e suas características fundamentais, como vértice, diretriz e foco.

2. **Demonstração no GeoGebra**

   Na segunda etapa, o professor demonstrará o uso do controle deslizante do GeoGebra para variar os valores dos coeficientes da equação quadrática e como as mudanças afetam a posição, orientação e forma da pará-bola. Os alunos serão convidados a variar os valores dos coeficientes, por sua vez, e observar as suas parábolas correspondentes.

3. **Atividades de Variação e Análise da Parábola no GeoGebra**

   Os alunos receberão folhas de atividades com perguntas e instruções para realizar uma exploração guiada das propriedades das funções do segundo grau usando o GeoGebra e seu controle deslizante. Eles serão incentivados a realizar uma série de tarefas, como identificar o vértice, a diretriz e o foco da parábola, variar os coeficientes da equação quadrática e explorar a relação entre os coeficientes e a posição da parábola no plano cartesiano.

4. **Discussão em Grupo**

   Após a finalização das atividades práticas, os alunos devem ser convidados a uma discussão em grupo para debaterem suas descobertas e reflexões a respeito das atividades. Neste sentido, o professor estimulará os alunos a exporem suas observações e a estabelecerem as relações entre os conceitos discutidos teoricamente e as atividades realizadas por meio da função controle deslizante do GeoGebra.

DISCUSSÃO

O controle deslizante do GeoGebra pode ser utilizado para ensinar funções quadráticas, permitindo aos professores demonstrarem como os coeficientes a, b e c afetam a forma do gráfico parabólico. Os alunos podem alterar os valores desses coeficientes da função quadrática e observar instantaneamente no plano cartesiano. Essa atividade proporciona uma oportunidade para os estudantes explorarem a matemática e compreenderem as propriedades das funções quadráticas de maneira dinâmica, sem as limitações das tecnologias estáticas dos métodos tradicionais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio dessa sugestão de atividade, podemos perceber a interatividade que softwares dinâmicos como o GeoGebra promovem no ensino de conteúdos matemáticos. Esse software pode ser utilizado como ferramenta para auxiliar o professor e facilitar o entendimento dos estudos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Castro, A. L.; **A formação de professores de matemática para uso das tecnologias digitais e o currículo da era digital**. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 2016.

[2] Fonseca. E. A. A., Barreré, E.; **Possibilidades e Desafios na Utilização e Seleção de TDIC para o Ensino de Matemática em Escolas Públicas**. ULBRA. Canoas, RS, 2013.

[3] Morello, M.; **O GeoGebra como ferramenta tecnológica para ensinar função quadrática na 1ª série do Ensino Médio**. Editora Dialética, 2022.

[4] Sousa, R.M.; **O uso do geogebra no ensino de função quadrática**.Tese de Doutorado. Universidade Federal do Oeste do Pará.2014.

[5] Souza, K.,Miranda, D.; **A função do segundo grau sob a perspectiva do software GeoGebra**. Anais do XIII Congresso Nacional de Educação, Maceió, AL, 2022.

Explorando geometria no ar: uma abordagem divertida com pipas ao explorar formas e triângulos para o ensino da geometria no ensino fundamental

Jamile, Fernandes[98]; e Braga, Roberta[99]

Resumo: *Este artigo descreve uma abordagem envolvente e prática para o ensino de conceitos geométricos de triângulos e outras formas, para alunos do ensino fundamental. Através da criação e decoração de pipas com formas geométricas, os alunos estimulamos a compreensão das características e propriedades das formas e triângulos, mas também como aplicá-las de maneira lúdica e interativa em uma atividade que, possivelmente, faz parte de sua vida cotidiana nas brincadeiras que permeiam sua infância, mostrando assim como a Matemática pode estar presente em vários momentos cortineiros. O projeto foi pensado e pré-elaborado no Laboratório Experimental de Modelagem Matemática - LEMM, Campus Universitário de Castanhal, da Universidade Federal do Pará - UFPA.*

Palavras-chave: *Conceitos geométricos, lúdico, matemática cotidiana.*

INTRODUÇÃO

A Geometria é uma parte fundamental do currículo da Matemática, mas pode ser desafiadora para alguns estudantes, especialmente os do ensino fundamental, pois visualizar e compreender as fórmulas de áreas, perímetros, volumes entre outros conceitos dos sólidos geométricos é algo novo e se torna dificultoso. Além disso, no lado docente, instigar os alunos a esse desejo estudantil por uma nova disciplina, pode ser uma provocadora missão, e com o uso dessa ferramenta lúdica se torna uma descoberta inovadora para o ensino-aprendizagem, como é mencionado por Aranão (2020).

> É também tarefa do educador: promover o trabalho em grupo, utilizar-se de jogos como instrumento de trabalho, trabalhar com a ideia de medida mais do que com contagem, desafiar o pensamento da criança provocando desequilíbrios e propiciar a descoberta e a invenção, não a memorização mecânica. (ARANÃO, 2020, p.24).

[98]UFPA, jamillyf640@gmail.com
[99]UFPA, robertabraga@ufpa.br

Então, a proposta central dessa abordagem consistiu na criação de pipas, conhecidas também por papagaios, personalizá-las e transformá-las de um simples objeto para uma experiência educativa dinâmica. Pois, segundo a ideia de Borin (2007, p.89), “O uso dos jogos nas aulas de matemática é um importante fator que contribui para diminuir os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la”. Então, ao projetar e decorar suas próprias pipas, os estudantes são estimulados a aplicar conceitos geométricos de forma prática, proporcionando-lhes uma compreensão mais significativa. E durante o processo de criação, eles serão desafiados a identificar e utilizar diferentes formas geométricas na construção de suas pipas, explorando, por exemplo, a aplicação de diferentes triângulos triângulos, visualizar e extrair suas medidas, áreas e perímetros. Além de estimular o pensamento coletivo acerca daquele novo desafio, como disserta Silvana (2022, p.6) em, “A importância do seu uso como brincadeira enriquece a aula, pois renova relações sociais, culturais possibilitando troca de experiências”. Assim, esta abordagem prática não apenas fortalece a compreensão dos conceitos teóricos, mas também incentiva a criatividade e o pensamento crítico dos alunos.

METODOLOGIA

Trata-se de uma pesquisa de abordagem qualitativa, descritiva e explicativa a partir de uma pesquisa de campo com estudantes do 7^{O} ano do Ensino Fundamental, cuja pesquisa de campo considerou a aplicação prática de uma atividade envolvendo produção de pipas e discussão de conceitos geométricos, com observações em diário de bordo. Para a abordagem prática, utilizamos papel de pipa e sacolas simples de supermercado, tesouras, linha de pipa, régua, lápis e canetas coloridas. A sala foi dividida em grupos de 3 alunos, totalizando 12, com a ajuda do professor vigente e um assistente pessoal, e antes de iniciar o experimento, foi explorado conceitos-chave preliminares de geometria, como ângulos, tipos de triângulos (equiláteros, isósceles e escalenos), quadrados, retângulos e o mais usado, o losango, entre outras bases da geometria.

Em seguida, foram distribuídos os materiais e feitas as orientações necessárias. Foi solicitado aos alunos que escolhessem os tipos de triângulos ou outra forma geométrica para incorporar em suas pipas, podendo usar modelos pré-impressos ou criar desenhos à mão. Feitas as escolhas, começaram as montagens, e após terem tirado as medidas de seus moldes, eles anotaram e com as fórmulas já concedidas anteriormente, aplicaram e extraíram as áreas e perímetro das figuras, isoladas e do projeto ao todo montado. Durante o processo de criação, os alunos discutiram e também aprenderam sobre as propriedades das formas geométricas presentes em suas pipas, incluindo ângulos, lados e vértices, encadeamento exibido nas imagens 1 e 2 abaixo. Os resultados e o envolvimento dos alunos foram registrados, juntamente com suas percepções sobre o aprendizado de geometria.

Imagens 1 e 2: Produções das pipas e o estudo de suas formas geométricas.

Fonte: Fonte: Pesquisa de campo, 2024.

Ao final da experiência teórico e prática em sala, nos direcionamos para uma área externa, adequada para a soltura das pipas. No lançamento das pipas, eles observaram e conseguiram identificar as formas geométricas presentes nas pipas enquanto elas voavam. Analisando também, a relação da teoria e prática dos conceitos ali presentes.

CONCLUSÕES

A utilização de pipas personalizadas como ferramenta de ensino da geometria proporcionou um ambiente de aprendizagem interativo e criativo. A conexão entre teoria e prática tornou o aprendizado mais significativo e duradouro. Portanto, este estudo veio destacar o uso de pipas com formas geométricas, especialmente triângulos, para ensinar geometria de maneira envolvente e prática no ensino fundamental. A abordagem lúdica e interativa permitiu que eles explorassem e compreendessem melhor as características das formas geométricas enquanto se divertiam, fazendo assim, com que os educadores tradicionais pudessem considerar ou até mesmo aplicar essa metodologia como uma maneira eficaz de tornar o ensino de geometria mais cativante e significativo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aranão, I. V. D.; **Matemática através de brincadeiras e jogos (A).** Papirus Editora, 2020.

[2] Borin; **A utilização de materiais pedagógicos e jogos educacionais na disciplina de matemática.** p.89, 2007. Disponível em `www.brasilescola.uol.com.br`. Acesso em 12 de janeiro de 2022.

[3] Silva, J.; **O uso dos jogos no ensino da matemática.** Trabalho de Conclusão de Curso, Brasil, 2022.

Explorando potencialidades

Observatórios astronômicos como instrumento fomentador na divulgação da matemática

Lombardi, João Pedro[100]

Resumo: *Este trabalho, de cunho qualitativo, se baseia na investigação do potencial pedagógico que os Observatórios Astronômicos podem oferecer para o ensino de conceitos científicos que vão além da área da Astronomia, abrangendo também a Matemática. Para isso investigamos as mais diversas atividades desenvolvidas pelo Observatório Didático de Astronomia "Lionel José Andriatto". Os atendimentos escolares e os atendimentos públicos são uma das principais atividades realizadas pelo Observatório, e se constituem de apresentações/exposições realizadas para abordar conceitos diversos, utilizando-se diversos equipamentos auxiliares, que criam momentos educacionais imersivos. Com tal análise, referente ao número de pessoas que foram atendidas e/ou participaram das atividades desenvolvidas pelo Observatório, acompanhada da análise qualitativa das atividades desenvolvidas, identificamos uma influência positiva desse espaço não formal de ensino, contribuindo para uma iminente aproximação entre a Astronomia e a Matemática. Acreditamos que esses elementos evidenciam o papel colaborativo dos Observatórios na popularização, disseminação e divulgação da Matemática.*

Palavras-chave: *Educação em astronomia, divulgação matemática, ensino não formal, observatório astronômico.*

INTRODUÇÃO

A matemática tem desempenhado um papel crucial ao longo da história da humanidade, desde os primórdios, impulsionando a evolução da sociedade por meio do progresso científico e tecnológico, seja na criação e confecção de objetos complexos ou na formulação de raciocínios lógicos, sua influência é inegável. Entretanto, a atual conjuntura do ensino da matemática tem perdido prestígio devido à ênfase excessiva no rigor algébrico e no formalismo, ambos abordados de maneira tradicional, onde "o aluno apenas faz cópias dos conteúdos do quadro e tenta resolver exercícios que não passam de uma cópia daquilo que o professor resolveu no quadro", abstraindo o educando de uma formação crítica e democrática (Andrade, 2013, p. 16).

Diante da situação supracitada, entende-se que o processo de ensino e aprendizagem da matemática deve ser reorganizado de maneira a apreciar novas fontes de conhecimento e informação, adotando abordagens mais flexíveis, que incentivem as pessoas a se conectarem novamente com a matemática. Complementando, Gohn (2006) ressalta a importância da educação como promotora

[100]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(UNESP). joao.bertonha@unesp.br

de mecanismos sociais que possibilitam o acesso pleno à cultura. Partimos do pressuposto de que o educador matemático, na qualidade de indivíduo crítico, deve possuir a capacidade não apenas de compreender e interpretar o mundo ao seu redor, mas também de engajar-se em discussões acadêmicas. Nesse sentido, destaca-se um potencial significativo nos tópicos de Astronomia, oferecendo, segundo a pesquisa realizada por Langhi e Nardi (2015) um elevado caráter interdisciplinar, já que o mesmo destaca-se por sua versatilidade em interagir com praticamente todas as áreas do conhecimento.

Ainda segundo Langhi e Nardi (2015), a Astronomia, apesar de ter grande parte de seu conteúdo associado integralmente ao Ensino Fundamental, se sobressai empregando-se como um chamariz do ensino e da divulgação científica, instigando a curiosidade e o interesse dos alunos pela aprendizagem, independentemente das estratégias e metodologias de ensino adotadas. O objetivo deste trabalho é possibilitar um diálogo sobre os possíveis impactos que os conceitos de Astronomias abordados em Observatórios e Planetários podem ter a respeito das formas de ensino e aprendizagem dentro do contexto da Matemática.

Educação nos Diversos Ambientes de Aprendizagem

Não se limitando apenas aos ambientes formais de educação, a absorção de conhecimentos astronômicos e de outras disciplinas científicas expande-se para ambientes que vão além do limite escolar. Nesse espectro de possibilidades, alguns termos, que segundo Marandino (2004) estão em evidência, se apresentam como necessários para enriquecer o saber, dentre eles salienta-se a relevância da educação informal e da educação não formal. Entretanto, em relação aos objetivos deste trabalho, vamos nos concentrar na educação não formal, que segundo Langhi e Nardi (2009, p. 3) se apresenta com um caráter mais coletivo que "envolve práticas educativas fora do ambiente escolar, sem a obrigatoriedade legislativa, nas quais o indivíduo experimenta a liberdade de escolher métodos e conteúdos de aprendizagem". Planetários, observatórios, clubes de Astronomia, museus, cursos livres e feiras estão entre os vários locais que proporcionam um ambiente propício ao conhecimento e flexível a preferência individual dos participantes.

Difusão Científica em Observatórios Astronômicos e Planetário

De fato, como mostra Langhi (2009 apud Langhi; Scalvi, 2013, p.27), dos 95 observatórios astronômicos do país, que se caracterizam como uma atividade organizada fora do sistema formal de educação, "quase todos os que são públicos e os ligados a universidades oferecem oportunidades à aprendizagem em astronomia para professores e ao público, abrindo suas dependências para visitações". Há diversas razões para considerar os observatórios como uma ferramenta poderosa para enriquecer o ensino da Matemática por meio da Astronomia, especialmente devido ao seu grande potencial de viabilizar atividades com características interdisciplinares e multidisciplinares (Freitas, p. 40). Neste contexto, para ilustrar os princípios discutidos até o momento, apresentamos o caso específico de um observatório astronômico que busca aplicar os conceitos do modelo de aproximações CIAMES que, de acordo com Langhi e Scalvi (2013, p. 32), se delimita a um modelo "que propõe possíveis articulações entre as comunidades científica, amadora e escolar".

EXPLORANDO O OBSERVATÓRIO DIDÁTICO DE BAURU/SP

A partir de agosto de 2016, o Observatório passou a ser coordenado pelo professor Dr. Rodolfo Langhi do Departamento de Física e Meteorologia e do Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita

Filho"(UNESP), campus de Bauru/SP. Durante esse período, em 2016, registramos o atendimento de 519 alunos de escolas e 2.061 atendimentos ao público em geral. Esses números, ao longo dos anos, apresentaram um crescimento notável, especialmente em 2023, quando alcançamos a marca de 8.547 alunos atendidos e 11.144 atendimentos ao público. Uma das principais iniciativas do Observatório é a realização de oficinas infantis, que proporcionam às crianças a oportunidade de se envolverem em atividades práticas e divertidas, como a construção de sistemas em escala de tamanho e distância, construção de astrolábios e teodolitos, lançamentos de foguetes para o estudo do movimento. Além disso, o Observatório também oferece cursos de formação, para integrar o ensino da astronomia às práticas pedagógicas, e fornece assistência aos participantes da Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA), Olimpíada Brasileira de Física (OBF) e Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM).

Fig. 28: Atividades desenvolvidas pelo Observatório Didático

A integração de atividades Astronômicas e Matemáticas, impulsionadas pelos Observatórios Astronômicos no Brasil apresentam um grande potencial de ampliar significativamente a popularização, disseminação e divulgação da Matemática. Ao promover uma abordagem prática e imersiva de forma lúdica, essas iniciativas não apenas despertam o interesse das pessoas pela Matemática, mas também capacitam os educadores com ferramentas e conhecimentos que enriquecem suas práticas de ensino.

BIBLIOGRAFIA

[1] Andrade C.; **O ensino da matemática para o cotidiano**. 2013.

[2] Gohn, M.; **Educação não-formal, participação da sociedade civil e estruturas colegiadas nas escolas**. Ensaio: avaliação e políticas públicas em educação, v. 14, n. 50, p. 27-38, 2006.

[3] Langhi, R.; NardiI, R.; **Ensino da astronomia no Brasil: educação formal, informal, não formal e divulgação científica.** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, p. 4402-4412, 2009.

[4] anghi, R.; Nardi, R.; **Justificativas para o ensino de Astronomia: o que dizem os pesquisadores brasileiros?.** Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, [S. l.], v. 14, n. 3, p. 041–059, 2015.

[5] Langhi, R.; Scalvi, R.; **Aproximações entre as comunidades científica, amadora e escolar: estudando as potencialidades de observatórios astronômicos para a educação em astronomia**. 2013.

[6] Marandino M. et al.; **A educação não formal e a divulgação científica: o que pensa quem faz.** Atas do IV Encontro Nacional de Pesquisa em Ensino de Ciências, p. 37-45, 2004.

Ansiedade matemática: caracterização e estratégias de prevenção e superação

João do Santos Carmo[101]

Resumo: *A ansiedade matemática (AM) refere-se ao desenvolvimento de padrões de esquiva, fuga e reações emocionais negativas à matemática, com evidência de raízes em experiências frustrantes de tentativas de aprendizado da matemática. Tipicamente estudantes que apresentam ansiedade em contextos de ensino-aprendizagem da matemática (seja na ensino básico ou no ensino superior) tendem a demonstrar baixa autoestima, baixa autoeficácia e busca por formações que, supostamente, os deixariam distante do uso da matemática em contextos profissionais ou cotidianos. Na presente palestra, apresentarei uma definição operacional de AM, demonstrando exemplos de reações cognitivas, fisiológicas e comportamentais típicas, bem como apresentarei os parâmetros definidores de AM. Em seguida, discorrerei sobre importantes tópicos de investigação de AM, como: diferenças de gênero; relações entre AM e inteligência, ansiedade geral; marcadores biológicos, ansiedade a testes; estilos de interação professor-aluno; controle aversivo no ensino de matemática; AM em professores que ensinam matemática. Após essas caracterizações, compartilharei o que temos realizado no Laboratório de Estudos Aplicados à Aprendizagem e Cognição (LEAAC/UFSCar) acerca de estratégias de prevenção e redução de AM. Para tanto, apresentarei alguns instrumentos, como a Escala de Ansiedade Matemática (AM), que auxiliam na identificação de riscos para AM. Finalizarei com alguns dados de intervenção do Programa de Auxílio a Estudantes com Ansiedade Matemática na sua atual versão. Esse programa, cuja abordagem é caracterizada pelo modelo single case study tem apresentado resultados positivos e indicam a possibilidade de aplicação exitosa para populações de estudantes do ensino fundamental e médio, e, potencialmente, para estudos dos curso STEM.*

Palavras-chave: *Ansiedade matemática. Reversão de ansiedade matemática. Ações preventivas e remediativas.*

[101]Universidade Federal de São Carlos. Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia sobre Comportamento, Cognição e Ensino (INCT-ECCE).

Elementos do cálculo diferencial e o ensino básico

Quais ferramentas devem ser enfatizadas para o êxito na transição para o ensino superior

Figueirêdo, Ester Gomes[102]; Pequeno, Pedro Igor[103] e Barbosa, Jonathas Jerônimo[104]

Resumo: *Alguns dos desafios enfrentados em cursos de cálculo diferencial e integral (CDI) estão nas novas ferramentas que serão apresentadas ao aluno do ensino básico (limite, continuidade, derivada e integral) mas também na matemática utilizada para lidar com essas ferramentas. Com o intuito de aproximar as abordagens do ensino superior ao ensino básico o presente trabalho tem por objetivo enfatizar as ferramentas do ensino básico que são mais utilizadas no ensino de cálculo diferencial e integral que é disciplina obrigatória para cursos na área de exatas e alguns em áreas afins e historicamente apresenta números maiores do que a média no item retenção de alunos. Pretende-se compartilhar a experiência obtida dos resultados de minicursos oferecidos e de disciplinas ministradas com a metodologia de utilizar problemas e exercícios de livros de cálculo.*

Palavras-chave: *Cálculo, ensino básico, transição do ensino.*

INTRODUÇÃO

Ao se falar da história da matemática é possível destacar grandes feitos em diversas áreas desde os anos mais longínquos até a atualidade. De acordo com Eves (2011), a invenção do cálculo atribuída a Newton e Leibniz, foi a realização mais notável do século XVII que, ainda hoje, permeia a sociedade. Devido a sua importância, foi implementada a disciplina de Cálculo em grande parte das faculdades de exatas, entretanto, essa matéria apresenta um grande número de retidos.

É comum no campo de exatas, que os alunos possam apresentar uma certa dificuldade na transição do ensino básico para o ensino superior. Elyote e Marão (2023) relatam que apesar da referente disciplina abordar conteúdos fundamentais, ainda apresenta resultados insatisfatórios. Respaldando essa questão, Azevedo e Faria (2006) alegam que, ao entrar na universidade, o discente pode deparar-se com insucesso acadêmico e dificuldades de adaptação, podendo ser, a diferença de abordagens entre os currículos da educação básica e do ensino superior, um possível agravante para essa problemática.

Essa transição conturbada pode ser justificada pelas deficiências educacionais em conteúdos matemáticos próprios do ensino fundamental e médio, segundo Figueirêdo *et al* (2023), algumas

[102]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. Edital Interconecta 02/2024
[103]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. Edital Interconecta 02/2024
[104]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. Edital Interconecta 02/2024

ferramentas do ensino básico são de suma importância para a resolução de questões do ensino superior, como por exemplo: operações elementares e suas propriedades, produtos notáveis, fatoração polinomial, funções, dentre outras. Com base nisso, o presente trabalho tem como objetivo identificar, trabalhar e enfatizar tais ferramentas e apresentá-las desentrelaçadamente aos elementos próprios do cálculo com intuito de diminuir as dificuldades de algorítmico-manipulativa para que esta não seja um empecilho na conceituação nem na aplicação dos novos conhecimentos.visualização e facilitar uma intervenção didática posterior.

METODOLOGIA

Esta é uma pesquisa qualitativa do tipo pesquisa-ação realizada em seminários ministrados em encontros locais e em uma turma de pré-cálculo. A ação realizada nessas situações foi propor exercícios envolvendo limites de funções mas conduzindo a sua resolução de forma a não lidar diretamente com os conceitos de limites, mas sim enfatizando na manipulação da lei da função envolvida os aspectos algébricos a serem utilizados.

Foram escolhidas questões que envolvessem diferentes ferramentas do ensino básico tais como, operações algébricas, fatoração, produtos notáveis, multiplicação pelo conjugado (multiplicação por "1") dentre outras.

Ao passo que a resolução da questão avançava o ministrante explicava cada passagem trazendo ao quadro a teoria ou mais exemplos das ferramentas envolvidas.

Um exemplo da abordagem é a resolução da seguinte questão:

1. Seja $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$. Verifique se exite o limite para

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \tag{11}$$

Demonstração: [Solução] Para verificar se o limite existe ou não, primeiro o aluno é conduzido a pensar sobre o conjunto domínio da função envolvida. A indeterminação que ocorre é discutida e explicada e assim, a manipulação algébrica na expressão da lei da função é proposta.

Para manipular a lei da função é necessário perceber que o numerador $x^2 - 1$ pode ser escrito como uma diferença de dois quadrados, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, sendo esse procedimento realizado duas vezes obtendo, dessa forma:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(x + 1)}{(\sqrt{x} - 1)} \tag{12}$$

na segunda operação há a oportunidade de levantar algumas propriedades da radiciação e assim, obter $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 1)(x + 1)$. Aplicando os limites, tem-se:

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 1)(x + 1) = (2).(2) = 4 \tag{13}$$

e portanto, o limite existe. □

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Em sala de aula as questões resolvidas levam a muitas situações e discussões enriquecedoras. Desde elementos relacionados a operações elementares até tópicos mais específicos como funções que diferem em apenas um elemento do conjunto domínio.

Em questões como no exemplo (11), é comum inicialmente substituir o valor de x pelo valor de tendência do limite. E, claro, que essa substituição de valores que não pertencem ao domínio da função são discutidas e apresentadas as justificativas. São quando surgem as primeiras indeterminações. A do exemplo em questão é a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Dessa forma, para contornar a situação a aplicação de uma ferramenta do ensino básico - produtos notáveis - é requerida e aplicada de acordo com a equação (12). Para a resolução da questão, foram necessários conhecimentos prévios a cerca de produtos notáveis, radiciação e manipulações algébricas todos estes discutidos e revisitados com o público durante a resolução.

Um ponto de alta relevância é a discussão sobre igualdade algébrica de expressões e a igualdade de funções como encontradas em (11) e (13). Algebricamente elas são iguais, pois todos os passos e manipulações são tratados com o sinal de igualdade e portanto o limite dessas duas expressões tem o mesmo valor. Em termos de função (domínio, contra-domínio e lei) elas são deferentes pois seus conjuntos domínios não possuem os mesmos elementos.

A BNCC norteia o uso de conteúdos do ensino básico, e quando trata-se da matemática, fica evidente ao analisar mais questões que o uso de tais ferramentas em Cálculo são indispensáveis, ferramentas essas como: Fração, Potenciação, Radiciação, Funções e Modelos, Geometria Analítica, entre outros.

CONCLUSÕES

O Cálculo Diferencial e Integral é uma grande realização e uma ferramenta legada por muitas mentes brilhantes as quais são representadas por Newton e Leibniz. O CDI está presente nos mais diversos currículos dos cursos de exatas e é responsável por embasar a teoria em diversas aplicações. No entanto, quando o assunto é o processo de ensino e aprendizagem os índices de retenção nesta disciplina falam por si só.

O foco deste trabalho foi ressaltar algumas das ferramentas do ensino básico que não podem ser desprezadas pelo aluno que cursa CDI. A dimensão da conceituação e da aplicação dos conceitos de limite, continuidade, derivada e integrais podem ser prejudicados pela manipulação algébrica deficiente e compreensão incompleta de ferramentas como fatoração, operações algébricas e numérias, funções e outras.

Ao aluno que cursa CDI é desejável que no tratamento das ferramentas do ensino básico tenham sido enfatizadas suas manipulações e significados em prol de quando for apresentado algum conceito mais sofisticado este tenha total atenção sem que seja necessário revisar (com alto custo de tempo) ou até aprender elementos passados.

BIBLIOGRAFIA

[1] AZEVEDO, Ângela Sá; FARIA, Luísa. Motivação, Sucesso e Transição para o Ensino Superior. **Psicologia**, Lisboa, v. XX, n. 2, p. 69-93, 2006. Associação Portuguesa de Psicologia. Disponível em: https://revista.appsicologia.org/index.php/rpsicologia/article/download/389/149/964. Acesso em: 3 mai. 2023.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

[3] ELYOTE, Maria; MARÃO, José. Ensaio interdisciplinar para o ensino de limite utilizando o GeoGebra. **Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, Rio de Janeiro, v. 11, n. 2, p. 235-251, 13 jun. 2023. ISSN: 2319-023X. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2023/pmo1114. Acesso em: 14 jun. 2023.

[4] O CÁLCULO E CONCEITOS RELACIONADOS. In: EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. cap. 11, p. 417-460.

[5] FIGUEIRÊDO, Ester Gomes; PEQUENO, Pedro Igor; SOUSA, Caique; BARBOSA, Jonathas. **Cálculo e matemática básica: estudo sobre limites e suas relaçoes de interdepêndencia com ferramentas elementares da matemática**. Anais IX CONEDU. Campina Grande: Realize Editora, 2023. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/97272. Acesso em: 20 fev. 2024.

[6] LIMITES E DERIVADAS: Cálculo Usando Propriedades dos Limites. In: STEWART, James. **Cálculo**. 4 ed. São Paulo: Cengange Learning, v. 1, 2016. cap. 2, p. 65-148.

Educação empreendedora em um plano de negócios

Experiência no ensino fundamental II

Silva, Conrado Valdovando da[105]; Salvador, José Antonio[106].

Resumo: *Neste trabalho, concebemos, executamos e analisamos uma sequência didática para o 7º ano do ensino básico, com o objetivo de explorar temas da educação empreendedora e conceitos básicos de Matemática, como frações, números decimais e porcentagens através da criação colaborativa de um Plano de Negócios fictício. As atividades foram planejadas nos moldes dos Cenários para Investigação e a pesquisa foi desenvolvida e validada sob a ótica da Engenharia Didática.*

Palavras-chave: *Educação empreendedora, cenários para investigação, engenharia didática.*

INTRODUÇÃO

A Educação Empreendedora é um assunto atual que vem sendo incluído nas propostas pedagógicas e currículos brasileiros como um mote capaz de promover nos cenários educativos discussões relacionadas às demandas da sociedade por uma educação mais propensa a observar e interagir com às necessidades da vida cotidiana, que se utilize de metodologias ativas e, assim, possa contribuir mais na formação dos estudantes para o mercado do trabalho.

O presente trabalho visa explorar e relacionar temas de Matemática básica (frações, números decimais e suas operações, porcentagens, tabelas, etc.) e Empreendedorismo Educacional em harmonia com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao criar e analisar atividades para as aulas de Matemática do 7º ano do Ensino Fundamental II, sob a ótica da Engenharia Didática; tendo como objetivos específicos despertar nos alunos competências empreendedoras (tomada de iniciativa, planejamento, criatividade, pensamento ético e sustentável) e revisar, contextualizar e aplicar os conceitos matemáticos como os anteriormente citados.

A opção pela Engenharia Didática se deu pelo fato de que suas etapas: análises prévias; concepção; experimentação e validação que contemplam de forma integral a prática e a teoria pretendida com o trabalho. E em consonância com Cenários de Investigação como metodologia de ensino abordada pelas atividades pois, o paradigma de levar os alunos a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada norteou a estrutura das atividades, o que exigiu dos educandos pesquisas e discussões referentes à situações da vida real para que pudessem planejar

[105]PPGECE UFSCar
[106]DM UFSCar

e tomar escolhas, que articulam as três referências: referência à Matemática, referência à semi-realidade e referência à situações da vida real (SKOVSMOSE, 2000).

A abordagem pedagógica desenvolvida se alinha com a BNCC, que destacamos a importância das competências de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias; bem como, desenvolver o raciocínio lógico e o espírito de investigação; o enfrentamento de situações-problema em diversos contextos; saber interagir com seus pares de forma cooperativa, dentre outras competências e habilidades que podem estimuladas ao se trabalhar temas de empreendedorismo.

Até o presente momento, encontram-se poucos trabalhos que exploram a educação empreendedora. O trabalho aqui desenvolvido se diferencia dos poucos exisgtentes pois, dentre outras características, trata da Educação Empreendedora e a relaciona com a Matemática. As atividades consistem em um Plano de Negócios fictício onde foi criada e exemplificada uma *startup* chamada EducaTech Kids (uma escola voltada para o ensino de programação para crianças), que são executadas de forma detalhada (segundo os moldes do Serviço de Apoio às Micro e Pequenas Empresas - SEBRAE, com sumário executivo, análise do mercado, produto/serviço, plano operacional, plano financeiro, estratégia de marketing, etc.) e traz a tona conceitos específicos do empreendedorismo e da Matemática financeira, como missão, público-alvo, investimentos fixos, capital de giro, lucro, prejuízo, etc..

A sequência proposta

A sequência didática elaborada foi organizada em uma primeira etapa que consiste na introdução e na primeira parte do Plano de Negócios, que abrange o Sumário Executivo, Análise de Mercado, Produto/Serviço e Plano Operacional, distribuídos em duas aulas de 45 minutos cada.

A segunda parte do Plano de Negócios é focada no Plano Financeiro, que inclui o Investimento Total, Estimativa de Faturamento, Estimativa de Custos, Demonstrativo dos Resultados e Indicadores de Viabilidade, desenvolvida ao longo de seis aulas de 45 minutos cada.

Por fim, a terceira parte do Plano de Negócios é dedicada à discussão de Estratégias de Marketing, Análise *FOFA* (Forças, Oportunidades, Fraquezas e Ameaças) e a socialização feita por cada grupo de estudantes com a classe em duas aulas de 45 minutos cada.

CONCLUSÕES

Na sala de aula, frequentemente nos deparamos com a famosa pergunta dos estudantes: "Para que vou usar isso?". É interessante observar que, desde o início das atividades que abordam conceitos matemáticos abstratos, como números decimais e suas transformações, porcentagens e frações, os alunos os aplicam naturalmente em problemas práticos, como estimar a lucratividade ou o tempo de retorno de um investimento. Em nenhum momento os estudantes questionaram sua aplicabilidade na vida real. Tornou-se evidente que muitos dos alunos que normalmente têm bom desempenho em aulas de Matemática enfrentaram as tarefas com relativa facilidade. No entanto, o que mais nos surpreendeu foi o entusiasmo dos estudantes que geralmente são classificados como "médios" em seu desempenho acadêmico. Neles, pudemos notar um interesse e uma dedicação que raramente demonstram em situações cotidianas. Isso nos leva a refletir sobre como a abordagem do conteúdo, o uso de Cenários para Investigação e o trabalho em equipe podem ter um impacto positivo no processo de aprendizagem.

A pesquisa nos leva a uma conclusão importante: é fundamental um trabalho contínuo com esse tipo de atividade para que os estudantes possam desenvolver as habilidades matemáticas e as competências empreendedoras de maneira progressiva, o que é relevante para o desenvolvimento de uma Educação Empreendedora e para a formação de alunos critícos e aptos para atuarem no mercado de trabalho do futuro.

Esse processo também destaca a importância dos educadores saírem da zona de conforto, explorarem novas metodologias e não terem medo de experimentar abordagens diferentes. Tendo em vista que o aprendizado é uma jornada contínua e que é necessário estar disposto a adaptar-se às necessidades dos alunos para promover um ambiente de aprendizado eficaz e inspirador.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTIGUE, M. **Engenharia Didática.** In: BRUN, Jean. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996, p.193-217.

[2] BRASIL. (2018). Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 12 out. 2023.

[3] SEBRAE (Brasília). **Como Elaborar um Plano de Negócios**. 2013. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/Busca?q=como elaborar um plano de negócios. Acesso em: 10 mar. 2024.

[4] SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para Investigação**. Bolema, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 1-24, set. 2000. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index .php/bolema/article/view/10635. Acesso em: 20 mar. 2024.

O Uso do Scratch no ensino da matemática

Silva[1], José[107];

Resumo: *Este estudo examina o uso do Scratch como uma ferramenta no ensino da matemática, focalizando em sua aplicação prática em ambientes educacionais. O Scratch, uma linguagem de programação visual, oferece uma abordagem interativa e acessível para explorar conceitos matemáticos complexos. Investigaremos como integrar o Scratch ao currículo de matemática, destacando exemplos de projetos que abordam geometria, álgebra e estatística. Além disso, exploraremos os benefícios pedagógicos e os desafios associados ao uso do Scratch no ensino da matemática, considerando estratégias para implementação e avaliação do aprendizado dos alunos. A pesquisa pretende fornecer percepções sobre como as tecnologias de programação podem melhorar a compreensão e o engajamento dos alunos com a matemática, especialmente em um contexto de aprendizado remoto ou híbrido. Ao abordar as implicações práticas e teóricas dessa integração, esperamos contribuir para o desenvolvimento de abordagens educacionais mais eficazes e inclusivas no ensino da matemática. Este estudo visa beneficiar professores, alunos e pesquisadores interessados em explorar novas estratégias de ensino e aprendizado da matemática através da programação e da tecnologia.*

Palavras-chave: *Scratch, ferramenta, programação, ensino.*

INTRODUÇÃO

No contexto educacional contemporâneo, caracterizado pela constante busca por inovação pedagógica, a incorporação de tecnologias avançadas no processo de ensino e aprendizagem emergiu como um vetor crucial para fomentar uma educação significativa e participativa. Dentro desse paradigma, destaca-se o uso do Scratch, uma linguagem de programação visual concebida pelo MIT Media Lab, reconhecida como um recurso promissor para o ensino da matemática (citar o site aqui). O presente artigo visa investigar a aplicabilidade do Scratch como metodologia pedagógica efetiva para o ensino e a aprendizagem da matemática em variados ambientes educacionais.

A disciplina de Matemática, intrinsecamente abstrata e conceitual, frequentemente impõe obstáculos significativos aos estudantes, tanto na assimilação quanto na aplicação de seus conceitos. O modelo convencional de ensino de matemática, muitas vezes caracterizado por sua rigidez e desconexão com o universo discente, pode culminar em um desengajamento estudantil e em um entendimento superficial dos princípios matemáticos. Contudo, a adoção de metodologias

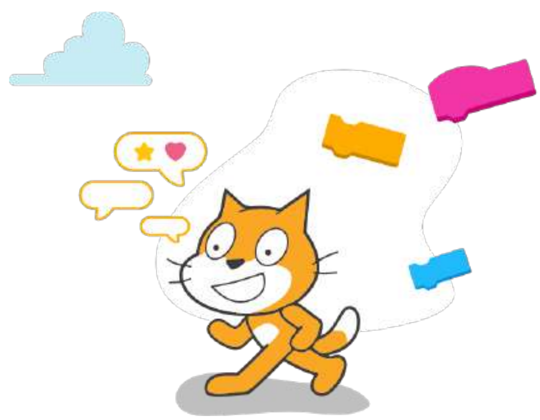
[107] Afiliação. Este autor foi apoiado pela UFPA

inovadoras, como o emprego do Scratch, apresenta uma oportunidade ímpar para revitalizar o aprendizado matemático, tornando-o mais interativo, palpável e acessível.

Por meio do Scratch, os estudantes têm a capacidade de criar e manipular objetos virtuais em um ambiente de programação visualmente intuitivo. A elaboração de projetos interativos possibilita a exploração hands-on de conceitos matemáticos complexos de maneira engajante e significativa. A programação utilizando o Scratch exige a aplicação de fundamentos matemáticos, abrangendo geometria, álgebra, estatística e lógica, em um contexto prático e relevante, promovendo assim uma compreensão aprofundada e a habilidade de aplicar tais conceitos de forma eficaz.

Esta introdução propõe delinear os objetivos deste estudo, que englobam a análise das vantagens pedagógicas potenciais propiciadas pelo uso do Scratch no ensino de matemática, a avaliação de casos práticos de projetos Scratch que incorporam conceitos matemáticos e a discussão sobre abordagens para a integração efetiva do Scratch ao currículo matemático. Almejamos, com este trabalho, fornecer estratégias para educadores, pesquisadores e demais interessados na utilização de tecnologias educacionais para enriquecer o ensino e a aprendizagem em matemática.

Fig. 29: Scratch Brasil



METODOLOGIA

Para facilitar o aprendizado de programação utilizando o Scratch, propõe-se um método abrangente que engloba diferentes etapas. Inicialmente, será conduzido um levantamento inicial de conhecimento entre os alunos do ensino fundamental maior. Isso envolverá a distribuição de um questionário básico que aborda os conceitos fundamentais que serão utilizados no Scratch. Esse levantamento nos permitirá compreender o ponto de partida de cada aluno, suas habilidades prévias e suas necessidades individuais de aprendizado.

Após essa etapa inicial, seguirá a demonstração dos conceitos essenciais de programação. Isso incluirá a apresentação clara e gradual de comandos matemáticos e lógicos, utilizando exemplos concretos de sua aplicação no contexto do Scratch. Serão explorados comandos simples, como maior que ($>$), menor que ($<$) e diferente de ($\neq$), demonstrando como são utilizados na criação de programas simples e jogos.

Uma vez que os conceitos tenham sido introduzidos, a próxima fase envolverá a prática guiada. Os alunos serão orientados na criação de programas simples, utilizando modelos pré-elaborados e recebendo instruções detalhadas. Cada aluno terá a oportunidade de aplicar os conceitos aprendidos, desenvolvendo seu próprio raciocínio lógico na resolução de problemas de programação. O objetivo é proporcionar um ambiente de aprendizado onde os alunos se sintam apoiados e incentivados a explorar e experimentar.

Ao final do período de prática, será realizada uma avaliação da evolução dos alunos. Isso envolverá a aplicação de um segundo questionário, que permitirá avaliar o progresso individual e coletivo dos alunos. Com base nos resultados dessa avaliação, será possível identificar áreas de melhoria e ajustar nossa abordagem de ensino conforme necessário. O objetivo é garantir que todos os alunos tenham a oportunidade de desenvolver suas habilidades matemáticas de forma eficaz e significativa.

Para uma análise mais abrangente, selecionaremos os resultados de três alunos diferentes para comparação entre os dois questionários. Essa abordagem nos permitirá obter uma visão mais representativa do progresso dos alunos ao longo do período de aprendizado. Ao examinar os resultados individuais e compará-los de forma cruzada, poderemos identificar padrões de melhoria, áreas de dificuldade e o impacto geral da metodologia de ensino. Essa análise detalhada será fundamental para refinar ainda mais nossa abordagem de ensino e garantir um progresso contínuo dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

[1] RESNICK, M., & Rusk, N. (2019). Aprendendo com Scratch: Uma visão geral. Disponível em: **https://www.scratch.mit.edu/about**.

[2] LEMOS, A., & Recuero, R. (2018). Jogos digitais: uma introdução. Sulina.. **https://rhyzos.com/paulo-blikstein-inclusao-digital/**.

[3] MORAN, J. M. (2013). Novas tecnologias e mediação pedagógica. Papirus Editora.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

O papel da olimpíada mandacaru de matemática na promoção da cultura nordestina e da matemática

Costa, José Genilson da[108]

Resumo: *Este artigo apresenta a Olimpíada Mandacaru de Matemática, uma iniciativa que busca integrar a cultura nordestina com a Matemática. Inicia-se com uma breve contextualização sobre a importância das Olimpíadas de Matemática, explorando sua história e impacto na disseminação e popularização da disciplina. Em seguida, é abordada a história da Mandacaru, destacando sua abrangência e benefícios educacionais e culturais promovidos pela Olimpíada. A Olimpíada Mandacaru de Matemática é então apresentada, destacando sua missão de unir elementos culturais do Nordeste com desafios matemáticos, incentivando a participação de estudantes e promovendo o aprendizado da disciplina de forma lúdica e contextualizada. Como conclusão, os autores, com base em sua experiência na coordenação geral da Mandacaru, tecem considerações sobre o papel das Olimpíadas como instrumentos de divulgação e ensino da matemática, enfatizando sua importância na promoção da aprendizagem e popularização dessa ciência.*

Palavras-chave: *Olimpíadas de matemática, popularização da matemática, cultura nordestina, olimpíada mandacaru de matemática.*

INTRODUÇÃO

As primeiras competições de Matemática realizadas em nível nacional remontam aos concursos de Eotvos, na Hungria, em 1894. Nesse ano, a sociedade de Matemática e Física da Hungria organizou esta competição, que consistiu em uma prova aberta a todos os estudantes do segundo grau do país, em honra a um renomado professor de matemática, membro da Academia de Ciências Húngara e do Instituto Politécnico da Universidade de Budapeste, Jósef Kürschák. O evento foi um sucesso retumbante, o que levou à disseminação dessa iniciativa construtiva por toda a Europa e além, tornando-se uma tradição anual em muitos países.

Nesse sentido de competições nacionais, as Olimpíadas de Matemática têm se estabelecido como uma componente significativa da educação brasileira, emergindo como uma prática regular nas escolas de todo o país. Um exemplo emblemático dessa tendência é a Olimpíada Brasileira de

[108]Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Coordenador Geral da Olimpíada Mandacaru de Matemática. `genilson.ce.rn@hotmail.com`

Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), cuja instituição em 2005 marcou o início de uma oportunidade ampla para os estudantes brasileiros aprimorarem suas competências matemáticas e alcançarem reconhecimento na disciplina. Através da OBMEP, os participantes são desafiados a resolver problemas matemáticos complexos, estimulando assim o desenvolvimento do pensamento crítico e a criatividade.

Para MOURA (2023),

> [...] a OBMEP é uma atividade educacional que se consolidou por sua organização, estrutura de premiação, qualidade e objetivos de melhoria da educação básica no Brasil, além dos objetivos de incentivar o estudo da Matemática e identificar na área o que a OBMEP denomina talentos.

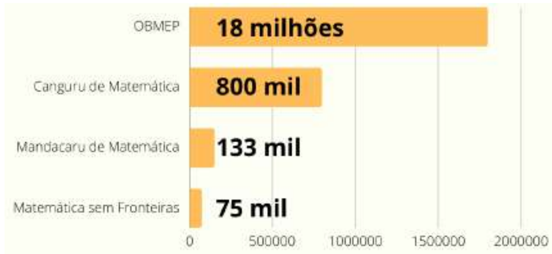
Além da renomada OBMEP, o Brasil apresenta uma diversificada gama de Olimpíadas tanto de abrangência nacional quanto regional, todas com o propósito geral de aprimorar o ensino da matemática na educação básica e fomentar a identificação de talentos que possam representar o país em competições internacionais, além de direcioná-los para centros de pesquisa de excelência. Essas competições não apenas incentivam o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes, mas também oferecerem oportunidades de aprendizado enriquecido.

Dentro do contexto das competições de matemática no Brasil, é relevante destacar as principais olimpíadas em termos de importância e participação. Entre elas, a Olimpíada Mandacaru de Matemática merece destaque por sua posição como a terceira maior olimpíada do país em número de participantes. Esta competição representa não apenas um evento matemático, mas também uma integração com a cultura nordestina. A Olimpíada Mandacaru de Matemática busca promover uma sinergia entre o conhecimento matemático e a riqueza cultural da região Nordeste do Brasil. Além disso, as últimas edições desta olimpíada têm demonstrado um crescimento contínuo em termos de participação e qualidade das provas, refletindo o crescente interesse dos estudantes e educadores pela matemática e suas aplicações. Esses dados ressaltam o papel significativo que a Olimpíada Mandacaru de Matemática vem desempenhando tanto na promoção do ensino da matemática quanto na valorização da cultura regional.

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

As Olimpíadas de Matemática no Brasil têm uma significativa relevância no contexto histórico do país, marcando uma trajetória que reflete o desenvolvimento do ensino e da valorização da matemática ao longo do tempo. Originadas na década de 1950, essas competições foram inicialmente impulsionadas por iniciativas isoladas de instituições de ensino e entusiastas da disciplina. Durante a década de 1970 é criada a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e em 2005 a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Estas iniciativas, além de promoverem a competição saudável entre os estudantes, têm como objetivo principal estimular o estudo da matemática, identificar talentos precoces e fomentar o desenvolvimento de habilidades cognitivas como o raciocínio lógico e a resolução de problemas. Ao longo dos anos, as Olimpíadas de Matemática têm se consolidado como um importante instrumento de incentivo à educação matemática de qualidade no Brasil, contribuindo para a formação de uma nova geração de profissionais e pesquisadores na área.

Fig. 30: As principais Olimpíadas de Matemática do Brasil em termos de quantidade de inscritos.



Fonte: autor (2023).

A análise da Figura 1 revela que a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) se destaca como a competição com o maior número de inscritos. Essa olimpíada, financiada pelo governo federal e desenvolvida pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), mantém uma posição de liderança nesse aspecto. O Concurso Canguru de Matemática, introduzido no Brasil em 2009, demonstra um crescimento contínuo em sua participação anual, sendo uma competição nacional, e com associações em mais de 65 países, conforme informações disponíveis em seu site oficial. Em terceiro lugar, em termos de número de inscritos, encontra-se a Olimpíada Mandacaru de Matemática, objeto de estudo desta pesquisa. Em sua quarta edição, a Mandacaru já atraiu mais de 133 mil alunos, conforme dados obtidos no site oficial do evento. Por fim, a Olimpíada de Matemáticas Sem Fronteiras, de origem francesa e já consolidada no calendário olímpico das escolas, ocupa o quarto lugar em número de inscritos, destacando-se como uma importante competição de matemática no cenário brasileiro.

Além disso, é importante destacar a significância das olimpíadas regionais de matemática, pois, a são a partir delas que muitos estudantes e professores iniciam sua trajetória olímpica.

Tabela 1: Principais Olimpíadas Regionais de Matemática

Olimpíada Alagoana de Matemática
Olimpíada Campinense de Matemática
Olimpíada Cearense de Matemática
Olimpíada Regional de Matemática Grande Porto Alegre
Olimpíada de Matemática de Maringá e Região
Olimpíada de Matemática do Distrito Federal
Olimpíada de Matemática do Estado da Bahia
Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás
Olimpíada de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte
Olimpíada de Matemática do Agreste Pernambucano
Olimpíada de Matemática do Grande ABC
Olimpíada de Matemática Mineira
Olimpíada de Matemática Paulista
Olimpíada de Matemática Paranaense
Olimpíada de Matemática Pernambucana
Olimpíada de Matemática Pessoense
Olimpíada Ponta grossense de Matemática
Olimpíada Itabirana de Matemática

Fonte: site da OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática) (2024).

A Olimpíada Mandacaru de Matemática é um projeto criado em 2021 pelo professore de matemática, Genilson Costa, em Santa Cruz/RN, como forma de promover o estudo da matemática de forma integrada com a cultura nordestina. A Mandacaru de Matemática:

> [...] é uma iniciativa que visa promover a integração entre a cultura nordestina e a matemática. Destinada a alunos do quarto ano do Ensino Fundamental I até o último ano do Ensino Médio de escolas públicas e privadas de todo o Brasil, a Olimpíada oferece uma oportunidade para os estudantes explorarem os desafios da matemática enquanto mergulham nas riquezas culturais do Nordeste brasileiro. Por meio dessa Olimpíada, buscamos não apenas estimular o interesse pela disciplina, mas também fortalecer os laços com as tradições regionais, contribuindo para o desenvolvimento intelectual e cultural de nossos participantes. (MANDACARU, 2024).

A Mandacaru, com alcance nacional, está cada vez mais presente na educação de alunos de escolas públicas e privadas em todo o país, englobando desde o quarto ano do ensino fundamental até o último ano do ensino médio.

Na sua estreia em 2021, a competição registrou a inscrição de mais de 43 mil alunos. Em 2022, esse número aumentou para 63 mil, e em 2023 atingiu a impressionante marca de 133 mil inscrições, consolidando-a como a terceira maior Olimpíada do país em termos de participação. Além da participação expressiva dos estudantes brasileiros, a Olimpíada também está presente em três países do continente africano, Angola, Moçambique e Guiné-Bissau.

Alunos, professores e escolas são premiados, com base nos resultados dos seus participantes. Inicialmente eram distribuídas 130 medalhas (primeira edição). Com o crescimento de participantes, foi instituído que seria uma porcentagem baseada no número de inscritos: 2% ouro, 3% prata, 4% bronze e 5% menção honrosa. Além de troféus para alunos, professores e escolas.

A Olimpíada consiste em uma única prova da qual participam qualquer estudante interessado. Existem 4 níveis de prova, de acordo com a série do estudante:

- Nível Cajuína – 4º e 5º anos do ensino fundamental
- Nível Luiza Gonzaga – 6º e 7º anos do ensino fundamental
- Nível Zumbi dos Palmares – 8º e 9º anos do ensino fundamental
- Nível Lampião – ensino médio

A prova consiste em 20 questões de múltiplas escolhas, divididas em questões de 3 pontos e 4 pontos, totalizando 70 pontos.

A cultura nordestina como eixo norteador da Olimpíada Mandacaru de Matemática

A Mandacaru de Matemática tem como um dos seus objetivos principais integrar a cultura nordestina e a matemática. Para isso, os aspectos que envolvem a competição são todos direcionados a cultura nordestina, desde os níveis das provas, questões e premiações até os seus mascotes.

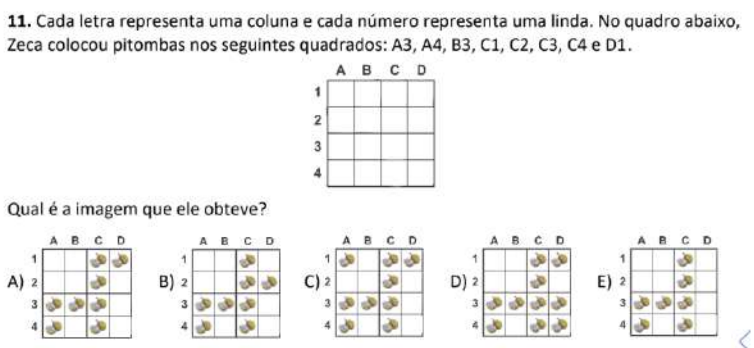
Fig. 31: mascotes da Olimpíada Mandacaru de Matemática.

Fonte: Mandacaru de Matemática (2024)

Os mascotes da Olimpíada Mandacaru, Tica, Tonho e Zeca, são inspirados em um trio forrozeiro nordestino, representando de forma lúdica e cativante a cultura da região. Na sequência da esquerda para a direita, temos Tica, Tonho e Zeca, cada um deles com instrumentos que remetem tanto à matemática quanto à cultura nordestina.

As questões da Olimpíada apresentam o contexto regional nordestino de forma proeminente, destacando aspectos culturais, históricos, geográficos e socioeconômicos característicos dessa região do Brasil. Por meio da inserção desses elementos nas questões, os participantes são incentivados a compreender e aplicar conceitos matemáticos em situações concretas e relevantes para o seu cotidiano.

Fig. 32: questão do nível cajuína 2023.



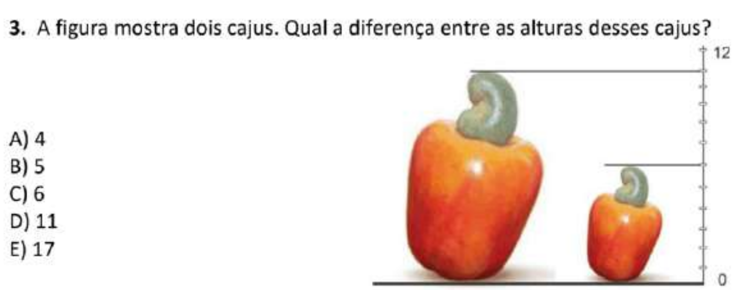
11. Cada letra representa uma coluna e cada número representa uma linda. No quadro abaixo, Zeca colocou pitombas nos seguintes quadrados: A3, A4, B3, C1, C2, C3, C4 e D1.

Qual é a imagem que ele obteve?

A) B) C) D) E)

Fonte: Mandacaru de Matemática (2024)

Fig. 33: questão do nível cajuína 2022.



3. A figura mostra dois cajus. Qual a diferença entre as alturas desses cajus?

A) 4
B) 5
C) 6
D) 11
E) 17

Fonte: Mandacaru de Matemática (2024)

Além disso, as questões fazem referência a festas populares, como o São João, incorporando elementos de contagem, proporção e probabilidade relacionados às atividades festivas e às tradições culturais associadas a essa celebração. Dessa forma, as questões da Olimpíada Mandacaru não apenas desafiam os participantes a resolver problemas matemáticos, mas também os convidam a explorar e valorizar a rica diversidade cultural e regional do Nordeste brasileiro, promovendo uma abordagem integrada e contextualizada do ensino e aprendizado da matemática.

CONCLUSÕES

A Olimpíada Mandacaru de Matemática é uma competição singular que se distingue pela sua abordagem da matemática dentro do contexto regional nordestino, enquanto promove ativamente a cultura dessa região por meio das questões e temáticas presentes na competição.

Entendemos o sucesso da Olimpíada Mandacaru como uma forma de promover a matemática e a cultura nordestina e sua capacidade de catalisar mudanças positivas em termos de representatividade e inclusão, tanto a nível regional quanto nacional. Como tal, a Olimpíada Mandacaru se posiciona como um exemplo inspirador de como as competições científicas podem ser alavancadas para promover o aprendizado, a diversidade e a cooperação entre estudantes de diferentes origens e países.

Ela se destaca como uma competição que valoriza a cultura nordestina e promove o estudo da matemática de forma contextualizada. O crescente número de participantes e o reconhecimento nacional e internacional evidenciam o impacto positivo dessa olimpíada na divulgação da matemática e na valorização da cultura nordestina. Espera-se que a Mandacaru continue crescendo e inspirando estudantes a se envolverem com a matemática, contribuindo assim para a melhoria da educação básica e o fortalecimento dessa disciplina essencial.

BIBLIOGRAFIA

[1] Moura, J. B.; **A OBMEP como estratégias de reprodução da matemática acadêmica**. 2023.

[2] Mandacaru.; **Olimpíada Mandacaru de Matemática**, 2024. Disponível em: https://www.mandacarudematematica.com/. Acesso em: 24 de março de 2024.

[3] Bragança, B.; **Olimpíada de Matemática para a Matemática avançar**. 2013.

A função delta de Dirac

dos Santos Filho, José Ruidival[109]

Em seu livro The Principles of Quantum Mechanics, de 1930, P. A. M. Dirac na Seção 15, intitulada The Delta Function, foi apresentado a quantidade $\delta(x)$ dependendo do parâmetro real x satisfazendo as condições:

$$\int \delta(x)dx = 1 \text{ e } \delta(x) = 0 \text{ if } x \neq 0 \tag{1}$$

De fato, a primeira referência sobre tal conceito está num artigo publicado em 1927. Ele sugere que para ter uma visão da referida função devemos tomar função real da variável real x que se anula em toda parte exceto num intervalo, de comprimento pequeno, em torno de x=0, no qual ela é tão grande que sua integral é igual a um. Isto é, devemos imaginá-la como o limite de tais funções quando o comprimento do domínio tende a zero.(Por exemplo, se ϵ é o tal comprimento, os valores da tal função é de ordem ϵ^{-1}. Ele diz que $\delta(x)$ não é uma função de acordo com a definição usual na Matemática, e sugere chama-la por função imprópria. Ele considera que a propriedade mais importante de δ(x) é:

$$\int f(x)\delta(x)dx = f(0), \text{ quando } f \text{ é contínua} \tag{2}$$

o que facilmente nos leva a

$$\int f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \text{ quando f é contínua} \tag{3}$$

aqui $\delta(x-a)$ seria a função delta suportada no ponto a ao invés de a=0. Para formalizar tal conceito/propriedades uma alternativa é considerar δ como um medida de probabilidade, ou seja

$$\delta(U) = 0 \text{ se } 0 \notin U \text{ e } \delta(U) = 1 \text{ se } 0 \in U \qquad (4),$$

aqui U varia na σ-álgebra de Borel; ou seja a σ-álgebra gerada pelos abertos dos reais. Observamos que as integrais com respeito as tais medidas serão entendidas como:

$$\int f(x)d(\delta) = f(0) \text{ e } \int f(x)d(\delta(.-a)) = f(a) \tag{5}$$

Podemos olhar uma tal medida como funcional linear em $C(\mathbb{R})$, isto é uma transformação linear contínua de $C(\mathbb{R})$ com valores reais, tomando em $C(\mathbb{R})$ a topologia uniforme em compactos . Parece

[109]DM- UFSCar

pois natural estender o de tal espaço de funções generalizadas, tarefa esta empreendida por Laurent Schwartz. Em particular obter espaços de funcionais lineares contínuos a partir de combinações lineares de funções delta's definidas em subespaços de $C(\mathbb{R})$. Se tomarmos $m = \Sigma c_n d\delta(. - n)$, com $\Sigma c_n = 1, c_n > 0$ $\forall n$ e n variando nos números inteiros, segue que o domínio de tais m's devem ser as funções contínuas de suporte compacto, denote tal conjunto por $C_c(\mathbb{R})$. Do ponto de vista analítico é interessante tomar uma topologia em $C_c(\mathbb{R})$ que o torne um espaço vetorial topológico completo, observo que tal topologia não o torna um espaço métrico. Em seguida observamos que $\int f(x)k[d(\delta(x - 1/k) - \delta(x))]$ converge para $f'(0)$, quando k tende para infinito, quando $f \in C^1(\mathbb{R})$. Para que a integração por partes permaneça válida denotamos que o limite de $k(\delta(x - 1/k) - \delta(x))$ é $-\delta'(x)$. Iterando este procedimento tomaremos os funcionais lineares definidos em $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Finalmente, toma-se pois neste último espaço a topologia menos fina que o torna um Espaço Vetorial Topológico Completo. Tal procedimento se estende para variedades diferenciáveis para-compactas. É surpreendente que os funcionais lineares contínuos obtidos como limite de combinações lineares finitas de funções delta's forma o espaço das distribuições de Laurent Schwartz, que foi introduzida em 1950. Aplicações em Análise Matemática, Teoria de Aproximação, Equações Diferenciais Ordinárias e mais geralmente em Equações Diferenciais Parciais serão esboçadas. Nosso objetivo é com esta abordagem despertar o interesse na Teoria de Funções Generalizadas como uma ferramenta importante da Matemática.

A importância de relacionar o cálculo diferencial e integral ao uso de jogos em práticas de laboratório de ensino

Nunes, Marly dos Anjos[110]; Santa Brígida, Júlia Barbosa[111]; Quadros, Glenda de Fátima Amorim[112]

Resumo: *Este trabalho propõe uma abordagem acerca do uso de jogos como instrumento facilitador no ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Fez-se uma pesquisa que buscou analisar e avaliar a importância de se utilizar jogos no ensino superior. Este estudo utilizou-se da pesquisa qualitativa com a teoria, uma motivação, com o jogo da memória, coleta de dados através dos mapas mentais e a participação ativa dos alunos confeccionando novos recursos. Concluímos que o trabalho é relevante tanto para docentes quanto para os discentes que estão envolvidos com laboratório de ensino, explorando práticas diferenciadas.*

Palavras-chave: *Educação em astronomia, divulgação matemática, ensino não formal, observatório astronômico.*

INTRODUÇÃO

Na relação teoria e prática, pode-se destacar a ludicidade, especificamente os materiais manipulativos e jogos, com a finalidade de que a matemática (Cálculo) alcance os alunos. O ato de jogar se encontra no contexto cultural destacando uma construção que depende de uma atividade interior e o jogo insere neste interior as vivências da realidade.

O jogo tem a propriedade de trazer as experiências do mundo exterior para o espírito humano, de maneira que, jogando com elas, a cultura possa ser criada, revista, corrigida, ampliada, garantindo o ambiente de nossa existência. (Freire 2002, p. 88)

Relacionar o Cálculo Diferencial e Integral, uma das componentes curriculares do curso de matemática, que envolve conceitos, simbologias, notações, hipóteses, regras e métodos, um instrumento didático que forneça o ensino e aprendizagem das abstrações, enfatizando o letramento matemático é um desafio.

[110] Universidade Federal do Pará. marlynunes@ufpa.br
[111] Universidade Federal do Pará. juliabarbosa328@gmail.com
[112] Universidade Federal do Pará. glendaamorimquadros@gmail.com

Diante das dificuldades dos alunos e da ementa extensa, o professor de Cálculo Diferencial e Integral necessita fazer uma relação entre o objetivo que deseja atingir e o que o aluno necessita aprender. Conciliando os objetivos com a realidade, o professor alcançará um resultado satisfatório.

Comumente, as práticas de laboratório de ensino em cálculo se resume a apresentar diversas questões de uma lista enorme de exercícios. Porém o objetivo do laboratório é promover a articulação prática de ensino, desenvolvendo a capacidade de propôr uma prática diferenciada que adeque partes da ementa com um recurso que explore a realidade dos discentes, envolvendo o vocabulário e a simbologia específica da matemática.

Objetivo Geral

Apresentar propostas para práticas de laboratório de ensino que envolvam os jogos e o Cálculo Diferencial e Integral.

Objetivos Específicos

- Mostrar a adequação do conteúdo do Cálculo a jogos do contexto cultural do aluno.
- Ressaltar a importância da utilização de instrumentos didáticos em laboratórios de ensino.
- Propor Práticas docentes diferenciadas que explore a realidade dos discentes envolvendo a linguagem do Cálculo.

A relevância dos jogos no ensino e aprendizagem

O uso de jogos como recurso metodológico é de suma importância para o ensino e aprendizagem, contemplando a matemática. Sendo mais específico, no campo trabalhado ele contribui com diversos fatores positivos tanto para o docente que faz uso deste meio quanto para os discentes que usufruem da aplicação do mesmo. Como o curso de Matemática da UFPA - Campus Bragança conta com o Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT), cujo principal objetivo é produzir, desenvolver e compartilhar metodologias de ensino, materiais didáticos e outros objetos que auxiliam na prática docente, obtivemos seu apoio para a realização das atividades propostas. Assim, o meio escolhido para o desenvolvimento da abordagem foi o uso de jogos.

> "Jogar é umas das atividades em que a criança pode agir e produzir seus próprios conhecimentos. No entanto, nossa proposta não é substituir as atividades em sala de aula por situações de jogos, (...) a ideia será sempre considerá-los como outra possibilidade de exercitar ou estimular a construção de conceitos e noções também exigidos para a realização de tarefas escolares."(Petty, 1995, p.11)

Tendo em vista, que as aplicações de jogos frequentemente ocorrem no âmbito das escolas de Ensino Básico, sugerimos a proposta para o Ensino Superior. Considerando vários pontos propensos a escolha, pois diante da dificuldade dos alunos em relacionar conceitos abstratos inseridos na ementa observou-se a necessidade de adaptar a metodologia trabalhada, além de que a elaboração dos materiais motivou o reinventar quanto as práticas docentes.

PERCURSO METODOLÓGICO

A prática docente diante do laboratório de ensino de Cálculo Diferencial e Integral requer métodos diversificados que nos permite analisar e avaliar diante dp contexto situacional. Partindo desta perspectiva, relacionamos alguns métodos de integração, em particular, os métodos de substituição trigonométrica e o de frações racionais por frações parciais que compõem a primeira parte da ementa de Cálculo II, no curso de matemática, campus Bragança - Pará; alguns jogos que compõe a realidade dos alunos, o bingo, o tangram, o jogo da memória, dominó e jogos de tabuleiro.

A pesquisa teve como público alvo graduandos do quarto semestre do curso de licenciatura em matemática. Trata-se de uma pesquisa cunho qualitativo pois “os métodos qualitativos trazem como contribuição ao trabalho de pesquisa uma mistura de procedimentos de cunho racional e intuitivo capazes de contribuir para a melhor compreensão dos fenômenos” (POPE e MAYS, 1995, p. 42).

O projeto foi dividido em quatro momentos intitulados, conjuntos de atividades:

- Primeiro momento: Compartilhamos a teoria referente a ementa da componente curricular Cálculo Diferencial e Integral II.

- Segundo momento: Como forma de motivação, aplicamos o jogo físico relacionado ao jogo da memória $(\int \text{memória}(x) = \text{memor}(x) + c)$.

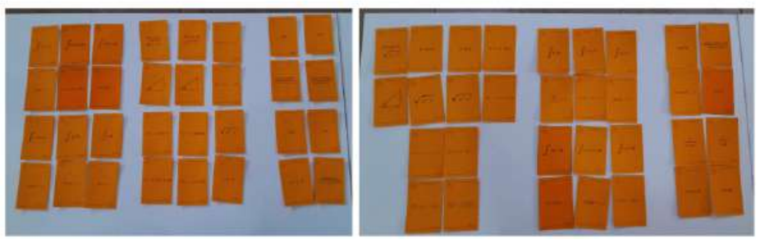


Fig. 34: Autoria própria

- Terceiro momento: Percepção dos alunos sobre a atividade desenvolvida. Estes criaram mapas mentais ressaltando palavras chaves (bom, ruim, legal, excelente, “dirocha", dentre outros), facilidades e sugestões.

- Quarto momento: Agora é com vocês! Cada grupo apresentou um instrumento didático que se relacionassem com os métodos de integração, dentre eles, temos o Cálculo da Sorte (Bingo), Quebra-cabeça do Cálculo (Tangram), Dominando o Cálculo (Dominó) e o Caminho do Cálculo (Jogo de tabuleiro).

Fig. 35: Autoria própria

CONCLUSÕES

Muitos alunos apresentam dificuldades em aprender ou relacionar regras e métodos de alguns conceitos do cálculo diferencial e integral. Essas dificuldades podem ser agravadas com o uso de metodologias inadequadas. Neste contexto, a proposta do trabalho pode ajudar professores e alunos a alcançarem resultados satisfatórios.

O presente trabalho revela-se de grande importância para a formação acadêmica de do licenciando em virtude da prática docente ser imprescindível para a qualificação profissional. O desafio está em relacionar as teorias com recursos que sejam eficazes no ensino e aprendizagem. E, de acordo com as atividades realizadas pôde-se observar o melhor aproveitamento dos discentes ao utilizar o jogo como instrumento facilitador, potencializando a aprendizagem.

Bibliografia

[1] Stewart, J.; **Cálculo**, v. 2. São Paulo. Cengage Learming, 2013.

[2] Freire, J.B.;**O jogo: entre riso e o choro.** Campinas, SP, autores associados, 2002, p. 175.

[3] Grando, R.C.. ;**O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, 2000.

[4] Petty, A. L. S. ;**Ensaio sobre o valor pedagógico dos jogos de regras: Uma perspectiva construtivista**. São Paulo, SP, 1995. p. 133. Dissertação de Mestrado. Instituto de Psicologia, USP.

[5] Pope, C.. Mays, N. ;**Reaching the parts other methods cannot reach: an introduction to qualitative methods in health and health service research**. British Medical Journal, n. 311, p. 42-45, 1995

Classificação das álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensão menor ou igual a 2

Barbosa, Juliana Medeiros[113], Souza, Manuela da Silva[114]

Resumo: *As álgebras de Lie são essenciais em várias áreas da matemática e da física, permitindo, assim, várias generalizações ao longo dos anos. Dentre elas temos a chamada álgebra de Leibniz. A álgebra de Jordan, por sua vez, foi introduzida por Pascual Jordan como ferramenta para o estudo da mecânica quântica, e tem grande conexão com a classe das álgebras não associativas. Nesta apresentação, serão classificadas, a menos de isomorfismos, as álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensões um e dois sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, em particular, se tratando da álgebra de Jordan, sobre um corpo de característica diferente de 2. Esse trabalho faz parte do projeto de iniciação científica realizado sob orientação da professora Dra. Manuela da Silva Souza, onde as álgebras de Lie e Leibniz forma estudadas com base em [1], e com base em [2] para o estudo das álgebras de Jordan.*

Palavras-chave: *Classificações, álgebra de Lie, álgebra de Jordan, álgebra de Leibniz.*

INTRODUÇÃO

O aparato básico da teoria de Lie são as álgebras de Lie. Essa teoria começou por volta de 1870 com uma ideia aparentemente simples de abordar as equações diferenciais da mesma maneira que Galois fez com as equações algébricas. O método, desenvolvido por Sophus Lie e Felix Klein, consistia em estudar equações diferenciais por meio de seus grupos de simetrias. Este método destacou os grupos contínuos de transformações para os quais foi desenvolvida ao longo dos anos uma teoria abrangente que teve impacto em várias áreas da matemática e suas aplicações. Dada a sua importância as álgebras de Lie admitiram diversas generalizações ao longo dos anos, como por exemplo a álgebra de Leibniz. A álgebra de Jordan, por sua vez, foi introduzida por Pascual Jordan como ferramenta para o estudo da mecânica quântica, e tem grande conexão com a classe das álgebras não associativas. Dentro desta teoria, é fundamental concentrarmo-nos na classificação destas classes de álgebras, a menos dos isomorfismos, para obtermos um conhecimento mais profundo sobre elas. No entanto, à medida que a dimensão da álgebra aumenta, o problema se torna muito mais complexo. Neste trabalho queremos estudar e classificá-las a menos de isomorfismos

[113]Universidade Federal da Bahia(UFBA)
[114]Universidade Federal da Bahia(UFBA), orientadora

RESULTADOS

Dentro da teoria álgebrica, é extremamente importante entendermos como se comportam determinadas classes de álgebras, para isso buscamos classificá-las, a menos de isomorfismo. Visto que essa classificação se torna mais díficil a medida que aumentamos a dimensão, iremos nos ater a dimensões baixas. Definimos a álgebra de Lie $\mathcal{L}$ como sendo uma álgebra que satisfaz as propriedades de anticomutatividade e a propriedade em que $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$, a chamada identidade de Jacobi. E veremos que as álgebras de Lie unidimensionais são isomorfas a trivial e as de dimensão 2, não trivias, são isomorfas àquela onde o produto na base é do tipo $e_1e_2 = e_2$.

As álgebras de Leibniz podem ser vistas como uma generalização da álgebra de Lie e a definimos como sendo uma álgebra L, tal que satisfaz a propriedade $(xy)z = (xz)y + x(yz), \forall x, y, z \in L$ chamada de identidade de Leibniz. E veremos que quando têm dimensão um, essas são isomorfas as álgebras de Lie de mesma dimensão. No caso da dimensão dois temos que as àlgebras de Leibniz não triviais ou são isomorfas a álgebra de Lie bidimensional ou são do tipo $A_3 = span\{x, y\}$ com produto na base dado por $xx = y$ ou $A_4 = span\{x, y\}$ onde $xx = y, yx = y$, a menos de isomorfismos.

Por fim, iremos definir a álgebra de Jordan como sendo uma álgebra comutativa que satisfaz a propriedade de $(xy)x^2 = x(yx^2)$. Para classificar a álgebra de Jordan bidimensional pedimos que o corpo $\mathbb{K}$ tenha característica diferente de 2. Daí, se a álgebra não é a trivial então, se ela é gerada por e_1 e por e_2, tem como produto na base, a menos de isomorfismos, um dos seguintes **(i)** $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_1e_2 = 0$, ou **(ii)** $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_2 = e_1e_2$, ou **(iii)** $e_2^2 = \lambda e_1$ e $e_1e_2 = e_2$ ou **(iv)** $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = 0$ e $e_2e_1 = \frac{1}{2}e_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE MELO JÚNIOR, A. F. Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, Salvador, 2017.

[2] DINIZ, D., GONÇALVES, D. J., DA SILVA, V. R. T., SOUZA, M. Two-dimensional Jordan algebras: Their classification and polynomial identities. Linear Algebra and its Applications, 664, 104-125, 2023.

Histórias de sucesso de alunas do projeto Caboclas Kirimbaua Auaeté na Ciência - Manaus/Amazonas

Soares, Karolline Vitória[115]; Amorim, Ana Júlia[116] e Albuquerque, Beatriz[117]

Resumo: *O projeto Caboclas Kirimbaua Auaeté é resultado da iniciativa de 7 professoras pesquisadoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Seu foco principal é estimular mulheres de diferentes idades para a área científica exata e tecnológica. A a importância de sua criação se mostra nas histórias de sucesso das alunas participantess.*

Palavras-chave: *Mulheres, ciência, STEM, empoderamento.*

INTRODUÇÃO

Apesar das mulheres representarem a maior fatia entre os matriculados no ensino superior, as questões de gênero não estão resolvidas na educação. Dados mostram que ao avançar em suas carreiras científicas, elas encontrarão cada vez menos colegas mulheres caminhando lado a lado [1]. Dentro das áreas STEM, motivos como preconceito, o sexismo e a discriminação fazem com que as meninas desistam ao longo do caminho e geram em suas mentes os estereótipos "de que aquele não é o seu lugar". Na realidade, os desafios começam até mesmo antes dos estudos. Dentro do âmbito familiar as meninas, muitas vezes, não são encorajadas a serem independentes, curiosas e criativas, qualidades consideradas importantes para quem deseja seguir um carreira em STEM.

Tendo em vista isto, projetos científicos voltados para meninas e mulheres que primam pelo objetivo de abrir espaços para o público feminino na sociedade, buscando quebrar preconceitos e esteriótipos, com isso são urgente e necessários. Dentro do contexto das áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM), os projetos científicos para meninas e mulheres visam fazer com o público feminino se introduza mais nesses meios, além disso buscam empoderá-las pessoal e profissionalmente.

Nesse contexto, o projeto Caboclas Kirimbaua Auaeté surgiu como uma iniciativa de 5 professoras pesquisadoras do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). O projeto vem sendo realizado com o apoio de agências brasileiras de fomento à pesquisa e divulgação científica, utilizando tanto a estrutura da UFAM quanto das escolas públicas envolvidas.

[115]Instituto de Ciências Exatas ICE/UFAM
[116]Instituto de Ciências Exatas ICE/UFAM
[117]Instituto de Computação-ICOMP/UFAM

No nível superior, as atividades visam o enriquecimento de habilidades matemáticas e a divulgação do conhecimento científico por mulheres não acadêmicas.

Além das cinco professoras do Departamento de Matemática, a equipe do projeto foi composta por: nove alunas de graduação, entre elas três bolsistas; sete professores do Ensino Básico, os ATPs, dos quais 5 foram bolsistas; e 30 alunas do ensino básico. A partir dessa equipe, foram desenvolvidos os subprojetos de Iniciação Científica, as oficinas, os minicursos, as exposições e os eventos. Atualmente, o Caboclas conta com a participação de mais duas professoras doutoras do DM/UFAM como voluntárias, Dra. Neilha Pinheiro e Dra. Somayeh Mousavinasr.

A importância da criação do Caboclas dentro do departamento de matemática da UFAM mostra por meio das histórias de sucesso das alunas que participaram como voluntárias ou bolsistas no projeto.

Histórias de sucesso

Durante a realização do projeto, é importante salientar que as alunas de graduação ministraram minicursos e oficinas de própria autoria e sob a supervisão da equipe de professoras da UFAM, e as alunas do ensino básico ministraram oficinas sob a supervisão de seus respectivos professores ATPs. Dessa forma, as participantes conseguiram desenvolver diversas habilidades e autonomia.

Caboclas de sucesso

Das integrantes do início do projeto, 5 alunas concluíram suas graduações em matemática licenciatura enquanto faziam parte do projeto Caboclas e permanecem como voluntárias, são elas: Ana Júlia Siqueira que atuou como aluna voluntária realizando o projeto de iniciação científica (PIBIC) *Árvore Genealógica Acadêmica*, atualmente é professora no Ensino Básico e está se preparando para ingressar no mestrado em Informática do Departamento de Computação da UFAM; Beatriz Albuquerque que atuou como bolsista no projeto realizando o PIBIC *Árvore Genealógica Acadêmica*, graduata em matemática licenciatura pela UFAM e mestra em Informática pelo Departamento de Computação da UFAM; Karolline Vitória atuou como voluntária no projeto e é aluna do Programa de Mestrado em Matemática no Departamento de Matemática da UFAM; Brenda Ester que atuou como bolsista no projeto desenvolvendo o PIBIC *A história do feminino no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) do curso de Matemática* e atualmente é professora no Ensino Básico; Simone Serudo que participou como bolsista no projeto realizando o PIBIC *Levantamento de dados da graduação e pós-graduação/Visibilidade das histórias de sucesso na Matemática* e está fazendo o curso de nivelamento do Programa de Pós Graduação em Matemática-PPGM da UFAM para se preparar para a prova do mestrado em Matemática com início em 2025.

Ademais, outras meninas ingressaram como voluntárias no projeto ao longo dos últimos anos. São elas: Maria Luísa Serrão Rodrigues da Cunha, Clara, Jaine, Ana Lúcia e Pâmela Arauja, as quais são graduandas em matemática na UFAM; Ana Gabriela, professora de Matemática empreendedora, graduada em Matemática Licenciatura; Leiliane Barbosa, professora de matemática da rede pública na Secretaria de Educação e Desporto Escolar-SEDUC; Amanda Rodrigues, graduada em matemática e engenharia pela UFAM; Iara, graduanda de engenharia elétrica pela UFAM; Wanessa Ferreira, mestra em matemática pela UFAM e doutoranda em matemática pela Universidade Federal do ABC-UFABC; Jamile Ibernoon, graduada em matemática licenciatura pela UFAM e coordenadora de matemática em escola particular.

Relato de experiência

Dentro do cenário do desenvolvimento de autonomia, habilidades diversas e empoderamento, é válido citar que em 2023 as alunas Beatriz Albuquerque, Ana Júlia Siqueira e Karolline Vitória foram apresentar dois artigos, que falavam sobre o projeto, na 10ª Celebração ACM das Mulheres na Computação: womENcourage™ 2023, a qual foi organizada pela Universidade Norueguesa de Ciência e Tecnologia (NTNU) em Trondheim, Noruega, de 20 a 22 de setembro de 2023 [2]. O womENcourage tem como objetivo conectar mulheres de diversas disciplinas técnicas e incentivá-las a prosseguir a sua educação e profissão em informática.

A participação das alunas nesse evento foi um marco para o projeto, pois pessoas de vários países conheceram o projeto e apresentaram sugestões de mais pesquisas que poderiam ser realizadas. Além disso, muitos profissionais (professores e alunos) incentivaram a continuação do projeto, enfatizando a importância do mesmo para nossa sociedade e mundo acadêmico, além da oportunidade para o crescimento pessoal e profissional de cada autora.

Conclusão

A participação e o protagonismo das alunas voluntárias ou bolsistas em todas as atividades ao longo do desenvolvimento do projeto Caboclas foi de máxima importância, contribuindo assim para a formação das mesmas de maneira integral, como cidadã e como profissional. De acordo com os seus próprios relatos, conseguiram desenvolver diversas habilidades tais como, comunicação, liderança, organização, trabalho em equipe, e, ampliaram seus conhecimentos sobre os diversos temas trabalhados durante o projeto, e, ministrados, muitas vezes por elas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Benmassoud, Jihane & Bouchara, Aicha. (2023). Women in STEM Education and Employment: Insights from University Students in Morocco. Utamax : Journal of Ultimate Research and Trends in Education. 5. 1-10. 10.31849/utamax.v5i1.12116.

[2] 10ª Celebração ACM das Mulheres na Computação womENcourage. Site: https://womencourage.acm.org/2023/.

Jogos lógicos para estímulo à cognição matemática: interações com as neurociências aplicadas à aprendizagem

Campelo, João Paulo Martins[118]; Cardoso, Fabrício Bruno[119]; Cunha, Kátia Machinez[120]

Resumo: *A utilização de jogos matemáticos como ferramenta pedagógica tem sido objeto de interesse crescente na área educacional. Este artigo é parte de uma dissertação de mestrado PROFMAT intitulada "Jogos Matemáticos para Desenvolvimento Cognitivo: Uma Visão Neuropsicopedagógica" e explora a relevância desses jogos na motivação matemática de estudantes do ensino fundamental e médio, com ênfase multidisciplinar. O estudo aborda a resistência de alguns educadores ao uso de jogos em sala de aula e destaca a necessidade de formação adequada dos professores para implementar esses recursos didáticos de maneira efetiva. Para responder à questão de pesquisa, o trabalho realiza uma revisão bibliográfica sobre o tema, identificando os jogos lógicos matemáticos mais utilizados. Além disso, examina as contribuições desses jogos para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. E, por fim, executou-se a Metodologia IDeAl desenvolvida com base nas neurociências aplicadas à aprendizagem numa amostra de 98 estudantes do ensino fundamental e médio de uma escola particular em Teresina-PI. A aplicação da Metodologia IDeAl evidenciou que jogos lógicos sensoriais aumentam o engajamento dos alunos e aprimoram a compreensão matemática, incentivando habilidades cognitivas através de raciocínios Dedutivo, Indutivo e Algorítmico. Este estudo avança o conhecimento acerca da utilização de jogos lógicos matemáticos como recursos didáticos efetivos no estímulo à motivação e a cognição matemática, oferecendo uma modalidade de aprendizagem que é simultaneamente envolvente e significativa.*

Palavras-chave: *Jogos lógicos, motivação, matemática, neurociências.*

INTRODUÇÃO

A matemática é fundamental na educação, embora muitos estudantes a vejam como desafiadora e pouco acessível. Dehaene (2022) reforça o poder da educação como o principal acelerador do nosso cérebro, atribuindo a complexidade da nossa sociedade ao progresso que a educação trouxe para o

[118]Centro Universitário Afya Uninovafapi/Departamento de Engenharia Civil
[119]Universidade Censupeg/Laboratório de Inovações Educacionais e Estudos Neuropsicopedagógicos (LIEENP)
[120]UFRJ/Núcleo de Divulgação Científica e Ensino de Neurociências da UFRJ

nosso córtex com o dom único para leitura, a escrita e a matemática. Desta forma, os resultados do PISA 2022 mostram que 73% dos estudantes brasileiros estão abaixo do nível 2 (considerado o mínimo para o exercício da cidadania) demonstrando a gravidade para o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, bem como para o avanço social e tecnológico brasileiro (PISA, 2022). Encontrar métodos para tornar a matemática mais atraente e sua aprendizagem mais significativa representa um desafio persistente. A aplicação de jogos matemáticos lógicos surge como uma estratégia eficaz, promovendo uma abordagem interativa e envolvente na aprendizagem matemática e no desenvolvimento de competências cognitivas críticas. De acordo com Ferreira e Almeida (2020), a hesitação de educadores em incorporar jogos educativos em suas metodologias de ensino frequentemente origina-se da insuficiente formação pedagógica voltada para estratégias lúdicas. Contudo, insights da neuropsicopedagogia, que integra conceitos das neurociências, psicologia cognitiva e educação, podem esclarecer o impacto positivo desses jogos no desenvolvimento cognitivo e na aprendizagem. Este estudo investiga a relação entre jogos matemáticos e neuropsicopedagogia, visando superar barreiras para sua implementação em sala de aula e realçar seu papel no fomento ao desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Por meio de uma revisão da literatura pertinente, o artigo identifica jogos eficientes e examina seu alinhamento com princípios das neurociências aplicadas à aprendizagem da matemática, sublinhando sua relevância para educadores e pesquisadores.

O papel dos jogos matemáticos no desenvolvimento cognitivo

Os jogos matemáticos têm desempenhado um papel significativo nas escolas como uma ferramenta para o desenvolvimento cognitivo em crianças, jovens e adultos. Através desses jogos, diversas habilidades cognitivas são trabalhadas, incluindo: (i) Raciocínio Lógico-Matemático: Os jogos desafiam os jogadores a pensar logicamente, aplicando conceitos matemáticos para resolver problemas, (ii) Resolução de Problemas: Ao enfrentar enigmas e quebra-cabeças matemáticos, os participantes desenvolvem suas habilidades de resolução de problemas, (iii) Tomada de Decisão: Os jogos exigem escolhas estratégicas, estimulando a capacidade de tomar decisões com base em informações disponíveis e (vi) Concentração: A imersão nos jogos requer foco e concentração, fortalecendo essa habilidade essencial. Estudos como o de Ribeiro et al. (2016) destacam esses benefícios, enfatizando a importância dos jogos matemáticos na promoção do desenvolvimento cognitivo. Além disso, Canuto et al. (2020) reforçam que esses jogos também contribuem para o aprimoramento de habilidades cognitivas essenciais. As funções executivas, que segundo Diamond (2013) são cruciais para o sucesso na escola e na vida, incluem as habilidades de memória de trabalho, controle inibitório e flexibilidade cognitiva. Os jogos matemáticos sensoriais não se limitam apenas ao domínio mental, segundo Santos et al. (2019) eles também têm se mostrado eficazes para aprimorar a coordenação motora dos participantes. Em resumo, os jogos matemáticos são motivadores e oferecem uma abordagem lúdica e eficaz para o desenvolvimento cognitivo, beneficiando tanto a mente quanto o corpo dos envolvidos.

A metodologia IDeAl de motivação e a cognição matemática

O desenvolvimento da metodologia abordou aspectos da neurociência aplicada à aprendizagem, com foco na compreensão dos processos cerebrais e nas mudanças que a utilização de jogos matemáticos provoca nos estudantes. A pesquisa inicial foi realizada pela terceira autora durante o Mestrado Profissional em Diversidade e Inclusão na Universidade Federal Fluminense- CMPDI/UFF com colaboração do Centro de Ciências e Cognição (CeCNuDCEN), vinculado à Universidade Federal do Rio de Janeiro. Seu objetivo foi promover a organização e adaptação de materiais didáticos inclusivos, visando o desenvolvimento da inteligência lógico-matemática. Para tal, elaborou, em forma de oficina prática intitulada "Cognição e Lógica", uma metodologia própria de aplicação organizada em quatro módulos lúdicos com os jogos lógicos adaptados em cor, forma e Braille objetivando a inclusão cognitiva de estudantes com deficiência visual. A aplicação dos jogos e da metodologia deu-se com dois grupos distintos de estudantes do ensino básico: aqueles que possuem visão normal (os videntes) e aqueles com deficiência visual e um grupo de educadores. Todos contribuíram na aplicação dos jogos, bem como na validação da metodologia, da jogabilidade, da aceitabilidade e da aplicabilidade dos jogos adaptados (CUNHA, 2017). A metodologia IDeAl, da mesma autora e desenvolvida com base na metodologia anterior, fundamenta-se na intervenção Neuropsicopedagógica voltada para a cognição e motivação matemática. Ela consiste na aplicação de três módulos lúdicos compostos pelos jogos Tangram, Cubo Soma, Torre de Hanói e Cubo Mágico, que pretendem estimular o raciocínio lógico (indução, dedução, algoritmo) e as funções executivas, graduados em diferentes níveis de dificuldades e com aplicação em longo prazo.

Aplicação e Resultados

As intervenções realizadas neste estudo seguiram o modelo já consolidado da Metodologia IDeAl. As atividades práticas com os jogos lógicos foram executadas nas aulas de matemática em um Colégio Particular de Teresina, Piauí com um universo de 98 estudantes do Ensino Fundamental II e Médio com duração de 2 meses em 2023. Os resultados revelaram uma notável eficácia da metodologia, evidenciando maior engajamento e motivação dos alunos ao interagirem com jogos táteis. A manipulação de objetos concretos estimulou a percepção sensorial dos alunos, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Uma das limitações do estudo foi a amostra restrita, portanto sugere-se que pesquisas futuras explorem uma gama mais ampla de instituições de ensino e incorporem estudos longitudinais para uma compreensão mais abrangente dos efeitos da Metodologia IDeAl no aprendizado e no desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Sua abordagem ativa contribui para a formação de estudantes mais engajados, autônomos e preparados para enfrentar desafios complexos. A Metodologia IDeAl, ao segmentar seu protocolo em três módulos distintos - Dedutivo, Indutivo e Algorítmico - e ao oferecer jogos lógicos em diferentes níveis de dificuldade, proporcionou uma progressão gradual no desenvolvimento das habilidades matemáticas e cognitivas dos alunos. Cada módulo abordou aspectos específicos do pensamento matemático: o raciocínio dedutivo promoveu a análise e a lógica, o indutivo estimulou a observação e a generalização, enquanto o algorítmico desafiou os estudantes a desenvolverem estratégias sistemáticas para resolver problemas mais complexos. A abordagem estruturada prepara os alunos para enfrentarem desafios cada vez mais exigentes ao longo de sua jornada educacional, oferecendo uma base sólida para o desenvolvimento cognitivo.

CONCLUSÕES

A perspectiva multidisciplinar do estudo na interação com a neuropsicopedagogia, oferece contribuições substanciais para a educação matemática. Os resultados destacam a eficácia dessa abordagem inovadora, evidenciando maior engajamento e compreensão dos estudantes ao integrar jogos lógicos sensoriais ao processo de ensino. Além disso, ressalta-se a importância de uma formação adequada para os professores na implementação de práticas que estimulem o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, sugerindo a criação de recursos pedagógicos lúdicos e sensoriais que facilitem sua aplicação em sala de aula de forma inclusiva, promovendo uma educação matemática mais significativa e eficaz. Ao adotar uma visão neuropsicopedagógica, o artigo destaca a relevância de estratégias que envolvam jogos matemáticos no ensino para melhorar o aprendizado e o desenvolvimento cognitivo dos alunos. A proposta de criar produtos educacionais tangíveis que incorporem essas práticas visa facilitar sua implementação nas escolas, promovendo impactos positivos mais amplos na educação básica. A abordagem não apenas fortalece o aprendizado da matemática, mas também capacita os alunos a enfrentarem desafios com confiança e habilidades sólidas, contribuindo assim para avanços significativos na qualidade da educação de forma abrangente.

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMPELO, J. P. M.. Jogos matemáticos para desenvolvimento cognitivo: uma visão neuropsicopedagógica. 2023. 110 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências da Natureza, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2023.

[2] CANUTO, L. T. S. et al. O uso de jogos matemáticos para o desenvolvimento cognitivo de estudantes do Ensino Fundamental. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 11, n. 1, p. 22-37, 2020.

[3] CUNHA, K.M. Neurociências e matemática: organização e adaptação inclusiva de material didático para desenvolvimento da inteligência lógico-matemática. Dissertação de mestrado profissional em Diversidade e Inclusão da Universidade Federal de Fluminense, 2017. Niterói:UFF. <http://cmpdi.uff.br/2017-2/> Acesso em 2024.

[4] DEHAENE, Stanislas. É assim que aprendemos: por que o cérebro funciona melhor do que qualquer máquina (ainda . . .). Traduçao Rodolfo Ilari. São Paulo: Contexto, 2022.

[5] DIAMOND, A. Executive functions. Annual Review of Psychology, v. 64, p. 135-168, 2013.

[6] FERREIRA, J.S. & Almeida, L.F. (2020). A resistência pedagógica ao uso de jogos educativos: Uma análise da formação de professores. Revista Brasileira de Educação e Pedagogia, 45(2), 334-349.

[7] INEP: Divulgados os resultados do PISA 2022. Extraído <pisa2022maths.oecd.org/pt/index.html#Content-Knowledge> Acesso em 21/03/2024.

[8] RIBEIRO, J. P. et al. Jogos matemáticos e o desenvolvimento cognitivo de estudantes do ensino fundamental. Revista Diálogo Educacional, v. 16, n. 48, p. 199-215, 2016. Acesso em: 21/03/2024.

[9] SANTOS, F. P. et al. Aprendizagem significativa por meio de jogos educacionais na disciplina de matemática. In: Encontro Nacional de Ensino de Química, 23., 2021, online. Anais do XXIII ENEQ. Campinas, SP: Galoá, 2021.

A regra dos sinais em $\mathbb{Z}$

Conteúdo adaptado para crianças com deficiência intelectual

Rocha Braga, Kayla[121]

Resumo: *Este artigo tem como objetivo apresentar um protótipo de livro didático com conteúdo adaptado de Matemática do 7º ano do ensino fundamental para crianças que possuem deficiência intelectual. Utilizei de imagens coloridas e de linguagem simples, mas sem fugir do rigor da escrita que a Matemática exige. Para o estudo da regra fiz o uso de dois cartões, um de cor verde que representou (+1) e um de cor amarela que representou (-1). Parti da ideia de um se anular com o outro, e daí desenvolver todas as demais regras para a adição e subtração. Já na multiplicação e divisão utilizei a ideia de gavetas, uma de cor verde que mantém a cor dos cartões, e consequentemente, o sinal, e outra de cor amarela, essa foi denominada de "gaveta especial", pois ela inverte a cor do cartão, ou seja, ela inverte o sinal do número. Seguindo essa lógica foi desenvolvida as regras dos Números Inteiros.*

Palavras-chave: *Regra dos sinais, números inteiros, conteúdo adaptado, deficiência intelectual.*

INTRODUÇÃO

Inicio este parágrafo por meio de um questionamento: Como ensinar Matemática para uma criança que possui deficiência intelectual, uma vez que possui limitações na área do funcionamento intelectual, ou seja, uma área que se refere à capacidade de aprender a raciocinar, tomar decisões e resolver problemas?

Ano passado fui impulsionada a elaborar algo que pudesse ajudar a minha filha primogênita que nasceu com a Trissomia do Cromossomo 21, que conhecemos como Síndrome de Down. Ela saía dos anos iniciais, que geralmente há um(a) professor(a) polivalente, e passava para os anos finais, onde havia dez professores, denominados professores especialistas e horistas. Quando fui surpreendida com a pergunta de seu professor de Matemática ao me interrogar de que forma ele poderia ajudar a minha filha na Matemática, e como seriam adaptados os conteúdos, sendo que ele não sabia nem por onde começar.

Nesse momento, dei-me conta de que a criança, de 11 anos em diante, já entra numa nova fase, e segundo Piaget (2007), esta fase é o estágio das operações formais em que as estruturas cognitivas atingem seu nível mais elevado de desenvolvimento. É nessa fase que a criança começa a abstrair os conceitos matemáticos, ela não apenas é capaz de pensar logicamente como também de formular hipóteses e buscar soluções.

A partir de então comecei os estudos que falassem sobre a deficiência intelectual para então produzir um livro didático que pudesse auxiliar a minha filha e as demais crianças com a condição genética iguais a ela.

[121]Professora do Departamento de Matemática - UFMA e Sócia da Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Deficiência Intelectual, o Quociente Intelectual e a Acessibilidade por meio da comunicação

A Deficiência Intelectual (DI) é um transtorno do desenvolvimento que inclui prejuízos intelectuais e adaptativos, nos domínios conceitual, social e prático (Tomaz et al, 2017). A pessoa que nasce com DI implica déficits em funções que estão ligadas diretamente ao intelecto, tais como, o raciocínio, a resolução de problemas, pensamento abstrato, julgamento e às funções adaptativas, ou seja, há limitações em habilidades sociais e práticas cotidianas.

O diagnóstico da DI fundamenta-se em testes padronizados para a análise da capacidade cognitiva. A inteligência é avaliada por meio do Quociente de Inteligência (QI). O QI médio é de 100, sendo que a maioria das pessoas pontua entre 85 e 115, já o resultado de uma pessoa com Transtorno de Desenvolvimento Intelectual nestes testes situa-se em menos que 70, conforme discorrido no Protocolo para o Diagnóstico Etiológico da Deficiência Intelectual.

Acessibilidade por meio da comunicação

A acessibilidade de uma pessoa com deficiência começa pela comunicação, e para que a comunicação se torne acessível é preciso adaptar conteúdos em linguagem simples. Tornar a linguagem simples significa adaptar as informações contidas em um texto, utilizando palavras simples e curtas, e vale destacar que se utiliza palavras mais simples, mas tendo o cuidado de se manter o rigor das definições em que cada área de conhecimento exige.

A Regra dos Sinais: conteúdo adaptado para o 7º ano do ensino fundamental

Final do mês de março do corrente ano, realizei o pré-lançamento do livro didático, intitulado "Matemática Inclusiva e suas descobertas", com conteúdo adaptados para o 7º ano do ensino fundamental, tais como, o Conjunto dos Números Inteiros (Z), o Módulo de um Número e a Regra dos Sinais.

A seguir apresento, de forma breve, para situar o leitor o que foi proposto neste livro didático adaptado às pessoas com deficiência intelectual.

Para a regra dos sinais utilizamos a ideia de um jogo com suas respectivas regras, e para isso, consideramos o uso de dois cartões, um de cor verde representando (+1) e um de cor amarela representando (-1), conforme a ilustração:

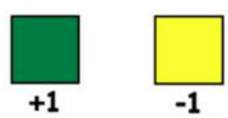


Fig. 36: Autoria própria

A regra destacada foi que "um cartão verde se anula com um amarelo, ou seja, cada vez que você juntar um cartão verde com um cartão amarelo, eles serão eliminados do jogo". Essa regra utilizei para as operações da adição e subtração. Já para a multiplicação e divisão utilizei a ideia de organizar os cartões em gavetas, assim como essas:

Fig. 37: Autoria própria

A gaveta positiva de cor verde mantém a cor do cartão, ou seja, vai manter o sinal do número. Já a gaveta amarela foi denominada como especial, pois ela inverte a cor do cartão, ou seja, ela vai inverter o sinal do número.

Como exemplo, segue a imagem abaixo:

Fig. 38: Autoria própria

Pode-se ver que há 3 gavetas verdes guardando, cada uma, dois cartões amarelos. Como a gaveta verde mantém a cor do cartão, então no total teremos 6 cartões amarelos.

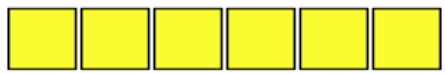


Fig. 39: Autoria própria

Nessa lógica, foi desenvolvida as regras dos sinais e partiu-se para os registros dos cálculos.

CONCLUSÕES

Há inclusão quando todos os alunos, independentemente de sua deficiência, estejam inseridos no processo de ensino e aprendizagem. É preciso adaptação curricular em todos os níveis de ensino e em todas as áreas de conhecimento, inclusive a Matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] Júnior, G., Ruy, J.; **A conquista da matemática : 7º ano : ensino fundamental : anos finais**. Benedicto Castrucci. 4. ed. São Paulo.FTD, 2018.

[2] Piaget, J.; **Epistemologia genética**. São Paulo: Martins Fontes, 2007. PROTOCOLO PARA O DIAGNÓSTICO ETIOLÓGICO DA DEFICIÊNCIA INTELECTUAL. Disponível em https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/pcdt/arquivos/2020/deficiencia-intelectual-protocolo-para-o-diagnostico-etiologico.pdf Acesso em abril de 2024.

[3] Tomaz, R.V.V.; **Impacto da deficiência intelectual moderada na dinâmica e na qualidade de vida familiar**.: um estudo clínico-qualitativo in Cadernos de Saúde Publica, 2017.

Quebra-cabeça do cálculo:

Um instrumento didático que relaciona o tangram a métodos de integração.

Gusmão, Arlene Vieira[122]; Silva, Laissa Vitória Barbosa[123] e Nunes, Marly dos Anjos[124]

Resumo: *O referido trabalho descreve uma prática vivenciada em um experimento em sala de aula da disciplina laboratório de ensino em cálculo II, com alunos da turma de matemática da Universidade Federal do Pará, no município de Bragança, além disso propõe aos professores de ensino superior um instrumento didático que envolve o lúdico do tangram a conteúdos relacionados ao cálculo diferencial e integral, em particular, os métodos de integração por substituição trigonométrica e frações parciais. As peças do quebra-cabeça são compostas por 2 triângulos grandes, 2 triângulos pequenos, 1 triangulo médio, 1 quadrado e 1 paralelogramo, todos de cores distintas permitindo que o aluno relacione o conteúdo com a dinâmica, potencializando o ensino e aprendizagem.*

Palavras-chave: *Recurso didático, Tangram, cálculo diferencial e integral.*

INTRODUÇÃO

A realidade dos alunos na academia de matemática é o contato com as diversas disciplinas que envolvem conceitos abstratos, notações e linguagens formais da área. Nas referências, pouco se vê metodologias lúdicas relacionadas ao conteúdo do cálculo diferencial e integral que colaborem com ensino e aprendizagem. Diante disso, observamos, descremos e propomos um recurso didático que avalie neste processo, conforme Mendonça (2010, p.06), o lúdico

> [...] possibilita transformar os envolvidos no aprendizado (discentes e docentes) em sujeitos do processo de construção do conhecimento, colocando a realidade o cotidiano do aluno como elemento chave para o estudo da disciplina e conhecimentos envolvidos nessa área. Como consequências, algumas mudanças na forma de ver e encaminhar a aula, a relação professor-aluno e avaliação deverão ser modificadas no âmbito desta proposta.

Uma das atividades laboratoriais lúdicas são os jogos, assim, o presente trabalho descreve e propõe um instrumento didático, aliado ao docente quebrando a formalidade do ensino tradicionalista e favorece ao discente um aprendizado atrativo e interessante. Com base na proposta do laboratório de ensino em cálculo diferencial e integral, elaboramos o quebra-cabeça do cálculo, tendo como inspiração o tangram , não se limitando somente ao reconhecimento de figuras e cores, mas também aos métodos de integração que interagem com elas.

[122]Afiliação. Universidade Federal do Pará, arlene2811@gmail.com
[123]Afiliação. Universidade Federal do Pará, laissavitoria045@gmail.com
[124]Afiliação. Universidade Federal do Pará, marlynunes@ufpa.br

Objetivo Geral

Apresentar um instrumento didático como produto de intervenção pedagógica na educação superior, destinado a melhoria na qualidade de ensino e na potencialização de aprendizagem.

Objetivos Específicos

- Destacar a adequação da ludicidade do tangram aos métodos de integração do cálculo diferencial e integral.
- Motivar os discentes a fim de potencializar a aprendizagem de forma prazerosa.
- Provocar nos docentes, o interesse em buscar recursos dinâmicos em suas práticas de laboratório de ensino.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

A idealização do quebra-cabeça do cálculo, surgiu após uma amostra de jogos apresentada pela docente, pois viabilizou o conhecimento primário do que poderíamos apresentar e interagir com os demais alunos. A confecção ocorreu após diversos diálogos sobre o jogo tangram, e como se daria a relação do jogo com o conteúdo matemático, para que assim conseguíssemos juntar a recreação e o processo de ensino aprendizagem. O processo de construção pode ser descrito em quatro momentos: compreensão das regras da composição do jogo; adaptação da ementa (integração por substituição trigonométrica e de funções racionais por frações parciais) e a confecção do protótipo.

O jogo é composto por sete peças: 2 triângulos grandes; 1 triangulo médio; 2 triângulos pequenos; 1 quadrado e 1 paralelogramo, designado para introduzir conhecimento de figuras geométricas, idealizamos montar a palavra “matemática” e “cálculo II”, porém a quantidades de letras em matemática é maior que em cálculo II o que nos fez introduzir uma figura (boneco). Ressaltamos que cada figura seja composta por 7 peças geométricas que se conectam de acordo com relações que envolvem os métodos de integração.

Confeccionamos o jogo usando folhas de E.V.A com sete cores distintas, caneta em gel preta, uma tesoura e buscando relações coerentes aos métodos de integração para o melhor encaixe das figuras formando o quebra-cabeça. Durante a prática do laboratório de ensino de cálculo, os alunos da graduação protagonizaram a relação teórica e prática.

Fig. 40: Autoria própria

Segundo Piaget (1973),

> “à atividade direta do aluno sobre os objetos do conhecimento é o que ocasiona aprendizagem – o jogo assume a característica de promotor da aprendizagem. Ao ser colocado diante de situações de brincadeira, o aluno compreende a estrutura lógica do jogo e, poderá compreender a estrutura matemática presente neste jogo”.

Foi analisado o desempenho de duas equipes, cada equipe formada por cinco integrantes que interagiam de forma a alcançar o objetivo do jogo, formar as palavras encaixando as peças de acordo com os conhecimentos de cálculo.

Fig. 41: Autoria própria

Segundo Moura (1992, p.47) diz que:

> “o jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propicia a aquisição de habilidades, permite o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento laboral”.

A legítima educação é aquela que aguça o progresso intelectual, que motiva a observação e organiza a estruturação do conhecimento, por esta razão, acreditamos que instrumentos educacionais potencializam a aprendizagem.

Regras do jogo

A dinâmica pode ser disputada por 2 ou mais grupos (a depender do mediador) para a competição, permitindo a socialização do conteúdo e a criação de estratégias. O objetivo dos jogadores é formarem as palavras “MATEMÁTICA” e “CÁLCULO II”, cuja peças se encaixem de acordo com as suas respectivas relações, a dinâmica terá como vencedor a equipe que primeiro concluir a palavra determinada, caso a dinâmica extrapole o tempo de 40 minutos, vencerá quem conseguir montar o maior número de letras

Fig. 42: Autoria própria

CONCLUSÕES

O instrumento didático proposto passou por uma breve aplicação durante a disciplina de laboratório de ensino em cálculo infinitesimal e tem o propósito de compartilhar um recurso que relaciona as abstrações do cálculo com a ludicidade do tangram . Acreditamos que essa alternativa favorece a melhoria na qualidade do ensino e potencializa a aprendizagem. É notória a importância de se produzir trabalhos nesse sentido, uma vez que percebemos a insatisfação dos alunos diante de práticas tradicionais, que se resumem a resolver listas de exercícios. E alternativas pedagógicas tornam o abstrato mais fácil de ser compreendido.

BIBLIOGRAFIA

[1] PIAGET, Jean. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo,e sonho, imagem e representação**. Trad. Alvaro Cabral. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 1973.

[2] MOURA, Manoel Oriosvaldo de. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. Série Ideias n.10, São Paulo: FDE, 1992.p.45-53. Disponível em:<http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_10_p045-053_c.pdf> Acesso em: 26abr.2024.

[3] MENDONÇA, S. **A matemática nas turmas de PROEJA:** O lúdico como facilitador da aprendizagem. Holos. v.3, ano 26. p. 136-149. Natal, Rio Grande do Norte. 2010.

Preferência e dificuldades de alunos do Ensino Médio em relação à Matemática

Costa, Larissa Fonseca[125]; Reis, Ruam Waldiney Santos dos[126] e Thijn, Gerlândia de Castro Silva[127]

Resumo: *Para a realização deste trabalho a coleta dos dados foi realizada por meio de um questionário, respondido por 767 alunos do Ensino Médio, do primeiro ao terceiro ano, de seis (6) escolas da rede pública estadual de educação, presentes no município de Castanhal-PA. Focou-se nos questionamentos que envolviam a Matemática e a área de exatas, com o intuito de compreender a identificação e dificuldades dos alunos em relação à disciplina e sua respectiva área. Além disso, por meio da contribuição de Tatoo e Scapin (2004) foi possível analisar os resultados obtidos por meio desta pesquisa. Os dados coletados mostraram que cerca de* $56,7\%$ *dos alunos afirmaram possuir dificuldades em cálculo e* 10% *responderam ter preferência por cursos das áreas de exatas. A matemática por ser um campo de estudos abstrato, necessita que o professor em sua prática de ensino, incorpore práticas pedagógicas que familiarize os alunos com os conceitos e conteúdo, de modo mais concretos e/ou contextualizado, gerando uma aprendizagem mais significa e que contribua para o desenvolvimento social e profissional dos alunos.*

Palavras-chave: *Ensino médio, dificuldades em matemática, aprendizagem matemática, identificação profissional.*

INTRODUÇÃO

A Matemática enquanto componente obrigatório e essencial do currículo da Educação Básica, é vista por muitos alunos como sendo de complexa compreensão, gerando certa oposição dos mesmos perante ao estudo dessa disciplina. Ao longo desse nível de educação percebe-se que a dificuldade com a matemática gera uma dicotomia. De um lado temos estudantes que não conseguem vislumbrar a importância desse componente no seu dia a dia, para resolução de problemas, passando a decorar as fórmulas apenas com o intuito de promoção de uma série para outra, sem de fato aprenderem a utilizá-las cotidianamente e ao longo da vida. Enquanto isso, temos docentes que querem ajudar a

[125] Graduanda de Licenciatura em Pedagogia da Universidade Federal do Pará (UFPA), `larissafonse2002@gmail.com`

[126] Graduando de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), `ruamsantos2806@gmail.com`

[127] Docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), `gerlandia@ufpa.br`

resolver essa questão, mas sentem-se perdidos em como repassar uma matemática contextualizada, retornando sempre ao ensino tradicional, mecânico e passivo, no qual os assuntos são repassados sem que haja uma resposta ativa e investigativa dos alunos, as questões apresentadas nas aulas de matemática.

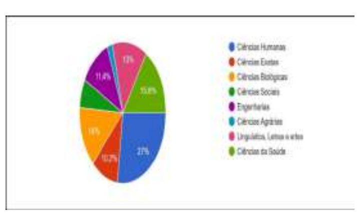
Com o intuito de conhecer o perfil do estudante para o ingresso na universidade, o projeto de extensão "Mostra Itinerante Universidade e Inclusão Social: o perfil do estudante para o ingresso na universidade e ações de intervenção", o qual é financiado pela Pró-Reitoria de Extensão (PROEX) da Universidade Federal do Pará (UFPA), disponibilizando duas bolsas que custeiam a permanência de dois bolsistas no respectivo projeto, que além disso, contam com auxílio de voluntários. A mostra inclui pesquisas de levantamento e ações extensionistas, a qual levantou alguns dados referentes aos alunos do Ensino Médio em relação as atividades que eles possuíam mais dificuldades em realizar e com qual área eles mais se identificavam.

A coleta dos dados foi realizada por meio de um questionário, respondido por 767 alunos do Ensino Médio, do primeiro ao terceiro ano, de seis (6) escolas da rede pública estadual de educação, presentes no município de Castanhal-PA. Para realização deste trabalho focou-se nos questionamentos que envolviam a Matemática e a área de exatas, com o intuito de compreender a identificação e dificuldades dos alunos em relação à disciplina e sua respectiva área. Além disso, por meio da contribuição de Tatoo e Scapin (2004) foi possível analisar os resultados obtidos por meio desta pesquisa. É fundamental reconhecer que a aprendizagem matemática é um processo que envolve não apenas a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também aspectos psicológicos, sociais e motivacionais, um aumento do engajamento dos estudantes nas atividades. Compreender a importância da articulação entre a matemática escolar e a matemática cotidiana permite aos educadores criar conexões significativas entre os conceitos abstratos ensinados em sala de aula e as aplicações do mundo real, tornando a aprendizagem mais relevante e envolvente para os alunos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Durante as visitas realizadas pelo projeto às escolas, percebeu-se que ao falarmos da matemática alguns alunos demonstraram certo receio com disciplina ou quando não, revelavam gostar, mas que tinha dificuldades em aprender os conteúdos matemáticos. Para Tatoo e Scapin (2004) esse discurso que envolve a matemática como sendo disciplina difícil, complexa e que poucos conseguem aprender construiu-se histórico e socialmente. No repasse das narrativas entre as gerações, criou-se essa ideia pré-concebida da matemática, influenciando diretamente como os estudantes concebem a disciplina. Dos 767 estudantes que responderam ao questionário, aproximadamente de 10% responderam ter preferência por cursos das áreas de exatas (Figura 1). Isso afirma as ideias de Tatoo e Scapin (2004) ao dizerem que "Seguidamente, estudantes escolhem profissões, nas quais, necessariamente, não envolva o raciocínio matemático" (2004, p. 2).

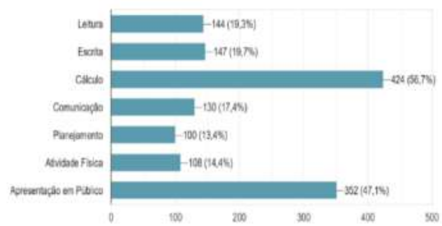
Fig. 43: Áreas profissionais



Fonte: Questionário do Projeto

Outro questionamento feito aos alunos foi qual(is) atividade(s) eles têm mais dificuldade(s) em realizar, apresentadas na Figura 2. De acordo com os dados, em terceiro lugar ficou a leitura $(19,3\%)$, em segundo a apresentação em público $(47,1\%)$ e em primeiro lugar o cálculo com $56,7\%$ das respostas. Isso ascende um alerta, já que essas atividades geram habilidades essenciais para o desenvolvimento social, profissional, psicológico e mental dos estudantes, os quais são aspectos dos objetivos definidos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, 1996) para o Ensino Médio.

Fig. 44: Dificuldades em Atividades



Fonte: Questionário do Projeto

De acordo com Tatoo e Scapin (2004) existe algumas explicações para que os estudantes percebam a aprendizagem matemática da forma como estamos discutindo nesse trabalho. As autoras ao pesquisarem o porquê do nível elevado de rejeição dos alunos em relação à matemática, nos apresentam alguns fatores, como: ideias pré- concebidas e repassadas de que a matemática é difícil e complexa, a falta de estímulos que motivem os alunos a estudarem matemática e descontextualização do ensino, que leva os estudantes a não conseguirem perceber a importância e essencialidade da matemática para o desenvolvimento humano.

CONCLUSÕES

Atualmente muito se discute sobre uma educação mais contextualizada, que prepare os alunos para o mundo real e que o ensino seja articulado com as diferentes áreas do conhecimento. Até mesmo a Base Nacional Comum Curricular (2018) na parte específica do ensino de matemática, ao descrever as competências que devem ser desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio, deve envolver justamente a autonomia na utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.

A matemática por ser um campo de estudos abstrato, necessita que o professor em sua prática de ensino, incorpore práticas pedagógicas que familiarize os alunos com os conceitos e conteúdo, de modo mais concretos e/ou contextualizado, gerando uma aprendizagem mais significa e que contribua para o desenvolvimento social e profissional dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação, 2018.

[2] Brasil; **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.** Lei n° 9.394/96. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Senado Federal, 1996.

[3] Tatoo, F.; Scapin, I.; **Matemática: por que o nível elevado de rejeição?.** Revista de Ciências Humanas, vol. 5, n. 5, 2024.

Matrizes centrossimétricas em teoria invariante

Manoel, Miriam[128] e Oliveira, Leandro N.[129]

Resumo: *Sabe-se que existem bases de Hilbert para o anel de polinômios invariantes pela ação de um grupo compacto ou redutivo em espaços euclidianos. Nesta comunicação, passeamos um pouco sobre a história das matrizes centrossimétricas e a usamos para exibir uma classe de grupos não compactos e não redutivos agindo no espaço de Minkowski, cujo anel de polinômios invariantes por tal ação possui uma base Hilbert.*

Palavras-chave: *teoria invariante, matrizes centrossimétricas, espaço de Minkowski.*

INTRODUÇÃO

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é dita centrossimétrica se

$$a_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}, \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}.$$

Essas matrizes foram definidas no século XIX por Zehfuss, em 1862 [7]. Nas décadas seguintes, pouco se estudou, sendo que a maior parte da pesquisa sobre tais matrizes avançou a partir de 1970, mais de 100 anos após a sua definição.

Quem testemunhou esse início tímido e com pouco engajamento dos pesquisadores da época jamais imaginaria a importância que essas matrizes ganhariam em inúmeras aplicações. Por exemplo, no cálculo de probabilidades e na análise de séries temporais [1], em áreas da engenharia e física como reconhecimento de padrões, teoria de antenas, física quântica, vibração em estruturas, oscilador quântico-mecânico, teoria da comunicação e análise de fala, conforme pode ser observado em [2] e [3]. Isso, por si só, já demonstra a relevância dessa classe de matrizes.

Por outro lado, temos a teoria invariante e equivariante, que estuda a invariância de aplicações polinomiais sob a ação de um grupo de Lie em um espaço. O conjunto formado por todas essas aplicações possui a estrutura de um anel. Se o conjunto de polinômios que gera esse anel for finito então tal conjunto é chamado de *base de Hilbert* [4]. Hilbert mostrou que se um grupo de Lie agindo num espaço V é compacto, então este anel possui uma base de Hilbert. Um estudo sobre teoria invariante no espaço de Minkowski pode ser encontrado em [6].

[128]ICMC-USP

[129]UFSCar, este autor é parcialmente financiado por Fapesp 2022/12906-3

O problema da não compacidade do grupo de Lie

Sabe-se que, em geral, não existe base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes pela ação de um grupo de Lie não compacto. Sendo assim, um problema em aberto até hoje é determinar para quais classes de grupos de Lie existe uma base de Hilbert.

Em 1976, Luna [5] mostrou que existe uma base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes pela ação de um grupo de Lie redutível. No entanto, desde então, houve pouco avanço significativo nesse campo.

CONCLUSÕES

Nesta comunicação, mostramos como o uso das matrizes centrossimétricas, como ferramenta, nos ajudou a demonstrar que o anel dos polinômios invariantes sob a ação de uma classe de grupos de Lie não compactos, agindo no espaço de Minkowski, possui uma base de Hilbert.

BIBLIOGRAFIA

[1] DAGUM, Estela Bee; GUIDOTTI, Laura; LUATI, Alessandra. Some statistical applications of centrosymmetric matrices. In: **New Developments in Classification and Data Analysis: Proceedings of the Meeting of the Classification and Data Analysis Group (CLADAG) of the Italian Statistical Society**, University of Bologna, September 22–24, 2003. Springer Berlin Heidelberg, 2005. p. 97-104.

[2] DATTA, Lokesh; MORGERA, S. Some results on matrix symmetries and a pattern recognition application. **IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing**, v. 34, n. 4, p. 992-994, 1986.

[3] DATTA, Lokesh; MORGERA, Salvatore D. On the reducibility of centrosymmetric matrices—applications in engineering problems. **Circuits, Systems and Signal Processing**, v. 8, p. 71-96, 1989.

[4] GOLUBITSKY, Martin; STEWART, Ian; SCHAEFFER, David G. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory: Volume II**. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] LUNA, Domingo. Fonctions différentiables invariantes sous l'opération d'un groupe réductif. In: **Annales de l'institut Fourier**. 1976. p. 33-49.

[6] MANOEL, Miriam; OLIVEIRA, Leandro N. Equivariant mappings and invariant sets on Minkowski space. In: **Colloquium Mathematicum**. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 2022. p. 93-107.

[7] ZEHFUSS, G. Zwei Sätze über determinanten. **Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik**, v. 7, p. 436-439, 1862.

Desigualdade isoperimétrica

Uma aplicação no ensino da matemática básica

Souza, Leonardo[130]; Ponciano, Vitor[131];

Resumo: *O teorema da desigualdade isoperimétrica é um princípio fundamental na geometria que estabelece uma relação entre a área e o perímetro de uma figura no plano. Em termos simples, ele afirma que entre todas as figuras com uma dada área, a que possui o menor perímetro é o círculo. Este teorema tem implicações profundas em várias áreas da matemática e também em aplicações educacionais.*

Palavras-chave: *Desigualdade isoperimétrica, polígono regular, círculo, área, perímetro.*

INTRODUÇÃO

Neste estudo, exploramos o teorema da desigualdade isoperimétrica no plano e sua relevância para o ensino da matemática. De acordo com os escritos de Euclides [1], é afirmado que "entre os retângulos com o mesmo perímetro, o quadrado é aquele que contém a maior área".

De forma mais ampla, é possível demonstrar que, entre todos os polígonos de n lados com o mesmo perímetro, o polígono regular de n lados é o que possui a maior área, como mencionado em [4, 3]. Este resultado sugere intuitivamente que "entre todas as figuras planas com o mesmo perímetro, o círculo é aquele que possui a maior área".

Sejam C uma curva plana, simples e fechada de comprimento l, e A a área delimitada por C. Então,

$$l^2 - 4\pi A \geq 0. \tag{14}$$

Esta desigualdade é conhecida como *desigualdade isoperimétrica*. Além disso, convém observar que dentre todas as curvas planas fechadas e simples de comprimento l, aquela que limita maior área é um círculo.

Como podemos introduzir aos alunos a Desigualdade Isoperimétrica de maneira prática e visual, sem a necessidade de demonstrações matemáticas complexas?

Uma maneira de responder a essa pergunta seria afirmar que se uma figura plana tem área A e perímetro l, então

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}. \tag{15}$$

[130]Colégio Pedro II, RJ

[131]Centro de Análise e Sistemas Navais- Marinha do Brasil. Estes autores foram apoiados Fundep

Os alunos podem testar formas geométricas simples como triângulos, quadrados, retângulos e círculo. Isso os ajuda a entenderem o conceito de área e perímetro de maneira concreta antes de aplicá-lo a figuras mais complexas. É possível demonstrar que a área de figuras planas, como triângulos, quadrados e retângulos, é sempre menor ou igual à área de um círculo com o mesmo perímetro.

Ou seja, se a figura for um círculo, então:

$$A = \frac{l^2}{4\pi} = \left(\frac{2\pi R}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2. \tag{16}$$

O resultado em (3) afirma que este máximo só é atingido quando a curva é uma circunferência. É importante esclarecer aos alunos que a demonstração de (2) existe, mas é demasiadamente rigorosa para o nível deles, exigindo conhecer ferramentas além da matemática abordada no ensino básico.

Agora considerando apenas os retângulos, qual é aquele que tem área máxima?

Nesse caso, poderia propor-se, primeiro, aos alunos que verificassem a desigualdade em (4)

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2. \tag{17}$$

o que se prova ser equivalente a $(a-b)^2 \geq 0$. De fato,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0. \tag{18}$$

Tomando a e b como medidas dos lados desse retângulo, chamando de A sua área e de l seu perímetro, segue por (5) e usando a desigualdade $\pi < 4$ (que implica em $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$)

$$A \leq \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{4}.\frac{1}{4} < \frac{l^2}{\pi}.\frac{1}{4} = \frac{l^2}{4\pi} \Leftrightarrow A \leq \frac{l^2}{4\pi} \tag{19}$$

Isso mostra aos alunos a desigualdade isoperimétrica.

Então, para concluir o problema, a área máxima ocorre quando

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow (a-b) = 0 \Leftrightarrow a = b. \tag{20}$$

Portanto, o retângulo de área máxima é, de fato, um quadrado.

Acreditamos ser importante que o professor da Educação Básica procure ampliar o conhecimento sobre temas da matemática e não se ater apenas ao que ensinará em sala de aula, buscando assim enriquecer a sua didática através de diversas formas de abordagem [2]. Nas aplicações, o resultado pode ser trabalhado em sala de aula, através das menções de polígonos regulares e quadriláteros, usando o conceito intuitivo de curvas. Tais figuras planas são consideradas como casos particulares das curvas em que a desigualdade está relacionada, de modo que o aluno visualize o problema isoperimétrico, deduza e através de pistas seja capaz de mostrar a importância de vários resultados matemáticos. Assim como foi desenvolvido ao longo dessa pesquisa, a desigualdade isoperimétrica pode ser caracterizada como um dos resultados mais importantes no caso de curvas planas de Jordan e regulares, pois relaciona dois elementos que são mencionados amplamente em sala de aula, nos mais diversos níveis: a área e o perímetro de uma figura plana. Trabalhos futuros apontam na direção de verificar a validade da desigualdade isoperimétrica no plano a partir de outras curvas já apresentadas no Ensino Básico. Além disso, sugerimos o aprofundamento deste tema, inserindo o estudo desta desigualdade em espaços de dimensões maiores.

BIBLIOGRAFIA

[1] EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução diretamente do Grego Clássico por Irineu Bicudo. Editora Unesp, 2009.

[2] MELO, M.; MARTINS, C.H.S. **A desigualdade isoperimétrica: aspectos históricos e um esboço de sua demonstração para alunos do Ensino Médio**. *Revista Thema*, vol. 21, no. 2, 2022, p. 563-578.

[3] MORAES, P.S.A. **Abordagens da Desigualdade Isoperimétrica no Ensino Básico**. UFBA, 2017.

[4] MOREIRA, C.G.T. DE A.; SALDANHA, N.C. **A Desigualdade Isoperimétrica**. *Matemática Universitária*, número 15, dezembro de 1993.

Geometria na construção de uma horta mandala

Aquino, Andréia Araújo de Farias[132]; Silva, Rosemeire Carvalho da[133] e Tsuchiya, Luciana Yoshie[134]

Resumo: *Neste trabalho, apresentamos um relato de experiência de uma atividade desenvolvida para alunos de um curso técnico em Agroindústria Integrado ao Ensino Médio. A atividade teve como objetivo o planejamento e a construção de canteiros para uma horta Mandala, utilizando a matemática como base orientadora dessa construção, em conjunto com conhecimentos da disciplina de horticultura e princípios agroecológicos. A metodologia empregada na atividade incorporou estratégias contemporâneas de ensino, como Aprendizagem Baseada em Projetos e Aprendizagem Ativa. A aplicação da atividade proporcionou aos alunos uma experiência prática e concreta de aprendizagem, na qual eles estiveram envolvidos em todas as etapas, desde o planejamento até a execução dos canteiros da horta Mandala. Isso permitiu uma abordagem "mãos na massa" e contextualizada, na qual os alunos puderam aplicar os conceitos matemáticos e de horticultura aprendidos em sala de aula em uma situação do mundo real.*

Palavras-chave: *BNCC, aprendizagem baseada em projetos, aprendizagem ativa.*

INTRODUÇÃO

Dentre as diversas diretrizes norteadoras destacadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), incluem-se a contextualização dos conteúdos curriculares, a promoção da interdisciplinaridade e a diversificação das metodologias didático-pedagógicas, visando tornar o ensino mais dinâmico, interativo e colaborativo [2].

Com base nessa abordagem, é que foi implementado um projeto educacional no Instituto Federal do Paraná (IFPR), campus Paranavaí, cujo principal objetivo consistiu em desenvolver uma horta dentro do ambiente escolar, utilizando-a como um recurso integrador de conhecimentos provenientes de diferentes áreas do conhecimento. Em particular, a Matemática pode desempenhar um papel fundamental nesse contexto sendo utilizada em diversas fases do desenvolvimento da horta. Este trabalho apresenta a descrição de uma atividade realizada com alunos do 2º ano do curso de Agroindústria Integrado ao Ensino Médio no âmbito do projeto, que consistiu no planejamento e construção de canteiros de uma horta Mandala no formato hexagonal, evidenciando a interdisciplinaridade entre as disciplinas de Horticultura e Matemática. A atividade foi conduzida por professoras de Matemática e pela professora de Horticultura.

[132] Instituto Federal do Paraná.
[133] Instituto Federal do Paraná.
[134] Instituto Federal do Paraná.

METODOLOGIA DE APLICAÇÃO DA ATIVIDADE

A metodologia da atividade combinou estratégias contemporâneas de ensino, incluindo a Aprendizagem Baseada em Projetos e a Aprendizagem Ativa [1]. Assim, a atividade foi conduzida em três etapas:

Planejamento: Em sala de aula, foi apresentado aos alunos um esquema da horta seguindo o modelo de Mandala [3], com os canteiros em formato de um hexágono regular, conforme a Figura 45(a). Foi discutido com os alunos as vantagens e desvantagens desse formato, considerando aspectos matemáticos, operacionais e biológicos, bem como as propriedades das figuras geométricas envolvidas, nas quais os alunos se basearam para definir a estratégia para contrução dos canteiros.

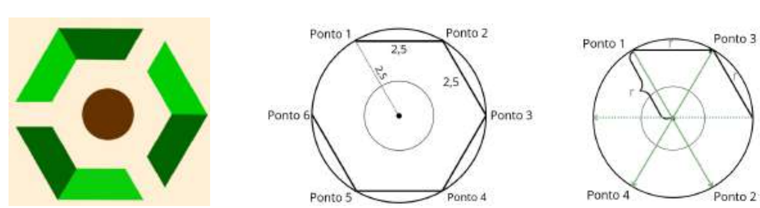
Execução da estratégia: Os alunos executaram a estratégia discutida, demarcando os canteiros no terreno. Ao final desta fase, observou-se que seria necessário ajustar e melhorar a estratégia utilizada, dessa forma os alunos tiveram que repensar sua estratégia de forma que as falhas fossem corrigidas.

Ajustes e Melhorias: Nessa etapa, foram aplicados os ajustes e melhorias definidos, possibilitando uma abordagem mais precisa e eficaz na demarcação dos canteiros da horta Mandala.

EXECUÇÃO DAS ESTRATÉGIAS

Ao observarem que todos os vértices do hexágono regular estão contidos dentro de uma mesma circunferência e que todos os seus lados possuem a mesma medida, os alunos inicialmente propuseram criar uma circunferência centrada no centro da horta Mandala com raio de 2,5 metros, para isso usaram um compasso criado com estacas e barbante. Dando continuidade a estratégia, marcaram um ponto sob a circunferência (ponto 1) e partiram deste, marcaram sequencialmente os pontos 2, 3, 4, 5 e 6 sob a circunferência, de modo que cada ponto subsequente estivesse a uma distância de 2,5 metros do ponto anterior, conforme a Figura 45(b), sendo estes os vértices do hexágono regular. Com essa estratégia, idealmente o ponto 6 deveria estar à 2,5 metros do ponto 1. No entanto, na prática ele ficou à uma distância muito maior. Ao analisarem os possíveis motivos desse erro, os alunos identificaram alguns problemas, como variações no nível do terreno, a tendência do barbante em esticar e a possibilidade de erros acumulados nas medições. Diante disso,elaboraram uma nova estratégia para minimizar esses problemas.

A nova abordagem considerou a formação dos lados dos triângulos equiláteros que estavam sob o mesmo diâmetro da circunferência. Na prática, a partir ponto 1 sob a circunferência, os alunos marcaram o ponto diametralmente oposto na circunferência (ponto 2), conforme a Figura 45(c). Em seguida, tomaram o ponto 3 sob a circunferência, adjacente ao ponto 1. A partir do ponto 3, marcaram o ponto 4 diametralmente oposto e repetiram o processo para encontrar o ponto 5 e o ponto 6. Com essa estratégia os alunos conseguiram obter um desenho no terreno mais próximo de um hexágono regular.



(a) Esquema da horta Mandala. (b) Estratégia 1. (c) Estratégia 2.

Fig. 45: Aplicação da atividade.

CONCLUSÕES

Conforme destacado na metodologia, a atividade mobilizou diversas estratégias contemporâneas de ensino que promoveram uma aprendizagem mais significativa e envolvente. A Aprendizagem Baseada em Projetos foi utilizada na implementação do projeto da horta Mandala proporcionando uma experiência prática e concreta de aprendizagem. Os alunos estiveram envolvidos em todas as etapas, desde o planejamento até a execução, permitindo uma abordagem “mãos na massa” e contextualizada. Dessa forma, puderam aplicar os conceitos aprendidos em sala de aula em uma situação do mundo real. Além disso, a Aprendizagem Ativa desempenhou um papel importante, pois os alunos foram os protagonistas do processo de aprendizagem. Eles participaram ativamente da demarcação dos canteiros, identificação de problemas e busca por soluções. Isso promoveu uma aprendizagem dinâmica e envolvente, estimulando os alunos a pensar criticamente e tomar decisões.

BIBLIOGRAFIA

[1] BACICH, L.; MORAN, J. (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** Porto Alegre: Penso, 2018.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

[3] LESSA , A. C.V.; BATISTA, R. O. S.; SHIMADA, S. O. **Guia de produção de uma horta Mandala agroecológica para escolas sustentáveis**. São Cristóvão, Sergipe: Universidade Federal de Sergipe, 2021.

Matemática e sísmica

Lúcio Tunes Santos[135]

Resumo: *Na exploração de petróleo e gás, na prospecção de águas subterrâneas ou mesmo na pesquisa de contaminação por resíduos industriais, são utilizadas diversas técnicas matemáticas. Entre elas temos os métodos sísmicos que incluem o modelamento, o imageamento e a inversão de atributos. Nesta palestra apresentamos, de forma conceitual e didática, alguns conceitos/métodos matemáticos fundamentais utilizados no desenvolvimento de alguns métodos sísmicos computacionais.*

[135]UNICAMP

Dispersão de poluentes em meios aquáticos

Modelagem, aproximação e simulações

Rocumba, Ludmila V. Ribeiro[136] e Silveira, Graciele P.[136]

Resumo: *Dentre as várias aplicações da modelagem matemática, destaca-se seu uso para auxiliar em processos de tomadas de decisões relacionadas ao enfrentamento de problemas ambientais que, com o aumento da urbanização e industrialização, tornaram-se mais frequentes. Neste trabalho, a Equação Diferencial Parcial da Difusão-Advecção foi utilizada para estudar o comportamento de um poluente ao longo do tempo, em um meio aquático. Para tanto, empregou-se o método de diferenças finitas para a implementação computacional das soluções numéricas, via linguagem Python. Simulações de cenários foram executadas e os resultados evidenciaram que é possível observar o deslocamento, a movimentação e a dispersão do poluente, tornando viável a elaboração de estudos e estratégias para conter o avanço e realizar a limpeza do mesmo, contribuindo para a minimização de danos ambientais causados.*

Palavras-chave: *Poluentes, modelagem matemática, equação da difusão-advecção, método de diferenças finitas.*

INTRODUÇÃO

A sobrevivência da vida no planeta Terra depende de recursos naturais indispensáveis, como a água. O crescimento da industrialização e da urbanização provocou grande impacto nos ecossistemas. Sistemas biológicos são complexos, difíceis de observar e contêm muitos detalhes, o que leva os pesquisadores ao desafio de isolar adequadamente o campo de estudo, de modo que o problema seja tratável e mantenha sua relevância.

A modelagem matemática surge como uma alternativa para descrever fenômenos do mundo real e suas tendências, no decorrer do tempo. De acordo com [1], um modelo matemático é uma representação ou interpretação simplificada da realidade. Contudo, as características inerentes aos fenômenos biológicos e ambientais, assim como as propriedades das variáveis estabelecidas, devem ser consideradas.

Neste trabalho, o propósito foi utilizar a modelagem matemática, mais especificamente a Equação Diferencial Parcial da Difusão-Advecção, para estudar o comportamento de um poluente ao longo do tempo, em um meio aquático. A implementação computacional das soluções numéricas, via método de diferenças finitas e linguagem de programação Python, permitiu efetuar simulações de cenários.

[136] Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba.

MODELO MATEMÁTICO E SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

A Equação Diferencial da Difusão-Advecção especifica a taxa de concentração do poluente $u(x,y,t)$, em um instante t, num ponto (x,y) e pode ser descrita como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u - \overrightarrow{W} \bullet u - \sigma u + f, \tag{21}$$

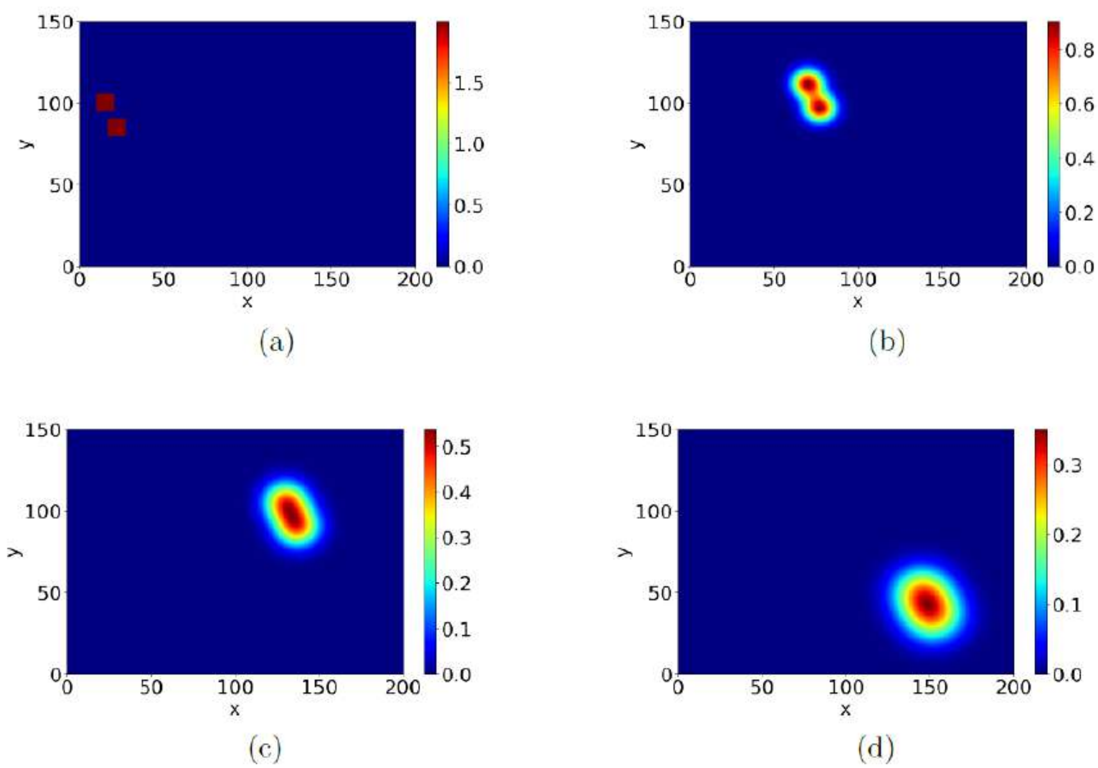
onde α é o coeficiente de difusão, $\overrightarrow{W}$ o vetor campo de velocidades, σ o coeficiente de decaimento e f a fonte poluidora [2, 3].

O termo advectivo, relacionado ao vetor campo de velocidades, foi composto pela junção da influência dos ventos e da correnteza atuando sobre o domínio observado. Os ventos que atingem a região são parcialmente responsáveis pela influência nos valores do vetor $\overrightarrow{W}$, sendo multiplicados pelo coeficiente de proporcionalidade c, comumente considerado na literatura como $3\,\%$ [4].

O modelo foi tratado numericamente a partir do método de diferenças finitas e implementado computacionalmente em linguagem Python. As soluções foram explicitadas por meio de gráficos, visando auxiliar a interpretação dos resultados.

A Figura 46 mostra os resultados da evolução temporal em um dos cenários simulados. Os valores dos parâmetros de decaimento e de dispersão foram adotados considerando [2]. Este cenário ainda possui ventos fracos, com velocidade de $3\,km/h$, na direção noroeste.

Fig. 46: Condição inicial em (a). Soluções numéricas para diferentes instantes de tempo, a saber: (b) decorridos 10 dias; (c) decorridos 20 dias e (d) decorridos 30 dias.



O comportamento do poluente ao longo de 30 dias consta na Figura 46 a), b) c) e d). Note que embora os ventos estejam na direção noroeste, a mancha se desloca em uma direção distinta pois as correntezas presentes no domínio, neste exemplo, causam maior influência em sua trajetória.

Ademais, verifica-se que o poluente se espalha, ocupando uma região de maior tamanho com o passar do tempo. Todas essas informações são pertinentes para a tomada de decisões frente a um problema ambiental desse tipo e a representação visual auxilia na compreensão dos resultados obtidos.

CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou apresentar como o uso da modelagem matemática tem potencial no enfrentamento de desastres e crimes ambientais. A partir dos dados obtidos é possível realizar previsões, analisar o deslocamento, a movimentação e a dispersão de um poluente ao longo do tempo. Com isso, torna-se viável a elaboração de estudos e estratégias para conter o avanço da poluição, bem como planejar ações para a limpeza, buscando minimizar os prejuízos ambientais.

Além disso, como os resultados das simulações são apresentados graficamente, estas imagens podem ser usadas por diferentes profissionais de áreas relacionadas. Logo, a forma como os dados são expostos é uma maneira de expandir sua utilização e favorecer sua compreensão.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Contexto: São Paulo, 2002.

[2] DINIZ, G. L. **Dispersão de poluentes num sistema ar-água**: modelagem, aproximações e aplicações. 2003. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Campinas, 2003.

[3] EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: SIAM, 2005.

[4] OLIVEIRA, R. F. **O comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ:** modelagem, análise numérica e simulações. 2003. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

Exploring the impact of temperature on the efficacy of replacing a wild *Aedes aegypti* population by a *Wolbachia*-carrying one

Lopes, Luís E. S.[137]; Ferreira, Cláudia P. [138] e Oliva, Sergio M.[1]

Resumo: *Um sistema diferencial não autônomo com atraso no tempo, com atraso variável no tempo, é proposto para reproduzir a dinâmica competitiva de populações de mosquitos infectados e não infectados por Wolbachia em vários cenários que diferem pela temperatura ambiente diária, a cepa bacteriana transportada pelo mosquito e as orientações para soltura de mosquitos infectados. Tanto os parâmetros entomológicos do mosquito quanto as características de infecção dependem da temperatura, que por si só depende do tempo. Portanto, inspirados na literatura sobre populações de insetos, são propostas formas funcionais para descrever as taxas de nascimento, desenvolvimento e sobrevivência (ou mortalidade) de Ae. aegypti em função da temperatura, bem como a taxa de perda de infecção por Wolbachia. Os resultados numéricos mostraram que: (i) liberações múltiplas foram mais eficientes do que uma única, (ii) quando a população de mosquitos é alta, é o melhor momento para implementar a liberação de mosquitos infectados, (iii) cepas que produzem altos níveis de citoplasma, a incompatibilidade e a herança materna aumentam a eficácia da técnica e (iv) a alta temperatura pode comprometer a eficácia da técnica.*

Abstract: *A non-autonomous time-delayed differential system, with time-varying delay, is proposed to reproduce the competitive dynamics of Wolbachia-infected and non-infected mosquito populations in several scenarios that differ by daily environmental temperature, the bacterial strain carried by the mosquito, and the guidelines for release of infected mosquitoes. Both mosquito entomological parameters and infection traits depend on temperature, which per se depends on time. Therefore, inspired by the literature on insect populations, functional forms are proposed to describe the rates of birth, development, and survival (or mortality) of Ae. aegypti as a function of temperature, as well as the rate of Wolbachia-infection loss. Numerical results showed that: (i) multiple releases were more efficient than a single one, (ii) when the mosquito population is high is the best time to implement the release of infected mosquitoes, (iii) strains that produce both high levels of cytoplasmic incompatibility and maternal inheritance boost the efficacy of the technique, and (iv) high temperature can jeopardize the efficacy of the technique.*

[137]University of Sao Paulo (USP), Institute of Mathematics and Statistics, Department of Applied Mathematics.
[138]Sao Paulo State University (UNESP), Institute of Biosciences, Department of Biodiversity and Biostatistics.
Lopes thanks CAPES - Finance Code 001 for the scholarship.

Keywords: *Non-autonomous model, delay differential system, mosquito traits, loss of Wolbachia-infection.*

MOTIVATION

Among the groundbreaking strategies for managing vector-borne diseases, the deployment of *Aedes aegypti* mosquitoes infected with *Wolbachia* emerges as particularly noteworthy. This method demonstrates the capability to prevent pathogen replication within the infected mosquitoes, proving to be a promising tool in curtailing the transmission of arbovirus. The primary objective of this control strategy is to either suppress or replace the existing wild mosquito population with an infected counterpart.

As temperature may impact mosquito fitness and bacteria loss, addressing its effect on the prevalence of the bacteria under scenarios where infected and non-infected mosquitoes compete is crucial to guarantee the success of the technique of disease suppression through the release of *Wolbachia*-carrying mosquitoes.

MATHEMATICAL MODEL

A non-autonomous time-delayed differential system, with time-varying delay, is proposed to analyze the temporal dynamics of two *Aedes aegypti* populations, one *Wolbachia*-carrying and the other *Wolbachia*-free. The model is structured in non-infected (N_u) and *Wolbachia*-infected (N_w) populations. Both the mosquito entomological parameters and the infection traits depend on temperature (T), which *per se* depends on time (t). Therefore, we must take their temporal dynamics into account. The parameters are the survival of the immature phase S_i; the survival of the infection during the immature phase σ; the development time τ; the sex ratio r_i; the oviposition rate b_i; the mosquito mortality rates d_i and d_{iJ} for the adult and immature phases, respectively; the cytoplasmic incompatibility strength q; the maternal inheritance ξ; the rate of *Wolbachia*-infection loss θ and θ_J for adults and immatures, respectively; the carrying capacity η; and the mating competitive advantage ϵ. All model parameters are positive. Besides, while S_i, σ, and τ are driven by a differential system, the others are given directly as functions of time.

Inspired by [1, 2], the model is described by the system:

$$
\begin{aligned}
\frac{dN_u(t)}{dt} &= r_u(1-q\nu(t-\tau(t)))b_u(T(t-\tau(t)))N_u(t-\tau(t))S_u(t)\phi(T(t-\tau(t))) \\
&\quad +(1-\xi\sigma(t))r_w b_w(T(t-\tau(t)))N_w(t-\tau(t))S_w(t)\phi(T(t-\tau(t))) \\
&\quad -d_u(T(t))N_u(t)+\theta(T(t))N_w(t), \\
\frac{dN_w(t)}{dt} &= r_w\xi\sigma(t)b_w(T(t-\tau(t)))N_w(t-\tau(t))S_w(t)\phi(T(t-\tau(t))) \\
&\quad -(\theta(T(t))+d_w(T(t)))N_w(t), \\
\frac{dS_u(t)}{dt} &= S_u(t)\left[\frac{m(T(t))d_{uJ}(T(t-\tau(t)))}{m(T(t-\tau(t)))}-d_{uJ}(T(t))\right], \\
\frac{dS_w(t)}{dt} &= S_w(t)\left[\frac{m(T(t))d_{wJ}(T(t-\tau(t)))}{m(T(t-\tau(t)))}-d_{wJ}(T(t))\right],
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(t)}{dt} &= \sigma(t)\left[\frac{m(T(t))\theta_J(T(t-\tau(t)))}{m(T(t-\tau(t)))} - \theta_J(T(t))\right],\\
\frac{d\tau(t)}{dt} &= 1 - \frac{m(T(t))}{m(T(t-\tau(t)))},
\end{aligned}$$

with

$$\phi(T(t-\tau(t))) = e^{-\eta(T(t-\tau(t)))(r_u N_u(t-\tau(t)) + r_w N_w(t-\tau(t)))},$$

and

$$\nu(t-\tau(t)) = \frac{(1-r_w)N_w(t-\tau(t))}{\epsilon(1-r_u)N_u(t-\tau(t)) + (1-r_w)N_w(t-\tau(t))},$$

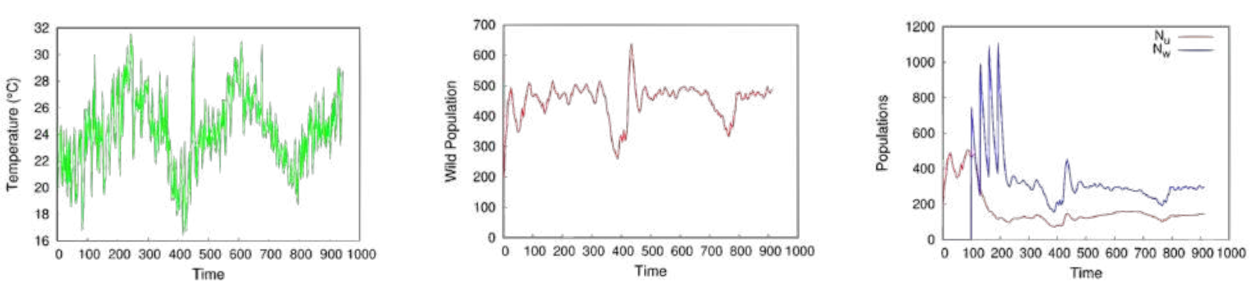
represent the competition among female mosquitoes for oviposition sites, and the probability of mating an infected male, respectively.

RESULTS

In [3] the effects of temperature on both mosquito entomological parameters and the infection traits were analyzed. The results showed that the efficacy of this technique depends on several parameters such as (i) the ratio of infected mosquitoes to non-infected ones during release, (ii) the period of the year when infected mosquitoes are released, (iii) the periodicity of mosquito releases, and (iv) the bacteria strain used to infect the mosquito. In summary, four releases at 7-day intervals are more efficient than one, during the favorable period when the mosquito population is high is the best time to implement the release, and increasing the strength of cytoplasmic incompatibility and maternal inheritance can optimize the efficacy. In summary, four releases at 7-day intervals are more efficient than one, during the favorable period when the mosquito population is high is the best time to implement the release, and increasing the strength of cytoplasmic incompatibility and maternal inheritance can optimize the efficacy. High temperatures can jeopardize the efficacy of the technique by both increasing the ratio of infected to non-infected mosquitoes to achieve persistence of the infection and by diminishing the prevalence of the infection in the population in the long run.

Temperature data in Niterói - RJ

The figure below shows the daily temperature data and the dynamics of both non-infected and infected mosquito populations. Four releases were done at 7-day intervals.



(a) From 2020 to 2022 (b) non-infected one (c) $\xi = 0.99$ and $q = 0.95$

REFERENCES

[1] AMARASEKARE, P; COUTINHO, R. M. Effects of temperature on intraspecific competition in ectotherms. **The American Naturalist**, v. 3, n. 184, p. E50-E65, 2014.

[2] FERREIRA, C. P. *Aedes aegypti* and *Wolbachia* interaction: population persistence in an environment changing. **Theoretical Ecology**, v. 13, p. 137–148, 2019.

[3] LOPES, L. E. S.; FERREIRA, C. P.; OLIVA, S. M. Exploring the impact of temperature on the efficacy of replacing a wild *Aedes aegypti* population by a *Wolbachia*-carrying one. **Applied Mathematical Modelling**, v. 123, p. 392–405, 2023.

Python e Sympy na resolução de equações diferenciais aplicadas a investimentos imobiliários

Souza, Luís Fernandes Saucedo[139]; Rodriguez, Bárbara Denicol do Amaral[140] e Poffal, Cristiana Andrade[141]

Resumo: *Este trabalho apresenta a solução de uma equação diferencial que modela um processo de investimentos imobiliários. A abordagem analítica foi comparada com um método discreto implementado no Pandas Data Frame. O modelo proposto considera a taxa de juros, o aluguel, a amortização e o valor do financiamento para determinar o montante acumulado ao longo do tempo. A equação diferencial resultante foi resolvida usando o método do fator integrante e a solução foi implementada computacionalmente utilizando a biblioteca Sympy do Python. A solução analítica mostrou-se muito próxima da discreta mesmo considerando um período relativamente grande de tempo.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais, matemática financeira, Python.*

INTRODUÇÃO

Denominam-se equações diferenciais as equações matemáticas que modelam um fenômeno ou um experimento envolvendo variações instantâneas das quantidades presentes e consideradas essenciais, onde a dinâmica do fenômeno se desenvolve continuamente [1]. Uma modelagem matemática eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender; em síntese, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças [1]. A linguagem oferecida pelas equações diferenciais é fundamental na transferência e entendimento da linguagem "natura", uma vez que a palavra-chave variações aparece quase sempre nas situações reais [1]. Dentro deste contexto, neste trabalho, a fim de modelar um problema de investimento imobiliário [4], foi empregado o método de capitalização de capital com depósitos ou retiradas [2]. Para tal, dada uma equação diferencial, que modela o caso de depósitos constantes, definiu-se os depósitos variáveis como a diferença entre as prestações do financiamento e aluguel do imóvel. Por meio de conceitos da matemática financeira, como variação do montante em relação ao juros, capitalização constante e

[139] Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS
[140] Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS
[141] Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, RS

sistema de amortização constante (SAC) estipula-se o montante em função do tempo considerando depósitos variados dado o cenário estipulado. Como a equação que modela o problema é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, de grau um, linear e não-homogênea, para a solução analítica empregou-se o método do fator integrante para equações diferenciais lineares [6]. Diante dos resultados foi determinada uma equação que modela o problema. Tal equação é dada por:

$$\frac{dS(t)}{dt} = r \cdot S(t) + i_f \cdot F + A - a - t \cdot A, \tag{23}$$

onde S é o montante; t o tempo; r a taxa de juros de aplicação; i_f a taxa de financiamento; A a amortização; F o valor do financiamento e a o aluguel.

Resolvendo a Eq.(23), chega-se na solução:

$$\begin{aligned} S(t) = \frac{i_f \cdot A \cdot t}{r} + \frac{i_f \cdot A}{r^2} - \frac{i_f \cdot F + A - a}{r} + \\ \left(E - \frac{i_f \cdot A}{r^2} + \frac{i_f \cdot F + A - a}{r}\right) e^{rt} \end{aligned} \tag{24}$$

onde E é a entrada.

A partir da Eq.(24), que descreve o problema, foi utilizada a biblioteca SymPy [5]: uma vez conhecidos as constantes dos valores do imóvel, o valor de entrada, a taxa de financiamento, as taxas do aluguel e rendimento, determina-se o montante dos investimentos com relação ao tempo de maneira analítica. Os resultados analíticos foram comparados com os obtidos a partir da aplicação do método discreto implementado por Schuch [4], onde a capitalização é feita mês a mês e é utilizado o Python e o Pandas Data Frame, uma estrutura de dados tabular bidimensional potencialmente heterogênea e de tamanho variável com eixos rotulados (linhas e colunas) para modelagem [3]. Os valores considerados para a comparação entre os métodos consistem no financiamento de um imóvel de R$$500.000,00$ com uma entrada no valor de R$$100.000,00$ e uma taxa de financiamento anual de $0,0942\%$, aluguel do imóvel com taxa anual de $0,04\%$ e taxa de rendimento de investimento anual em $0,08\%$. Ao final de 360 meses do cenário estipulado, o montante calculado analiticamente é 0.0067% maior que o discreto.

CONCLUSÕES

Este artigo comparou a modelagem tradicional discreta com a abordagem analítica, via equações diferenciais, para determinar o montante acumulado no investimento imobiliário ao longo do tempo. A solução analítica, implementada computacionalmente com a biblioteca Sympy do Python, mostrou resultados muito próximos ao método discreto, mesmo considerando um período de tempo relativamente grande. Além da precisão, a solução analítica oferece a vantagem de calcular o montante em qualquer instante de tempo e simplificar a implementação computacional, exigindo menos linhas de código e reduzindo o tempo de execução do programa.

agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através do Programa Institucional de bolsas de Iniciação Científica (PIBIC), pelo auxílio financeiro que possibilitou a dedicação ao projeto.

BIBLIOGRAFIA

[1] BASSANEZI, R. C.; **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática: Contexto, Aplicações e Perspectivas**. São Paulo: Contexto, 2002. ISBN: 978-857244207-7.

[2] FREITAS, E. K.; **Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem: aplicações na economia**. 2019. 80 f. TCC (Graduação) - Curso de Matemática Aplicada, Instituto de Matemáticas Estatísticas e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2019. Acessado em 27/05/2024, `https://imef.ufrg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2019-2ELIandraFreitas.pdf`.

[3] OLIVEIRA, T. C. de.; Quais são as vantagens e funcionalidades da biblioteca Pandas data frame? Online. Acessado em 28/03/2024. `https://www.voitto.com.br/blog/artigo/dataframe`.

[4] SCHUCH, F. N.; TESMANN, M. S.; Alugar, economizar e pagar à vista ou financiar um imóvel? Um estudo de caso. Online. Acessado em 27/03/2024. `https://www.fschuch.com/blog/2020/04/11/alugar-economizar-e-pagar-a-vista-ou-financiar-um-imovel-um-estudo-de-caso/`.

[5] SYMPY.; Online. Acessado em 28/03/2024. `https://www.sympy.org/en/index.html`.

[6] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais** . Vol. 1. São Paulo: Pearson, 2001.

Etnomatemática nas feiras livres brasileiras

Um Olhar de Campo na Feira do Esplanada, Divinópolis-MG

Damasceno, Mariana[142]; Fonseca, Rodrigo[143];Medeiros, Yasmin[144];Moura, Daniela[145]

Resumo: *O presente artigo oferece uma investigação detalhada sobre a presença da etnomatemática em feiras livres no Brasil, com um estudo de caso da Feira do Esplanada, localizada em Divinópolis-MG. A pesquisa se propõe a explorar como práticas matemáticas são aplicadas e incorporadas nas feiras, considerando a diversidade cultural e suas manifestações nas unidades de medida. Por meio de referências bibliográficas e uma abordagem de campo, o artigo busca desvendar as nuances matemáticas presentes nas interações diárias dos feirantes, oferecendo uma análise aprofundada do papel da etnomatemática nesse ambiente.*

Palavras-chave: *Etnomatemática, feiras, aprendizado, unidades de medida.*

INTRODUÇÃO

A Etnomatemática é um campo de estudo da relação entre a matemática e as culturas, explorando como diferentes comunidades utilizam, observam e compreendem conceitos matemáticos. Ela busca entender as abordagens matemáticas dentro de contextos culturais específicos, valorizando a diversidade das bagagens culturais presentes ao redor do mundo. Como ressalta D'Ambrósio (2016) em que defende a prática etnomatemática sendo realizada por grupos culturais que possuem propósitos e costumes em comum.

Assim, a finalidade deste estudo é salientar a ligação que há entre a matemática e a realidade da cultura observada nas feiras livres de algumas regiões brasileiras através de uma matemática informal presente no cotidiano dos comerciantes. Então, optou-se por delimitar o estudo a uma pesquisa bibliográfica tocante a determinadas feiras brasileiras, além de um estudo de caso de um grupo de feirantes da feira livre do bairro Esplanada em Divinópolis/MG, destacando que as feiras são lugares onde se preserva a cultura local, a fim de entender de que forma a matemática acontece neste local, investigando a utilização de unidades de medidas não convencionais.

[142]UEMG.mariana.1698573@discente.uemg.br
[143]UEMG.rodrigo.fonseca@uemg.br
[144]UEMG.yasmin.1698550@discente.uemg.br
[145]UEMG.daniela.moura@uemg.br

DESENVOLVIMENTO

A matemática presente no cotidiano

A matemática, muitas vezes, é vista como uma ciência pouco prática e sem aplicação no cotidiano. Nesse sentido, é importante ressaltar que esse distanciamento da ciência exata com a realidade ocorre devido a separação existente entre a matemática cotidiana e científica. Cenci e Costa (2011) explicam que a matemática científica não é o único método para desenvolver questões reais, no entanto, como os alunos não percebem relação entre o que acontece na rotina e os ensinamentos científicos explicado nas escolas, a contextualização não é estabelecida e promove o afastamento dessas abordagens.

Unidades de medidas não convencionais

O Sistema Internacional de Unidades - S.I. estabelece a unidade de medida para os diversos tipos de grandezas, como é detalhado por Mordka (2006). No entanto, no dia a dia, muitas vezes, são usadas outras medidas não convencionais em vários contextos culturais. A exemplo disso Rodrigues e Neto(2022) salientam que os tropeiros mineiros utilizam uma medida não reconhecida no S.I., chamada de "jacar", assim como os indígenas Potiguara, como mostra o estudo de Silva (2020), "aldeia Alto do Tambá utiliza o método não convencional (passo) estabelece uma distância média de 60 cm, que equivale a um passo de uma fileira para outra". Logo, é visto em várias regiões o uso dessas medidas, intituladas não convencionais, afirmando as práticas etnomatemáticas em culturas locais.

Feiras no Brasil e a pluralidade cultural

Então, as feiras livres desenvolvidas nas diversas cidades brasileiras, são um exemplo de aplicação prática em que está presente na cultura local, sendo assim um exemplar da etnomatemática. Nesse viés, encontra-se na feira livre de Vertentes em Pernambuco situações semelhantes, em um estudo feito por Miranda (2023) observou-se mercadorias sendo vendidas em unidades de medidas divergentes com as tradicionais, como verduras embaladas em "redinhas", devido a praticidade nas vendas e muitos fregueses pensarem ter vantagem nos valores.

Em Alencar et.al (2011), o autor exibe outras unidades de medida amplamente utilizadas em Juazeiro do Norte, no Ceará, como a "cuia" e o "mercado". A "cuia" é um recipiente feito do fruto da cuieira ou cabaceira, equivalente a cerca de cinco quilogramas ou litros, sendo agora comum o uso de um cubo de madeira com capacidade semelhante. Já o "mercado" é uma medida variável, dependendo do tipo de produto ou do valor disponível para compra. Ao comprar algo, não se atribui um valor fixo ao mercado, mas sim uma quantidade com base no montante disponível. Além disso, os autores ressaltam que há diversas outras unidades específicas para produtos, como "tranças" de alho, "cordas" de caranguejo, "meiotas" de cachaça, entre outras.

Segundo Nascimento (2020) em estudos realizados, em Ouriçangas na Bahia, concluíram que "Para os feirantes, a noção do todo é mais importante que a de unidade, pois as quantidades são sempre vinculadas a contextos culturais." logo pode-se evidenciar como, dentro do contexto das feiras livres, o sistema convencional de medidas não é eficaz como o sistema cultural estabelecido e caso as escolas utilizassem de práticas culturais para ensinar seus conteúdos, a partir de uma matemática associada a realidade do estudante, resultaria em maiores aprendizados.

DISCUSSÕES E RESULTADOS

Como o presente artigo tem como propósito investigar as unidades de medidas não convencionais e entender como acontece a matemática na prática dos feirantes será analisado o estudo de caso realizado na feira do Esplanada, localizada na cidade de Divinópolis, no centro-oeste mineiro e, também, pesquisas bibliográficas de feiras livres brasileiras.

Ao iniciar a busca no local da pesquisa de campo, constatou-se balança em grande parte das barracas da feira, sendo o quilograma a medida mais comum usada para a comercialização. Mas, ainda assim, foi possível encontrar itens sendo vendidos de maneira não convencional.

Nesse sentido, encontrou-se a planta ora-pro-nobis sendo vendida em "molho", ou seja, uma quantidade de folhas agrupadas, e em pacote, um número de galhos indeterminados, em uma sacola.

Além disso, havia jabuticaba sendo vendida em "potes". Os feirantes usavam um recipiente cilíndrico para reservar uma quantidade da fruta com cerca de 600 gramas, que depois eram despejados em sacolas e entregue aos clientes. Outro elemento vendido de maneira não convencional é o leite, comercializado em garrafas, de preços variados. As garrafas eram embalagens de refrigerantes, reaproveitadas, que continham aproximadamente 2 litros.

Constata-se então que o cenário das feiras culturais é rico em práticas matemáticas não convencionais, onde são empregadas, em diferentes regiões brasileiras, uma variedade de unidades de medida não padronizadas, em conformidade com as tradições culturais locais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conclui-se a partir deste trabalho que as unidades não convencionais proporcionam uma ponte entre a teoria matemática abstrata e a prática do dia a dia, tornando o aprendizado mais tangível e significativo. Ao incorporar essas medidas alternativas, é possível também criar uma abordagem de ensino mais dinâmica que, não apenas fortalece as habilidades matemáticas dos alunos, mas também enriquece sua compreensão cultural, proporcionando um ambiente de aprendizagem mais inclusivo, que reconhece e valoriza as diferentes formas de expressão matemática presentes em diversas comunidades.

BIBLIOGRAFIA

[1] Alencar, A.C., Oliveira, F.L.S.; Pereira, M.R.B.;**Etnomatemática na feira: estimando o lucro com unidades de medidas locais** (PO). In: XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2011.

[2] Almeida, S.P.N.C. ; **Práticas etnomatemáticas em uma feira livre. .** Educação matemática em revista, v. 22, n. 54, p. 7-20, 2017.

[3] Cenci, A.,Costas, F.A.T.; **Matemática cotidiana e matemática científica**. Ciências & Cognição, v. 16, n. 1, 2011.

[4] D'Ambrosio, U.; **Etnomatemática-elo entre as tradições e a modernidade**. Autêntica, 2016.

[5] D'Ambrosio, U.; **O Programa Etnomatemática: uma síntese.** . Acta Scientiae, Canoas, v. 10, n. 1, p. 7-16, jan./jul, 2008.

[6] D'Ambrosio, U.; **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, ed. 1, p. 99 -120, 2005.

[7] Miranda, F.M.S.; **O uso da etnomatemática no processo de ensino e aprendizagem: um olhar sobre as potencialidades a partir de uma feira livre.** 2023. Trabalho de Conclusão de Curso.

[8] Nascimento, F.G., Bispo, J.S.G.; **Etnomatemática: explorando a linguagem matemática na comercialização dos produtos agrícolas na feira livre de Ouriçangas-BA**. REVISTA FATEC DE TECNOLOGIA E CIÊNCIAS, v. 5, n. 1, 2020.

[9] Rozenberg, I.M..; **O sistema internacional de unidades-SI**. Instituto Mauá de Tecnologia, 2002.

[10] Rodrigues, J.L., Neto, D.V.; **A etnomatemática dos tropeiros e suas tecnologias:um jacar de elementos para a educação matemática do campo**. Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, v. 6, n. 1, p. 80-94, 2022.

[11] Silva, M.A.; **Etnomatemática: uso de medidas não convencionais e convencionais utilizada pelos indígenas Potiguara na agricultura**. 2020.

Modelagem e simulação das diferentes ondas da pandemia de COVID-19 no Brasil

Lima, Marina[146] e Meyer, João Frederico[147]

Resumo: *Neste trabalho, construímos modelos epidemiológicos, de acordo com a evolução da situação pandemia da COVID-19, de maneira a incluirmos as variantes Gama, Delta e Ômicron, através da função degrau de Heaviside, e também analisamos as situações vacinais. Para todos os modelos, realizamos simulações numéricas, discutimos os resultados obtidos e implicação dos mesmos no comportamento da pandemia.*

Palavras-chave: *COVID-19, modelos epidemiológicos, modelagem matemática.*

INTRODUÇÃO

Os primeiros relatos da COVID-19 datam do final de dezembro de 2019, em que vários casos de pneumonia de origem desconhecida foram confirmados na China, posteriormente identificados em janeiro de 2020 como sendo causados por um novo coronavírus, o qual foi denominado de SARS-CoV-2 e a doença causada por ele de COVID-19 [2]. A principal forma de transmissão do COVID-19 é a disseminação de pessoa para pessoa, por meio de gotículas respiratórias produzidas quando uma pessoa infectada tosse ou espirra. Embora as pessoas sejam mais contagiosas quando sintomáticas, a transmissão silenciosa (ou seja, assintomática) também desempenha um papel na dinâmica da pandemia.

O pico da primeira onda no Brasil foi registrado em agosto de 2020 e, nos meses seguintes, algumas medidas de restrição foram relaxadas. Então, a partir de novembro do mesmo ano, houve um aumento alarmante dos casos, resultando em uma segunda onda, com amplitude maior que a primeira, resultado do relaxamento das medidas restritivas e a circulação das variantes Gama e Delta. A campanha de vacinação contra a COVID-19 teve início em janeiro de 2021 e, apesar do Brasil ser referência em vacinação, houve resistência da população, causada por movimentos negacionistas e anti-vacina. Dessa forma, no início de 2022, o Brasil registrou um aumento exorbitante de casos, resultantes da variante Ômicron e do relaxamento completo das medidas restritivas, fato esse que foi atenuado com a vacina bivalente, o que auxiliou no controle da pandemia.

Neste contexto, modelos matemáticos têm uma importância estratégica para nortear as medidas mais eficientes e muitos trabalhos foram desenvolvidos durante a pandemia, com o intuito de

[146]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC - USP, mlima@icmc.usp.br
[147]Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC - UNICAMP, jmeyer@unicamp.br

descrever a dinâmica da COVID-19, incluindo o comportamento da população, as variantes do vírus, as estratégias de contenção da doença, a vacinação, entre outros [4, 3, 2]. Com o desenvolvimento dos trabalhos, pudemos buscar a melhor maneira de informar a população sobre o perigo da doença, a eficácia das medidas adotadas e a importância da vacinação, visando uma redução dos danos causados pela pandemia.

SUCESSIVAS ONDAS DA COVID-19

Neste trabalho, modificamos os modelos propostos por [4] e [2], de maneira a incluirmos as variantes Gama, Delta e Ômicron e a vacinação, tanto a regular, como a feita com a vacina bivalente. Dessa forma, formulamos o diagrama apresentado na figura a seguir:

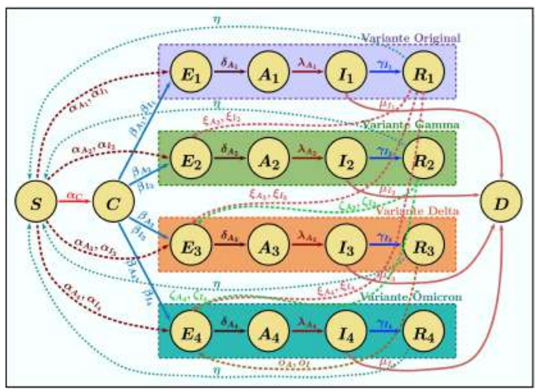


Fig. 47: Relações entre as classes de indivíduos propostas para o estudo da dinâmica da COVID-19 com a inclusão dos indivíduos infectados pelas variantes Gama, Delta e Ômicron. Autoria própria

Dessa forma, temos as classes de indivíduos: Suscetíveis (S), Confinados (C), Expostos (E_i), Assintomáticos (A_i), Infectados (I_i), em que $i = 1, 2, 3, 4$, correspondente às variantes original,Gama, Delta e Ômicron, respectivamente, mortos (D) e Recuperados (R); e as taxas: η: perda de imunidade; α_C: suscetíveis que entram em confinamento; α_{A_1}: transmissão da variante original de assintomáticos para suscetíveis; α_{I_1}: de transmissão da variante original de infectados para suscetíveis; α_{A_2}: transmissão da Gama de assintomáticos para suscetíveis; α_{I_2}: transmissão da Gama de infectados para suscetíveis; α_{A_3}: transmissão da Delta de assintomáticos para suscetíveis; α_{I_3}: transmissão da Delta de infectados para suscetíveis; α_{A_4}: transmissão da Ômicron de assintomáticos para suscetíveis; α_{I_4}: transmissão da Ômicron de infectados para suscetíveis; β_{A_1}: transmissão da variante original de assintomáticos para confinados; β_{I_1}: transmissão da variante original de infectados para confinados; β_{A_2}: transmissão da Gama de assintomáticos para confinados; β_{I_2}: transmissão da Gama de infectados para confinados; β_{A_3}: transmissão da Delta de assintomáticos para confinados; β_{I_3}: transmissão da variante Delta de infectados para confinados; β_{A_4}: transmissão da Ômicron de assintomáticos para confinados; β_{I_4}: transmissão da Ômicron de infectados para confinados; $\delta_{A_1} = \delta_{A_2} = \delta_{A_3} = \delta_{A_4}$: expostos que se tornam assintomáticos, para cada variante do vírus; $\lambda_{A_1} = \lambda_{A_2} = \lambda_{A_3} = \lambda_{A_4}$: assintomáticos com teste positivo; $\gamma_{I_1} = \gamma_{I_2} = \gamma_{I_3} = \gamma_{I_4}$: recuperação; μ_{I_1}: mortalidade pela variante original; μ_{I_2}: mortalidade pela Gama; μ_{I_3}: mortalidade pela Delta; μ_{I_4}: mortalidade pela Ômicron; ξ_{A_2}: assintomáticos para a variante original, expostos à Gama;ξI_2: infectados pela variante original, expostos à Gama; ξ_{A_3}: assintomáticos para a variante original, expostos à Delta; ξ_{I_3}: infectados pela variante original, expostos à Delta; ξ_{A_4}: assintomáticos para a variante original, expostos à Ômicron; ξ_{I_4}: infectados pela variante original, expostos à Ômicron; ζ_{A_3}: assintomáticos para a Gama, expostos à Delta; ξ_{I_3}:

infectados pela Gama, expostos à Delta; ζ_{A_4}: assintomáticos para a Gama, expostos à Ômicron; ζ_{I_4}: infectados pela Gama, expostos à Ômicron; o_A: assintomáticos para Delta, expostos à Ômicron; e o_I: infectados pela Delta, expostos à Ômicron.

Além disso, neste modelo não consideramos a dinâmica vital e incluímos as variantes utilizando a função de Heaviside - $H(x)$, considerando o início da circulação da variante Gama no momento τ_2, da Delta em τ_3 e da Ômicron em τ_4. Simulamos a curva de casos ativos, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem e obtivemos a curva rosa da Figura 2.

No final de novembro de 2021, houve o início da imunização com a vacina Comirnaty® Bivalente contra a variante original e a Ômicron. Incluímos a vacinação como uma redução na curva dos infectados, dada pela equação:

$$\phi(t) = H(t - 730)e\frac{f(t)}{N}, \tag{25}$$

em que $H(t)$ é a função de Heaviside (o tempo de 730 dias, corresponde ao dia 01/01/2022, quando começou a vacinação bivalente), e é a eficácia da vacina ($e = 95\%$ de acordo com o fabricante [5]), $f(t)$ é a função que descreve a curva completa de imunização, obtida via método doa quadrados mínimos e utilizando os dados de [1], e N é a população do Brasil.

Dessa forma, obtemos a curva em verde apresentado na Figura 2.

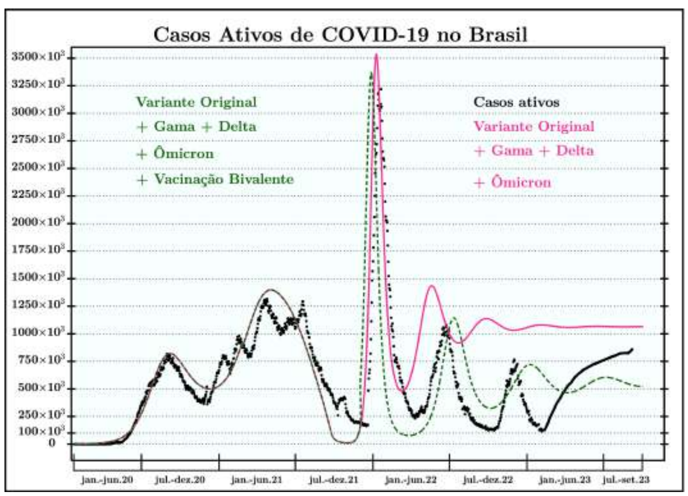


Fig. 48: Número de casos ativos de COVID-19 obtidos de [6] e o resultado da simulação usando o modelo SCEAIRD, com inclusão das variantes Gama, Delta e Ômicron e a vacinação com a Comirnaty® Bivalente. Produzido pelos autores. Desenvolvido no *software* Wolfram Mathematica®.

Como podemos observar na Figura 2 com a vacinação bivalente houve uma diminuição no pico da curva dos casos ativos e nas ondas sucessivas da mesma. Além disso, podemos observar que a COVID-19 no Brasil apresenta um comportamento endêmico, o que reforça a importância da vacinação periódica das pessoas.

CONCLUSÕES

Os resultados deixaram evidente a importância de uma política eficiente de vacinação na redução do número de casos. Trabalhamos com modelos compartimentais e a inclusão das variantes e da vacinação foi feita através da função de Heaviside, o que até então não era proposto na literatura, e que pode ser utilizada para a inclusão diversas informações necessárias, sem grandes modificações ao modelo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL, MINISTÉRIO DA SAÚDE.Vacinômetro COVID-19. 01 out. 2023. Disponível em: https://infoms.saude.gov.br/extensions/SEIDIGI-DEMAS-Vacina-C19. Acesso em 01 out. 2023.

[2] LIMA, M.; SILVA, A.; MEYER, J. F. C. A. Mathematical Models and Simulations of Different Scenarios of COVID-19 in Brazil. **Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones**, N.1, p.87-111, 2023.

[3] MEYER, J. F. C. A.; LIMA, M. Relevant mathematical modelling efforts for understanding COVID-19 dynamics: an educational challenge. **ZDM – Mathematics Education**, n.7, p.1-14, 2022.

[4] MEYER, J. F. C. A.; LIMA, M.; ESPITIA, C.; LONGO, F.; LAIATE, B.; GOIS, A.; KUNZ, C.Different approaches to the modelling of COVID-19, **Trends in Computational and Applied Mathematics**, n. 4, p.515-531, 2021.

[5] PFIZER/BIONTECH. Comirnaty Bivalente BA.1 - vacina covid-19 bivalente (Original + Ômicron B.1.1.529). 12 out. 2023. Disponível em: https://www.pfizer.com.br/files/Comirnaty-Bivalente-BA1 -Profissional-de-Saude-07.pdf. Acesso em 12 out. 2023.

[6] WORLDOMETERS. COVID-19 Coronavirus Pandemic, 10 nov. 2023. Disponível em: https://www.worldometers.info/coronavirus/. Acesso em 10 nov. 2023.

Álgebras de Jordan Euclidianas e cones simétricos.

Um estudo sobre as aplicações em programação

Rodríguez, Marjenny[148]; Morbach, Joelma[149]

Resumo: *Neste trabalho buscaremos apresentar as noções sobre Álgebras de Jordan Eucldianas e sua relação com cones simétricos. Usaremos a definição de álgebra sobre um corpo a partir de um espaço vetorial e depois mostraremos algumas definições importantes sobre o tema para condicionarmos o entendimento da teoria baseada em [1] e [2]. Em seguida focaremos em entender como se dá a aplicação em programação não linear utilizando uma decomposição espectral para cones simétricos como mostra [3].*

Palavras-chave: *Álgebra, Jordan, cone, programação, otimização.*

INTRODUÇÃO

As Álgebras de Jordan podem ser usadas na Mecânica Quântica ao se representar observáveis através de operadores hermitianos. Essa representação é feita termos dos cones simétricos - a menos de isomorfismo -, eles se dividem em quatro famílias dos chamados cones clássicos juntamente com um outro cone chamado excepcional. Nosso estudo se volta a entender as classificações destas álgebras, em especial as Álgebras de Jordan euclidianas e como podemos relacioná-las com cones simétricos para aplicar à programação não linear, especificamente a programação quadrática, que é a nossa aplicação objetivo.

Álgebras de Jordan

Definição 4.2 (Álgebra de Jordan) *Uma $\mathbb{K}$-álgebra $\mathcal{J}$ é dita Álgebra de Jordan se seu produto satisfaz a condição de comutatividade $xy = yx$, para todo $x, y \in \mathcal{J}$, e também satisfaz o que chamamos de identidade de Jordan, dada por*

$$(x^2 y)x = x^2(yx), \tag{26}$$

para todo $x, y \in \mathcal{J}$.

[148]Universidade Federal do Pará
[149]Universidade Federal do Pará

Dada uma álgebra associativa A podemos definir um novo produto $\odot$ dado por
$$x \odot y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x).$$
para $x, y \in A$ e $\cdot$ denotando o produto usual em A. $\odot$ é chamado Produto de Jordan e $(A, \odot)$ é chamada de $A^{(+)}$.

Exemplo 4.2 $(\mathbb{C}, \cdot)$, *onde $\cdot$ denota o produto usual dos complexos é uma álgebra de Jordan. De fato, dados $(a+bi),(c+di) \in \mathbb{C}$ temos*
$$(a+bi)\cdot(c+di) = (c+di)\cdot(a+bi)$$
$$(a+bi)^2 \cdot [(c+di)\cdot(a+bi)] = [(a+bi)^2 \cdot (c+di)] \cdot (a+bi).$$

Entre as classificações de álgebras de Jordan, trabalharemos em cima de uma em particular que são as Álgebras de Jordan Euclidianas.

Definição 4.3 (Álgebras de Jordan Euclidianas) *Dada uma álgebra de Jordan $\mathcal{J}$ onde está definido em seu espaço vetorial um produto interno $< .,. >$. Chamamos $\mathcal{J}$ de álgebra de Jordan Euclidiana se*
$$< x \cdot y, z > = < x, y \cdot z >, \forall x, y, z \in \mathcal{J}. \tag{27}$$

Cones

Definição 4.4 (Cones em um Espaço Vetorial) *Se V é um espaço vetorial, um subconjunto C não-vazio é um cone em V se $C + C \subset C$ e $\alpha C \subset C$ para todo $\alpha > 0$.*

Diremos que um cone é aberto se C for um conjunto aberto. Mais precisamente, usaremos o fato de que se C é aberto, então $int\overline{C} = C$, onde $\overline{C}$ é o fecho de C.

Definição 4.5 (Cones Simétricos) *Se V é um espaço de Hilbert com produto interno, um cone aberto Ω em V é dito simétrico se apresenta Autodualidade, isto é, $\Omega = \{v \in V / \langle v, x\rangle > 0, \forall x \in \overline{\Omega} - \{0\}\}$, e Homogeneidade, ou seja, dados $x, y \in \Omega$, existe um isomorfismo contínuo $g : V \to V$ tal que $g(x) = y$.*

Em dimensões finitas, o interior de um cone da forma $\{x^2 / x \in \mathcal{J}\}$ em uma álgebra de Jordan é sempre simétrico. Como vemos em [1], podemos relacionar o estudo de cones simétricos com uma álgebra não associativa sobre os reais.

Por definição, uma álgebra de Jordan é dita simples se seus únicos ideiais possíveis são os ideais triviais e um cone simétrico é dito irredutível se não é o produto direto de dois ou mais cones simétricos. Em [1] vemos que um cone simétrico é irredutível se e somente se a álgebra de Jordan Euclidiana associada for simples. Uma álgebra de Jordan euclidiana se decompõe como uma soma direta de ideais simples e um cone simétrico se decompõe como uma soma direta de cones simétricos irredutíveis.

Outra grande descoberta sobre as álgebras de Jordan é que podemos usá-las em uma decomposição espectral para cones simétricos aplicados em programação não linear, mais detalhes podem ser vistos em [3].

Programação

Uma programação não linear com cones simétricos pode ser definida como uma forma de minimizar (ou maximizar) uma função $F(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$ sujeita a $G(x) \in C$, onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R}^n \to A$ são funções contínuas e diferenciáveis, $C \subset A$ é um cone simétrico e A é um espaço vetorial com produto interno. Em programação quadrática teremos que F será da forma $F(x) = 0,5 \cdot x^T \cdot P \cdot x + c^T \cdot x$, onde x é um vetor de variáveis de decisão, Q é uma matriz simétrica que define a forma quadrática da função e c é um vetor de coeficientes lineares. Definindo a função Lagrangiana $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times A \to \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = F(x) + \lambda^T \cdot G(x)$$

onde λ é um vetor de multiplicadores de Lagrange. Para otimizar esta função usaremos as condições de KKT (Karush-Kuhn-Tucker) que são:

1. $\bullet F(x) + \bullet \lambda^T \cdot G(x) = 0$.

2. $G(x) \leq 0$ (restrições de igualdade e desigualdade são satisfeitas).

3. $\lambda_i G_i(x) = 0$ para $i = 1, \cdots, m$ onde m é o número de restrições de desigualdade (Restrição de complementaridade).

4. $\lambda_i > 0$ para $i = 1, \cdots, m$.

CONCLUSÕES

Os cones simétricos são usados para garantir que a restrição de complementaridade seja satisfeita. Se essa restrição é imposta em uma estrutura de álgebra de Jordan euclidiana, podemos usar a representação de matrizes reais da álgebra de Jordan para descrever essa restrição usando matrizes reais que preservam a estrutura da álgebra de Jordan. A relação entre álgebras de Jordan euclidianas e cones simétricos está na capacidade de representar e definir cones simétricos usando a estrutura matricial de certas álgebras de Jordan formalmente reais.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brito, C. A. Álgebras de Jordan e Cones Simétricos. **Universidade Federal do Pará**, 2021.

[2] MCCRIMMON, K. **A Taste Of Jordan Algebras**. Springer, 2004.

[3] VIANA, D. S. **Condições de Otimalidade para Otimização Cônica**. Universidade de São Paulo, 2019.

Álgebras com identidades polinomiais

Salomão, Mateus Eduardo[150]

Resumo: *Neste trabalho, será apresentada uma breve introdução à Teoria de PI-álgebras, isto é, o estudo de álgebras que satisfazem identidades polinomiais, um tema de pesquisa que vem sendo explorado significativamente na área de Álgebra. Serão abordados os conceitos e definições mais elementares, bem como alguns exemplos clássicos relacionados a esta teoria.*

Palavras-chave: *Identidades polinomiais, álgebras, matrizes.*

INTRODUÇÃO

O conceito de identidade em uma estrutura algébrica é bastante geral. As leis de comutatividade, associatividade e distributividade dos números reais que aprendemos no ensino básico, são exemplos de identidades. Vagamente falando, uma identidade é uma expressão simbólica envolvendo uma ou várias operações e uma ou várias variáveis, que é identicamente satisfeita quando as variáveis são substituídas por elementos de uma estrutura algébrica. Neste contexto, surge a teoria de PI-álgebras, que estuda identidades polinomiais para as álgebras, que são estruturas de significativa importância na Teoria de Anéis. O estudo de PI-álgebras é algo de grande relevância, pois as identidades polinomiais dão informações significativas a respeito da álgebra em questão.

A Teoria de PI-Álgebras

No que segue, serão abordados os conceitos elementares e resultados introdutórios a respeito da Teoria de PI-álgebras. Ademais, será apresentado um breve estudo sobre álgebras de matrizes.

Ao longo de todo o texto, K denotará um corpo.

Álgebras

Iniciamos apresentando a definição de álgebra, o objeto fundamental para o estudo da Teoria de PI-álgebras.

Definição 4.6 *Uma álgebra sobre K é um espaço vetorial A sobre K, equipado com uma operação binária $\cdot : A \times A \to A$ que satisfaz:*

i) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

[150] Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

iii) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$,

para todos $a, b, c \in A$ e todo $\lambda \in K$. A operação $\cdot$ é chamada de multiplicação ou produto. As definições de álgebra comutativa, álgebra associativa e álgebra unitária, seguem trivialmente a partir das propriedades da operação em A.

Alguns exemplos elementares de álgebras sobre K são os seguintes: o próprio corpo K; o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em K munido com o produto usual de matrizes, que denotaremos por $M_n(K)$; e o subconjunto de $M_n(K)$ das matrizes triangulares superiores também munido do produto usual, que denotaremos por $UT_n(K)$.

Identidades Polinomiais

Fixado um conjunto infinito e enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, denotamos por P o conjunto das palavras formadas pelas letras x_i's. Definimos $K\langle X\rangle$ o K-espaço vetorial com base $\{1\} \cup P$. Definimos um produto em $K\langle X\rangle$ por concatenação, isto é,

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_n})(x_{j_1} \cdots x_{j_m}) = x_{i_1} \cdots x_{i_n} x_{j_1} \cdots x_{j_m},$$

e o estendemos por linearidade a todos os elementos de $K\langle X\rangle$, o que torna este espaço uma álgebra associativa unitária, gerada por X. Os elementos de $K\langle X\rangle$ são chamados de *polinômios*.

Exemplo 4.3 *Alguns polinômios muito relevantes no estudo de PI-álgebras são os seguintes:*

i) *O comutador é definido por* $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$;

ii) *O polinômio de Hall é dado por* $H := [[x_1, x_2]^2, x_3]$;

iii) *O polinômio standard de grau n é definido por* $St_n := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$.

Em seguida, definimos o conceito de identidade polinomial para uma álgebra.

Definição 4.7 *Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio e A uma álgebra sobre K. Dizemos que f é uma identidade polinomial para A se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dizemos que A é uma PI-álgebra se A satisfaz uma identidade polinomial não nula. Denotaremos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais para A.

Cabe aqui observar, mas sem entrar em detalhes mais rigorosos, que o conjunto $T(A)$ tem a estrutura de um chamado T-ideal. Grosso modo, isso quer dizer que se um polinômio pertence a $T(A)$, então qualquer combinação linear de polinômios que são gerados a partir da troca de variáveis no polinômio em questão por outros polinômios, juntamente com a multiplicação à esquerda e à direita destes últimos termos por polinômios, também vai pertencer a $T(A)$. Neste caso, dizemos que o polinômio obtido após a combinação linear "segue" do anterior.

Exemplo 4.4 *Uma vez que K é comutativo, obtemos que $[x_1, x_2] \in T(K)$. Assim, K é uma PI-álgebra.*

Exemplo 4.5 *Se* $A_1, A_2, A_3, A_4 \in UT_2(\mathbb{R})$*, então*

$$[A_1, A_2][A_3, A_4] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para alguns $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, que não são necessariamente nulos. Portanto,* $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in T(UT_2(\mathbb{R}))$ *e* $UT_2(\mathbb{R})$ *é uma PI-álgebra.*

Em geral, Matsev e Siderov mostraram que a identidade $[x_1, x_2]\cdots[x_{2n-1}, x_{2n}]$ forma uma base para $T(UT_n(K))$, onde $n \geq 1$ e K é infinito, isto é, qualquer outra identidade de $UT_n(K)$ segue a partir desta identidade.

O problema de descobrir trodas as identidades polinomiais para $M_n(K)$ ainda não foi resolvido, até mesmo para tamanhos pequenos como $n = 2$, neste caso, por exemplo, se o corpo é infinito de $\text{char}(K) = 2$ o problema segue em aberto. Abaixo, descrevemos um caso em que o estudo já está completo.

Teorema 4.7 *Se* $char(K) = 0$ *ou* K *é infinito de* $char(K) > 3$*, os polinômios* H *e* St_4 *são identidades polinômiais para* $M_2(K)$*. Além disso, estas identidades formam uma base para* $T(UT_2(K))$*.*

Para uma abordagem mais ampla sobre o tema, e para consultar as provas dos resultados apresentados neste texto, indicamos as referências [1], [2] e [3], que são os livros clássicos a respeito da teoria de PI-álgebras.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALJADEFF, E.; GIAMBRUNO, A.; PROCESI, C.; REGEV, A. **Rings with Polynomial Identities and Finite Dimensional Representations of Algebras**. Providence: American Mathematical Society, 2020.

[2] DRENSKY, V. **Free algebras and PI-algebras**. Singapore: Springer, 1999.

[3] GIAMBRUNO, A.; ZAICEV, M. **Polynomial Identities and Asymptotic Methods**. Providence: American Mathematical Society, 2005.

Dinâmica de transmissão e controle da Chikungunya

Modelagem Matemática e Simulações Computacionais

Felipe, Néder Soares[151] e Silveira, Graciele P.[1]

Resumo: *A Chikungunya emerge como um desafio premente à saúde pública, caracterizada pela subnotificação e pela sintomatologia similar à dengue e à zika. Estudos recentes evidenciam sua letalidade e o impacto expressivo no Brasil, com surtos recorrentes e mortalidade preocupante. A carência de uma vacina aprovada sublinha a urgência de estudos para melhor compreensão da doença e desenvolvimento de estratégias de controle. Nesse contexto, propõe-se um modelo matemático integrado aos dados epidemiológicos atuais para compreender a dinâmica de transmissão da Chikungunya, prever cenários e orientar as estratégias de controle, podendo auxiliar no direcionamento das ações, alocação de recursos e intervenções de maneira a mitigar os impactos da doença.*

Palavras-chave: *Chikungunya, modelo SIR, método de Euler.*

INTRODUÇÃO

A febre Chikungunya, frequentemente confundida com a dengue devido à semelhança dos sintomas, está gerando crescente preocupação devido à sua propagação e mortalidade subestimada. Estudos recentes revelaram que o vírus CHIKV, causador da Chikungunya, pode ser mais letal do que se pensava inicialmente, superando inclusive o vírus da dengue em mortalidade[2], destacando a dificuldade de diagnóstico, principalmente em áreas onde ambos os vírus coexistem, o que contribui para a subnotificação dos casos de Chikungunya.

O propósito deste trabalho é estudar a dinâmica de transmissibilidade dessa doença, via sistema de equações diferenciais ordinárias, estimativa de parâmetros e simulações computacionais à partir do método de Euler. Ressalta-se a importância de reconhecer a Chikungunya como uma ameaça significativa à saúde pública e de investigar medidas eficazes de vigilância, prevenção e tratamento.

CONTEXTO EPIDEMIOLÓGICO E A MODELAGEM

A Chikungunya causada pelo vírus CHIKV, é uma doença viral transmitida por mosquitos do gênero *Aedes*. O nome da língua swahili, "chikungunya", significa "aqueles que se dobram", em referência à postura dos pacientes durante a primeira epidemia na Tanzânia, em 1952. Enquanto se

[151]PPGECE, Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba.

aguarda a aprovação regulatória de uma vacina, o tratamento no Brasil se concentra no alívio dos sintomas e a prevenção se baseia na proteção contra picadas de mosquito e em medidas de controle desses vetores.

O vírus CHIKV emergiu no Brasil em 2013, desencadeando sete surtos significativos em uma década. A análise dos dados genômicos e epidemiológicos revelou que a doença pode ter um impacto letal muito superior ao que se pensava inicialmente [2]. O vírus causou 253,5 mil casos confirmados no país entre 2013 e 2022, resultando em 1,8 mortes a cada mil casos. Os últimos dados epidemiológicos no Brasil revelam uma situação preocupante, com um total de 163.617 casos presumíveis de Chikungunya até a última semana de abril de 2024, conforme relatórios do Ministério da Saúde[1], além do registro de 82 óbitos confirmados e 103 em investigação, destacando a severidade deste agravo.

É evidente a realidade dos desafios desta doença, ressaltando a urgência de estudos adicionais sobre seus padrões epidemiológicos. A modelagem matemática pode ser favorável nesse contexto, pois ela é capaz de lidar com questões epidemiológicas complexas e em constante evolução[4], permitindo simular cenários, explorar estratégias de controle, avaliar medidas preventivas e propor o direcionamento de recursos de forma mais eficiente.

O modelo SIR[3], comumente utilizado em epidemiologia, divide a população em três compartimentos distintos: suscetíveis (S); infectados (I); e recuperados ou removidos (R). Ao incorporar o modelo SIR a um modelo populacional do mosquito vetor da doença, obtém-se uma visão mais completa da transmissão do CHIKV. Essa integração oferece uma perspectiva abrangente para avaliar estratégias de controle e prevenção, permitindo prever cenários epidemiológicos potenciais sob diversas condições.

O sistema (1) descreve o resultado do acoplamento de um modelo SIR à um modelo populacional do vetor da doença, em que: S - Pessoas suscetíveis, I - Pessoas infectadas, R - Pessoas Recuperadas/Removidas; A - Mosquitos na fase aquática, L - Mosquitos fêmeas na fase alada, C - Mosquitos fêmeas contaminadas; ϕ - Oviposição, ψ - Capacidade de suporte, θ - Transmissão de mosquito para pessoa, ε - Transmissão de pessoa para mosquito, λ - Recuperação da doença, γ - Passagem da fase aquática para a fase alada, μ - Mortalidades, α - Controle mecânico.

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -\theta SC \\ \dfrac{dI}{dt} = \theta SC - (\lambda + \mu_I)I \\ \dfrac{dR}{dt} = \lambda I + \mu_I I \\ \dfrac{dA}{dt} = \phi\left(1 - \dfrac{A}{\psi}\right)(L + C) - (\gamma + \mu_A + \alpha_A)A \\ \dfrac{dL}{dt} = \gamma A - \varepsilon LI - (\mu_L + \alpha_L)L \\ \dfrac{dC}{dt} = \varepsilon LI - (\mu_C + \alpha_C)C \end{cases} \tag{28}$$

CONCLUSÕES

O modelo está sendo calibrado através de uma investigação acadêmica e análise de dados governamentais, visando refletir com precisão a situação nacional da doença. O objetivo é entender como as estratégias de controle mecânico sobre o vetor impactam na dinâmica de transmissão da doença. Implementações computacionais do método de Euler em linguagem Python estão sendo executadas e a Figura 1 mostra uma curva obtida para a população humana de infectados, levando-se em conta os dados reais do primeiro trimestre de 2024.

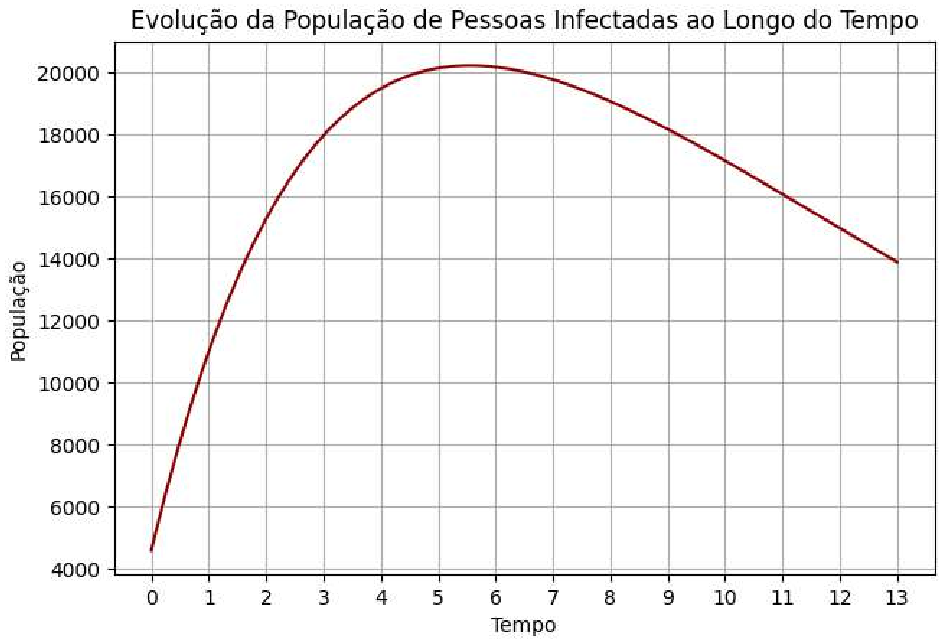


Fig. 49: Autoria própria.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. **Painel de Monitoramento das Arboviroses.** Ministério da Saúde. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/a/aedes-aegypti/monitoramento-das-arboviroses. Acesso em: 27-04-2024

[2] DE SOUZA, W. M.; LIMA, S. T. S.; et al. Spatiotemporal dynamics and recurrence of chikungunya virus in Brazil: an epidemiological study. **The Lancet Microbe**, v. 4, n. 5, p. 319, 2023.

[3] BACAER, N.; et al. **Matemática e Epidemias.** Paris: Cassini, 2021.

[4] BASSANEZI, R. C. **Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática.** Campinas: Contexto, 2002.

Análises das interpretações e do custo operacional dos sistemas lineares do tipo 3×3

Neto, Oséas Guimarães Ferreira[152]; Nunes, Marly dos Anjos[153] e Santa Brígida, Júlia Barbosa[154]

Resumo: *Resumo:A partir de uma experiência vivida em sala de aula por um dos autores, este trabalho tem por objetivo produzir uma análise de interpretação e do custo operacional dos três modelos mais usados no ensino médio para a resolução de Sistemas Lineares do tipo 3×3. Sobre o olhar da Teoria do Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, usamos uma metodologia de caráter qualitativo para interpretação das representações geométrica, matricial e vetorial, e quantitativa para o custo operacional das resoluções por escalonamento, resolução matricial e Regra de Cramer. Verificamos que as três interpretações são necessárias para compor o entendimento e que o método do escalonamento possui o menor custo operacional na resolução de Sistemas Lineares.*

Palavras-chave: *Sistemas lineares, registros de representação, interpretações e custo operacional.*

INTRODUÇÃO

Os Sistemas Lineares estão em destaque na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) na competência específica 3, com o objetivo de proporcionar ao aluno a "utilização de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos no campo Álgebra (...), para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando resultados e construindo argumentações.". Porém, essa tarefa pode exigir dos discentes diferentes processos cognitivos à depender da natureza do problema e do tipo de análise que se queira destacar, ou seja, haverá casos em que os estudantes deverão fazer alguns tratamentos a nível de modelagem antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto maior grau de interpretação. Isso fica em evidência quando observamos as habilidades (EM13MAT301) e (EM13MAT315) da BNCC.

> Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais. Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma

[152] Secretaria de Educação do Estado do Pará, oseas.neto3234@escola.seduc.pa.gov.br
[153] Universidade Federal do Pará, marlynunes@ufpa.br
[154] Universidade Federal do Pará, juliabarbosa328@gmail.com

solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma. (BNCC – 2018. pg. 527)

Este trabalho tem por objetivo analisar as interpretações e o custo operacional de três representações mais usadas no ensino de Sistemas Lineares do tipo 3×3, com uma metodologia qualitativa para as interpretações e quantitativa para o custo operacional. Os registros escolhidos são os mais presentes nos livros textos usados no ensino médio. A nível de interpretação temos as representações geométrica, matricial e vetorial, já a nível de método de resolução que aqui chamaremos de custo operacional temos o escalonamento, resolução matricial e a regra de Cramer. Ao final das seções analisadas listamos os principais aspectos que devem ser considerados na escolha de um desses registros, seja a nível de interpretação bem como na quantidade de cálculos realizado.

SISTEMAS LINEARES

Ao longo deste trabalho sempre faremos referência ao sistema (S), como sendo:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1a_2x + b_2y + c_2z = d_2a_3x + b_3y + c_3z \qquad (S)$$

E apresentamos a resolução desse sistema (S), sobre três aspectos:

Resolução por Escalonamento

O método de escalonamento consiste em substituir o sistema por um equivalente, isto é, que possua as mesmas soluções, aqui denotado por . Toda matriz pode ser transformada por meio de uma sequência de transformações elementares sobre linhas numa matriz em uma forma muito especial, a forma escalonada.

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad my + nz = h \quad tz = g \qquad (S_e)$$

Resolução Matricial

Este método de resolução consiste em escrever (S) sob a forma (S_M), praticamente nos impõe a solução $B \cdot A^{-1}$, ou seja, exige que exista a inversa A^{-1} da matriz A. Por definição A^{-1} é a matriz que ao ser multiplicada por tem como resultado a matriz identidade, porém para que A^{-1} exista, é necessário e suficiente que o determinante $det(A)$ da matriz seja diferente de zero, se isso ocorrer, então

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}(\Delta_{11} - \Delta_{21}\Delta_{31} - \Delta_{12}\Delta_{22} - \Delta_{32}\Delta_{13} - \Delta_{23}\Delta_{33}) \qquad (M_I)$$

onde o determinante menor Δ_{if} é o determinante da matriz A obtida de pela supressão da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Resolução pela Regra de Cramer

Aqui usaremos uma notação simplificada, onde denotamos por $det[u, v, w]$ para indicarmos o determinante da matriz cujas colunas são os vetores $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ e $w = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Se a terna (x, y, z) é a solução do sistema (S), isto é, se $d = xa + yb + zc$, de acordo com a interpretação vetorial (S_v), então as propriedades elementares dos determinantes nos permite escrever que as seguintes equações, presumindo que o $det(a,b,c) \neq 0$, obtemos

$$x = \frac{det[d,b,c]}{det[a,b,c]} \quad y = \frac{det[a,d,c]}{det[a,b,c]}, \quad z = \frac{det[a,b,d]}{det[a,b,c]}.$$

A esse conjunto de expressões que conhecemos hoje como sendo a Regra de Cramer.

COMPARANDO OS TRÊS MÉTODOS

Após o levantamento do custo operacional de cada método na resolução de um Sistema Linear, montamos o gráfico 01, afim de deixar esses dados de forma mais explícita possível e poder fazer as considerações necessárias sobre os métodos. Com o gráfico, observamos claramente que o método do escalonamento é o de menor custo operacional se considerarmos apenas a operação de multiplicação, que ele possui o mesmo custo operacional nas divisões que a Regra de Cramer e que no geral apresenta a menor quantidade de operações.

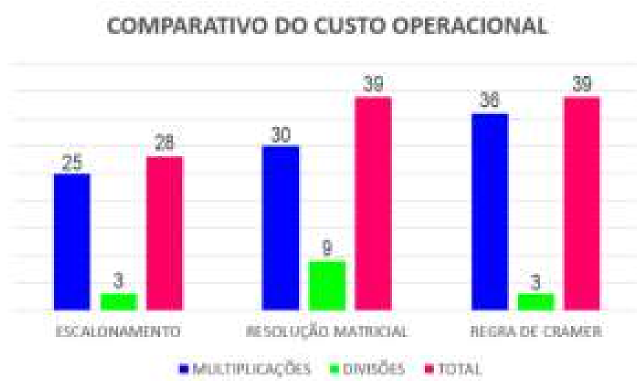


Fig. 50: Autoria própria

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após analisarmos os três modelos de representação mais usados de Sistemas Lineares no ensino médio, comprovamos que eles possuem elementos essenciais para o entendimento do conteúdo, no entanto, em todos eles necessitam-se de complementos, que sempre estão sob a esfera de influência dos demais métodos. Pois se um sistema (S) pode ser escrito também no formato matricial (S_M) e no formato vetorial (S_V), fica evidente que cada uma dessas representações possui um conjunto de habilidades que precisam ser satisfeitas e contabilizadas para que haja o melhor entendimento do conteúdo, e que isso só ocorre quando o aluno percebe as conexões e as interseções presentes em cada representação.

Vale ressaltar também que se todas as interpretações e os métodos de resolução de Sistemas Lineares do tipo 3×3 aqui discutidos, forem aplicados de forma planejada e equilibrada o aluno terá a sua disposição combinações de registros de representação que favorecerão o entendimento do conteúdo além de proporcionar relações com outros assuntos e a utilização de tecnologias a eles associadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Anton, H.;Busby, R.C.; **Álgebra Linear Contemporânea.** Porto Alegre: Bookman, 2006.

[2] Brasil; **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: `https://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_El_EF_110518_ersaofinal_site.pdf`. Acesso em: 18/07/2022.

[3] Dante, L. R.; **Matemática.** Volume único, Editora Ática, SP, 2005.

Modelagem matemática sobre tópicos cotidianos

Rapelli, Osni J.[155]; Salvador, José A.[156]

Resumo: *A crescente urgência em abordar questões ambientais e promover a conscientização entre os estudantes motiva a busca por métodos educacionais eficazes. Este artigo propõe uma abordagem inovadora que integra a modelagem matemática no contexto da educação ambiental a partir de dados de artigos e revistas, visando envolver os estudantes em reflexões críticas e na busca por soluções sustentáveis. Os resultados preliminares indicam uma melhoria significativa no ambiente de aprendizado, com os estudantes aplicando conceitos de forma prática e tem demonstrando satisfação tanto por parte dos professores quanto dos estudantes.*

Palavras-chave: *Interdisciplinaridade, conscientização ambiental, educação matemática, modelagem matemática.*

INTRODUÇÃO

Os estudantes envolvem facilmente em temas como a preservação do meio ambiente e a economia de recursos naturais. E a Modelagem Matemática é uma ferramenta de grande validação e eficácia para abordar investigação, discussão desses temas, propiciando realizações de cálculos aritméticos básicos com os dados, tabelas e gráficos para tirar conclusões e prever cenários futuros que é contemplado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1]. Desta forma eles podem pensar em como reduzir os gastos através de modelos matemáticos. O exemplo que apresentamos aqui é sobre a água potável, o grande problema do seu consumo excessivo, desperdício e questionando como ela poderia ser consumida de forma mais inteligente.

DESCRIÇÃO

O processo se inicia com a criteriosa seleção de fontes, como notícias, revistas e artigos científicos, que abordam a gestão responsável dos recursos naturais. A modelagem matemática é então aplicada, como elaboração de planilhas, traçadores de gráficos para análise e interpretação de dados empregando ferramentas tecnológicas.

A abordagem de grupo é enfatizada, pois é fundamental o desenvolvimento das habilidades sociais, de escuta ativa dos outros elementos, proporcionando um ambiente colaborativo para a troca de ideias e o desenvolvimento de habilidades de cooperação. A metodologia, distribuída ao

[155] Osni Rapelli Matemático
[156] DM - UFSCar

longo de aproximadamente 4 aulas de 50 minutos [2], integra também tecnologias educacionais para enriquecer a experiência de aprendizado.

Após a leitura do material escolhido e mediante as informações que o texto nos oferece, os estudantes são convidados a responderem uma série de perguntas em ordem crescente de dificuldade elaborada pelo professor. Extrair informações, conseguir chegar às conclusões mediante informações extraídas do texto e gerar ideias de modelos de economia baseado nas informações em questão para propor formas de economia do bem natural em questão.

Focamos aqui a água potável e o grande problema do seu consumo excessivo. Os estudantes são levados a explorar o material pesquisado e a pensar na quantidade de água potável que usam e que temos para projetar quanto tempo este bem durará. São convidados a criar modelos para economizar o coneumo de água potável como ela poderia ser consumida de forma mais inteligente.

Munidos de novas informações os grupos são convidados a criar um modelo e a descreverem passo a passo de como as pessoas poderiam agir para que aquele bem seja conservado da melhor forma possível. Com os materiais escolhidos pelos alunos, eles são convidados a criar a sua própria ficha com perguntas e questionamentos que possam ser feitas projeções e conclusões. Essas fichas são entregues ao professor, agindo como um guia, que numa primeira análise, conversa com cada grupo para fazerem uma lapidação das questões

Novas fichas geradas são trocadas e cada grupo faz uma nova rodada de leitura e de aplicação das respostas das questões, criando modelos e projeções para apresentarem os resultados, gerando uma discussão sobre tudo que os grupos pensaram a respeito do tema e a respeito de como ficará esse bem ao longo dos anos de acordo com os modelos, e aí sugerir a economia sustentável do mesmo. Munidos de todas as informações, eles produzem cartazes, vídeos, panfletos e qualquer outro material para divulgação na escola e na comunidade. Todo esse material informativo pretende primeiro informar, através da aplicação de gráficos estatísticos, infogramas e vídeos institucionais, a importância do bem de consumo e como preservá-lo.

Segue alguns exemplos de ideias de fichas que utilizamos no trabalho.

1. Pesquise como se faz os cálculos para estipular os valores para o consumo de água e esgoto. Obtenha uma função que modela o custo da conta de água e esgoto de uma cidade.

2. Elabore uma função custo de água e esgoto dependendo o consumo.

3. Esboce o gráfico da função custo de água e esgoto da conta considerada.

   Sugestão: A conta de água de 2023 de uma cidade vem com a Tabela 1, que pode ser explorada:

Tab. 1: Base de cálculo para o custo da água e esgoto

Faixa de consumo (m^3)	Água (R$)	Esgoto (R$)	Total (R$)
0 a 10	5,26	4,21	9,47
11 a 20	8,89	71,2	16,01
21 a 30	14,48	11,58	26,06
31 a 40	18,89	15,12	34,01
41 a 50	19,75	15,80	35,55
51 a 60	21,07	16,85	37,92
61 a 9999	25,41	20,34	45,75

É razoável este valor para a água potável e o esgoto?

4. Explore o consumo de água na sua casa. Voce poderia economizar mais água e contribuir com a natureza? Descreva como.

5. Imagina uma torneira pingando. Quanto de água ela desperdiça numa hora? num dia? num mês? num ano?

6. Imagina uma torneira vazando um filete de água. Quanto de água ela desperdiça numa hora? num dia? num mês? num ano?

7. A ONU calcula que para suprir as necessidades diárias de uma pessoa ao longo do mês são necessários $4\,m^3$ de água, que quantidade de água supriria o consumo mensal da sua cidade.

CONCLUSÕES

Até o momento implementamos algumas atividades deste tipo em alguns grupos de estudantes numa forma de teste. Nas primeiras aplicações os resultados foram muito satisfatórios. Houve uma transformação na aula deixando o ambiente mais amigável e convidativo. O aluno conseguiu aplicar vários conceitos que até o momento acreditava, não estarem na sua realidade, e isso provocou uma satisfação enorme tanto por parte de docentes quanto de discentes.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 12 out. 2023.

[2] Rapelli, O. J. **Modelagem matemática e educação ambiental: desenvolvimento de fichas ambientais para aplicação no ensino básico**. São Carlos. 2019. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12126 Acesso em 20 mar. 2024.

Agulhas de Buffon: entortadas são ainda mais úteis!

Paulo Ruffino[157]

Resumo: *Trataremos de como o problema clássico conhecido como "Agulhas de Buffon"(segmentos de retas com comprimento ℓ) ficam muito mais interessantes quando são entortadas. No problema original, n agulhas idênticas são atiradas aleatoriamente em um plano recoberto com retas paralelas que distam uma unidade de comprimento entre elas. O número de cruzamentos m, das agulhas espalhadas aleatoriamente no plano, dividido pelo número total de agulhas n, converge para $2\ell/\pi$. Daí, realizando tal experimento, temos uma maneira aleatória de obtermos aproximações (tão precisas quanto quisermos) de uma das constantes mais importantes e onipresentes na Matemática: o π. Nesta apresentação mostraremos como esse fenômeno se estende para agulhas entortadas (i.e. segmentos de curvas planas). A partir daí, como se obtém uma demonstração elementar para a convergência mencionada acima e sobretudo como inverter o problema e calcular comprimento de curvas (diferenciáveis ou não) usando seus cruzamentos aleatórios por retas paralelas igualmente espaçadas.*

Palavras-chave: *Agulhas de Buffon, variáveis aleatórias, esperança, lei dos grandes números.*

INTRODUÇÃO

O que hoje conhecemos como o problema clássico das Agulhas de Buffon foi criado pelo Conde de Buffon (França, 1707-1788), um intelectual, naturalista, iluminista que nos legou, dentre outras coisas, uma coleção de 44 livros de história natural, cobrindo assuntos desde astronomia, botânica, matemática, física, zoologia, vulcanologia, clima, dentre inúmeros outros tópicos de ciências naturais. Foi, por exemplo, o primeiro cientista a dizer que os animais deveriam ser evoluções de animais anteriores. Teve, portanto enorme influência também na teoria de seleção natural de Charles Darwin na Inglaterra. Dito isso, dentre centenas de outros legados deste cientista, nesta apresentação, exploraremos generalizações, curiosidades e aplicações do problema das "Agulhas de Buffon".

[157]Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Matemática.

Fig. 51: Caso clássico: agulhas retas distribuídas aleatoriamente em plano com paralelas equidistantes.

O problema em original, suas generalizações e aplicações

No problema original, n agulhas idênticas são atiradas aleatoriamente em um plano recoberto com retas paralelas que distam uma unidade de comprimento entre elas. Pela lei dos grandes números, o número de cruzamentos m, das agulhas espalhadas aleatoriamente no plano, dividido pelo número total de agulhas n, converge para $2\ell/\pi$, ou ainda mais geralmente, se as retas paralelas estiverem a uma distância r entre elas então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{2\ell}{r\pi}.$$

A lei dos grandes números nos diz que o lado direito da equação acima é a esperança da variável aleatória dada pelo número de cruzamentos que cada agulha terá com uma das retas paralelas. Note que se $\ell < r$ então essa esperança coincide com a probabilidade de cruzamento. Realizando tal experimento, temos uma maneira aleatória de obtermos aproximações (tão precisas quanto quisermos) de uma das constantes mais importantes e onipresentes na Matemática: o π. Nesta apresentação mostraremos como esse fenômeno se estende para agulhas entortadas (i.e. segmentos de curvas planas). A partir daí, como se obtem uma demonstração elementar para a convergência mencionada acima e sobretudo como inverter o problema e calcular comprimento de curvas (diferenciáveis ou não) usando seus cruzamentos aleatórios por retas paralelas igualmente espaçadas.

Curiosamente, no livro inspirador de um dos mais renomados matemáticos do final do século passado, [2], ele se engana e diz que o lado direito do limite acima é a <u>probabilidade</u> de cruzamento. Ele só tem razão se $\ell < r$, caso contrário veja como podemos fazer ℓ crescer tanto quanto quisermos e termos a “probabilidade"maior que um (o que naturalmente um absurdo!). Essa generalização de entortar as agulhas aparece também no (igualmente inspirador) livro que faz uma paródia com o famoso "THE BOOK"do matemático húngaro Paul Erdös.

BIBLIOGRAFIA

[1] AIGNER, M. and Ziegler, G. **Proofs from THE BOOK**. 6a Edição, Springer Berlin, 2018.

[2] ARNOLD, W. **Mathematical Understanding of Nature: Essays on Amazing Physical Phenomena and their Understanding by Mathematicians**, AMS, 2014.

Equações de Buckley-Leverret com termos difusivos e dispersivos

Garcia, Raphael de O.[158] e Silveira, Graciele P.[159]

Resumo: *O objetivo deste trabalho foi investigar o escoamento de fluidos bifásicos via equações de Buckley-Leverett modificadas, incluindo termos difusivos e dispersivos, aplicadas na extração de petróleo. Para isso, um esquema essencialmente não oscilatório, um método de Runge-Kutta e um esquema de diferenças finitas foram implementados computacionalmente. O uso desses métodos possibilitou obter soluções estáveis o suficiente para estudar os perfis de mistura entre água saturada e petróleo, para diversas combinações entre os coeficientes difusivos e dispersivos.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, equações de Buckley-Leverret, fluidos bifásicos.*

INTRODUÇÃO

Um problema central da indústria de petróleo é o escoamento de fluidos bifásicos, em tubulações preenchidas por um meio poroso, caracterizados pela injeção de água saturada para a manutenção da extração do petróleo. Neste sentido, Buckley e Leverret [1] propuseram um modelo matemático de fluidos bifásicos incompressíveis via equações diferenciais parciais, métodos numéricos e técnicas computacionais para obter soluções aproximadas e auxiliar no estudo sobre extração de petróleo.

Recentemente, termos difusivos e dispersivos foram adicionados para incluir efeitos de infiltrações e/ou absorção de petróleo pelo meio poroso na modelagem, revelando complexos efeitos na evolução temporal dos fluidos envolvido.

O propósito desta pesquisa foi estudar o impacto dos termos difusivos e dispersivos na dinâmica de fluidos bifásicos, compostos por água saturada e petróleo, via equações de Buckley-Leverret Modificadas. Para isto, um esquema essencialmente não oscilatório de quinta ordem (WENO-5) [3], acoplado a um método do tipo Runge-Kutta de três estágio (RK3-TVD) e a um esquema de diferenças finitas centrado de quarta ordem foi implementado, para a obtenção de soluções numéricas. Códigos próprios foram elaborados em Octave e cenários foram gerados variando os parâmetros difusivos e dispersivos, a fim de comparar distintas dinâmicas simuladas.

MODELAGEM MATEMÁTICA

As Equações de Buckley-Leverret Modificadas são representadas pela expressão:

$$q_t + f(q)_x = \varepsilon q_{xx} + \varepsilon^2 \kappa q_{xxt}, \tag{29}$$

[158] Universidade Federal de São Paulo - Campus Osasco.

[159] Universidade Federal de São Carlos - Campus Sorocaba.

em que $f(q) = \dfrac{q^2}{q^2 + a(1-q^2)}$ é o fluxo de água, $0 < a < 1$ representa a porosidade do meio e $1 - f(q)$ é o fluxo de óleo, com $q = q(x,t)$. A Equação (29) modela um escoamento da esquerda para a direita, em que a espessura do tubo não influencia na dinâmica em questão, ε é o coeficiente de difusibilidade e κ o coeficiente dispersivo [2].

O restabelecimento do fluxo de óleo, da esquerda para a direita, pode ser feito preenchendo parte da tubulação à esquerda com água saturada. Tal procedimento é descrito pela seguinte função:

$$q(x,0) = 1 - \left[\frac{1 + tanh\left(\alpha(x-a)\right)}{2}\right], \tag{30}$$

em que a é um parâmetro associado a posição da função e α corresponde ao quão rápido a função varia de zero a um.

Do ponto de vista de métodos numéricos, considera-se a Equação (29) como

$$\left(q - \varepsilon^2 \kappa q_{xx}\right)_t + f(q)_x = \varepsilon q_{xx}, \tag{31}$$

e então

$$\begin{cases} p_t + f(q)_x = \varepsilon q_{xx} \\ p = \left(q - \varepsilon^2 \kappa q_{xx}\right) \end{cases} . \tag{32}$$

SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Nas simulações, o domínio espacial $x \in [-1, 1]$ foi adotado com 128 subintervalos e um domínio temporal $t \in [0\ ,\ 0,3125]$, com 200 subintervalos, isto é, $\Delta x = 1/64$ e $\Delta t = 1/640$. Os parâmetros foram escolhidos conforme a Tabela 1.

Exemplos	ε	κ
ex1	0,00	0,00
ex2	0,04	0,00
ex3	0,04	0,90
ex4	0,04	0,95
ex5	0,04	0,97
ex6	0,04	0,98
ex7	0,04	0,99

Tab. 2: Autoria própria

Na Figura 1 à esqueda tem-se em amarelo a condição inicial representando a interface entre água saturada e petróleo. Na cor magenta, o exemplo 1 (ex1) cuja evolução é puramente hiperbólica. Em vermelho, nota-se o efeito do termo difusivo, cujas transições entre água e óleo ocorrem de maneira suave (exemplo 2 ou ex2). Ao adicionar o termo dispersivo, a difusão é afetada e a evolução fica semelhante ao caso do exemplo 1, no entanto, o fluido desloca-se mais rápido para a direita (exemplo 3, cor preta). Ao aumentar o valor do termo dispersivo, oscilações na mistura entre os fluidos são vistas (exemplo 6, cor azul) e a dinâmica torna-se mais complexa.

A Figura 1 à direita mostra o aumento das oscilações à medida que os valores do coeficiente dispersivo aumentam, mantendo a difusão fixa. Dos exemplos 4 ao 7 percebe-se tal aumento nas oscilações e tais oscilações são características do fenômeno dispersivo.

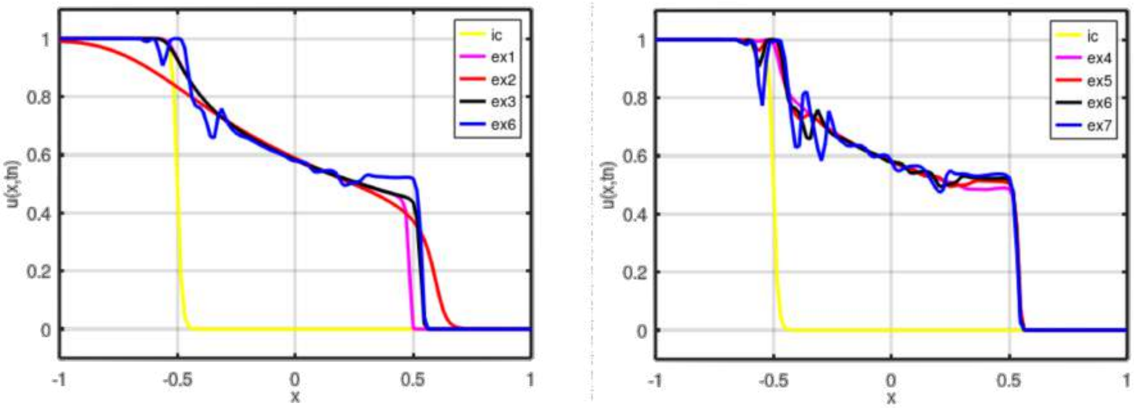


Fig. 52: Exemplos de simulações conforme parâmetros da Tabela 1. Autoria própria

BIBLIOGRAFIA

[1] BUCKLEY, S. E., LEVERRET, M. C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. **Transactions AIME**, v. 146, p. 187–196, 1942.

[2] GARCIA, R. O., SILVEIRA, G. P., Essentially non-oscillatory schemes applied to Buckley-Leverett equation with diffusive term. **Latin-American of Journal Computing**, v. 11, n. 1, p. 42-55, 2024.

[3] JIANG, G-S., SHU, C-W., Efficient Implementation of Weighted ENO schemes. **Journal of Computacional Physics**, v. 126, p. 202-228, 1996.

Experiência de formação docente

Reflexões sobre o estágio obrigatório no curso de licenciatura em matemática

Reis, Ruam Waldiney Santos dos[160], Costa, Larissa Fonseca[161], Gerlândia de Castro Silva[162]

Resumo: *O estágio docente é essencial na formação de professores, permitindo a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos e a reflexão crítica sobre a realidade educacional. Durante esse período, os estagiários desenvolvem habilidades pedagógicas e transformam a teoria em prática, preparando-se para o ensino futuro. Na disciplina de Matemática, frequentemente desafiadora para os estudantes, é fundamental que os professores apresentem o conteúdo de forma clara e objetiva, para promover o interesse e a motivação. O planejamento cuidadoso e a identificação da melhor abordagem para cada turma são cruciais para o sucesso do ensino. Assim, o estágio oferece uma oportunidade valiosa para os estagiários se adaptarem às demandas da docência, promovendo a inclusão, a diversidade cultural e a incorporação de tecnologias educacionais. Neste trabalho, apresentam-se reflexões sobre esta experiência em uma escola pública paraense. A experiência de estágio, acompanhada por profissionais experientes, permitiu o desenvolvimento de habilidades práticas e a reflexão sobre o papel do professor como mediador do conhecimento e agente de transformação social.*

Palavras-chave: *Estágio docente, matemática, ensino, planejamento.*

INTRODUÇÃO

O estágio docente é uma fase crucial na formação de professores. Durante esse período, tem-se a oportunidade de aplicar os conhecimentos adquiridos durante o curso, integrar teoria e prática, promovendo ação-reflexão e adquirir habilidades pedagógicas para o futuro ensino.

A Matemática, para muitos estudantes, é vista como uma disciplina desafiadora, muitas vezes percebida como complexa ou abstrata. Portanto, é essencial que o professor apresente o conteúdo de maneira clara e objetiva, para instigar a curiosidade, o interesse e a motivação do estudante. Para isso, é importante planejar e identificar a melhor abordagem para a turma e como implementá-la.

Durante o estágio, os estagiários têm a oportunidade de observar, planejar e encontrar maneiras de implementar sua metodologia de ensino e toda a organização do trabalho pedagógico. Eles também podem desenvolver materiais que auxiliem no aprendizado dos estudantes. Além disso, é crucial identificar as dificuldades que podem surgir durante esse período, para que possam

[160]Graduando do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará `ruamsantos2806@gmail.com`

[161]Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará`larissafonse2002@gmail.com`

[162]Docente do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará`gerlandia@ufpa.br`

ser elaboradas estratégias e práticas metodológicas que atendam às necessidades de ensino-aprendizagem.

Os estagiários podem observar a diversidade de estilos de aprendizado e buscar métodos e alternativas de ensino que sejam estimulantes e inclusivos, questionar as formas de apropriação e emprego dos conteúdos e repensar os modelos de avaliação. É possível, neste processo, portanto, exercitar a ação-reflexão. Nesse contexto, é possível desenvolver o pensamento crítico e o raciocínio lógico rápido, e construir explicações sobre a importância da Matemática no cotidiano e sua aplicação em diferentes contextos.

Nos cursos de licenciatura, o estágio na docência é uma etapa essencial, pois permite que os futuros docentes coloquem em prática suas habilidades pedagógicas junto com seus conhecimentos adquiridos durante o curso. Nesta etapa, é fundamental observar, planejar e obter experiências que o auxiliem durante sua carreira profissional.

Dentro desse contexto, é importante que o estagiário desperte a necessidade de um ensino que promova a conscientização e o diálogo, que possibilite ao estudante o protagonismo na construção/apropriação do conhecimento.

Segundo a lei Nº 11.788 (Brasil, 2008) o "Estágio é o ato educativo escolar supervisionado, desenvolvido no ambiente de trabalho". Esta lei tem como intuito garantir que o estágio seja uma atividade complementar do currículo. Desta forma, o estagiário pode pôr em prática os conhecimentos obtidos em sala, levando a uma oportunidade de desenvolver suas habilidades pedagógicas e metodologias de ensino.

Esta premissa é também corroborada no Art. 15 da Resolução CNE/CP Nº 2 (Brasil, 2019), quando enfatiza que "A prática deve estar presente em todo o percurso formativo do licenciando, com a participação de toda a equipe docente da instituição formadora, devendo ser desenvolvida em uma progressão que, partindo da familiarização inicial com a atividade docente, conduza, de modo harmônico e coerente, ao estágio supervisionado, no qual a prática deverá ser engajada e incluir a mobilização, a integração e a aplicação do que foi aprendido no curso, bem como deve estar voltada para resolver os problemas e as dificuldades vivenciadas nos anos anteriores de estudo e pesquisa".

O Estágio é um momento crucial para a formação, pois é quando se trabalham as práticas pedagógicas, desempenhando-se o papel de futuro professor e acadêmico. Nesta fase de atuação acadêmica, pode-se trabalhar o lado emocional e social, bem como o trabalho em equipe e a Comunicação. O estágio é compreendido como um processo de enriquecimento, promovendo experiências que auxiliam em seu crescimento profissional e intelectual.

A reflexão sobre o papel do professor como mediador do conhecimento, facilitador do processo de aprendizagem e agente de transformação social ressalta a responsabilidade ética e social inerente à docência. A compreensão da diversidade cultural, o reconhecimento da singularidade de cada estudante e a promoção da inclusão são elementos fundamentais para uma prática docente eficaz e centrada no aprendiz.

No contexto das transformações educacionais e avanços tecnológicos, a docência também enfrenta a necessidade de adaptação constante. A incorporação de tecnologias educacionais, aliada a uma abordagem flexível e inovadora, pode potencializar o engajamento dos alunos e a eficácia do processo educativo. Portanto, o estágio é uma oportunidade para o estagiário se adaptar a essas mudanças e se preparar para os desafios da docência.

DESENVOLVIMENTO E DISCUSSÕES DO ESTÁGIO

Este artigo foi desenvolvido através da disciplina de Estágio II realizada em uma escola de ensino Fundamental Maior (Fundamental II) e Ensino Médio na cidade de Castanhal-PA, no período de setembro a outubro de 2023. Durante esse período, foi possível desenvolver as etapas estabelecidas pelo professor regente da disciplina de Estágio. Vale ressaltar que foram divididos em dois momentos sendo eles observação e regência.

Durante o período de observação foi realizado uma vistoria pela escola para conhecer os espaços destinados a aprendizagem, dentre eles, o laboratório de informática e o espaço de convivência onde é realizado algumas oficinas relacionadas as matérias. Além disso, foi possível verificar a didática do professor em sala de aula. Dentre a forma como ensinava, sempre buscava mostrar uma matemática mais realista, mais próxima da realidade dos estudantes. Nas aulas, o professor buscava fazer grupos com os estudantes que estavam presentes, balanceando os grupos com os que tinham mais afinidade com o conteúdo e os que tinham mais dificuldades.

No final da observação, foi possível presenciar uma pequena melhoria dos estudantes que demonstravam dificuldades no conteúdo apresentado. Além disso, o professor mapeou os alunos que ainda apresentavam necessidades de revisão no conteúdo.

Antes de iniciar as aulas, foi necessário um período de organização e preparação. O plano de aula e o plano de ensino foram elaborados, com um aprofundamento nos conteúdos que seriam abordados. Buscou-se uma metodologia que pudesse contribuir significativamente para o aprendizado, semelhante à utilizada pelo professor regente da turma, porém repensada à luz (e à sobra) das teorias.

Antes da primeira regência, houve uma conversa com o professor sobre possíveis recursos auxiliares que poderiam ser utilizados durante o ensino. Constatou-se que escola não dispunha de grande parte dos recursos que poderiam auxiliar no ensino dos assuntos a serem abordados. No entanto, o material e os recursos disponíveis, embora limitados, foram utilizados para auxiliar na compreensão do conteúdo ministrado.

Durante as aulas, foi possível envolver os estudantes com os conteúdos lecionados fazendo-os se envolverem e compartilharem relatos de como utilizavam a Matemática no cotidiano. Com esses relatos, foi possível manipular o conteúdo para auxiliar no ensino e aprendizado dos alunos.

O Estágio oferece um ambiente propício para que nós, estagiários, possamos aperfeiçoar nossas práticas de ensino e aprendizagem. É uma vivência que nos permite experimentar, mesmo que parcialmente, a realidade da profissão docente. O Estágio supervisionado oportunizou-nos vivenciar a dinâmica completa de uma escola, desde o ambiente físico até a interação em sala de aula. Foi enriquecedor observar as estratégias e abordagens de ensino adaptadas ao nível dos estudantes, assim como as práticas metodológicas dos professores em suas turmas. Este estágio permitiu não apenas observar, mas também vivenciar e compreender os diferentes contextos de educar, consolidando e aprimorando meus conhecimentos para uma futura atuação na área educacional.

CONCLUSÕES

Durante o Estágio Supervisionado, foi possível vivenciar a realidade de uma escola, desde o ambiente escolar até a convivência em sala de aula. Observaram-se estratégias e abordagens de ensino que se adequavam ao nível dos estudantes, bem como as práticas metodológicas que o professor utilizava com as turmas. Nessa experiência, houve a oportunidade de ser acompanhado por profissionais experientes, cujas mentorias foram de fundamental importância.

Nesse período, foi possível perceber o papel que um professor desempenha em sala, desde o planejamento até a execução da aula. Nesse contexto, o estágio desempenha um papel fundamental para os estagiários de matemática, pois proporciona o desenvolvimento de suas habilidades, transitando da teoria para a prática.

Foi possível perceber, a partir da vivência do cotidiano escolar e do relato do professor, que a docência encontra suas limitações, dentre elas, o desacato ao professor, superlotação de sala, o que de certa forma, atrapalha em trazer conteúdos mais lúdicos aos estudantes, além da falta de espaço em sala de aula e outras dificuldades estruturais. Apesar desses desafios, encontrou-se uma equipe diretiva dedicada a ajudar a minimizar esses problemas, trabalhando junto aos professores, auxiliando-os e promovendo um ambiente de conforto e aprendizado.

Foi possível vivenciar e observar os diferentes contextos e formas de ensinar. Durante esse tempo. Houve a oportunidade de observar e aprimorar os conhecimentos anteriormente adquiridos. O diálogo com os estudantes, professores, a equipe diretiva e demais componentes do ambiente escolar desempenhou um papel fundamental na construção profissional.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. **Lei nº 11.788, de 25 de setembro de 2008**. Dispõe sobre o estágio de estudantes. Diário Oficial da União, Brasília, 26 set. 2008. Seção 1, p. 3.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017.

[3] BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução CNE/CP Nº 2.** Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica, Brasília: 2019.

[4] Conselho Nacional de Educação. **Parecer nº 21 /2001 Dispõe sobre a duração e carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena**. Disponível em: http://www.ucs.br/ucs/tplInstitucional/graduacao/foruns/licenciaturas/apresentacao/anexo5.pdf

[5] França, D.S.; **Formação de professores: a parceria escola universidade e os estágios de ensino**. UNIrevista (UFMS), v. 1, n. 2, abr. 2006. Disponível em: http://www.unirevista.unisinos.br/pdf/UNIrevFranca.pdf

Uma aventura pela matemática no mundo do jogo do labirinto

Andrade, Sabrina Silva de[163], Andrade, Wesley Silva de[164], Guimarães, Daniel da Silveira[165], Freitas, Thiago Porto de Almeida[166]

Resumo: *Neste relato apresentamos uma experiência vivenciada pela equipe do PIBID da área de Matemática da UFCAT, onde buscou-se responder a questão: É possível abordar temas matemáticos do 8º ano do Ensino Fundamental através da construção de um jogo digital no Scratch? Para isto, foi elaborada uma estratégia de conteúdos através de um planejamento bem definido a partir da produção de uma sequência didática. A empolgação dos estudantes era nítida, o que resultou em sucesso, apesar dos contratempos.*

Palavras-chave: *Jogos digitais e matemática, a matemática e o Scratch.*

INTRODUÇÃO

O presente trabalho objetiva discorrer sobre experiência elaborada, executada e avaliada pelo Núcleo do PIBID da área de Matemática, da Universidade Federal de Catalão (UFCAT), no mês de outubro. Com a participação de 62 estudantes, das turmas do 8º ano do Ensino Fundamental de um Colégio na Cidade de Catalão, Goiás.

Tal experiência teve como premissa abordar temas matemáticos importantes no ensino fundamental na confecção de um jogo digital do Labirinto utilizando a plataforma Gratuita do Scratch, veja Figura 1. Os temas foram: posição no plano cartesiano, plano cartesiano, ângulos, deslocamentos, entre outros, além de haver um desafio matemático proposto como obstáculo para o jogo.

A proposta foi planejada em uma Sequência Didática (SD), o que possibilitou uma previsibilidade das ações e um resultado mais estruturado e eficaz no processo de ensino-aprendizagem.

Materiais e Métodos

Nos últimos tempos tem se tornado nítido o desinteresse dos estudantes do Ensino Básico, em assistir às aulas, principalmente quando o assunto é matemática, que começa a exigir um

[163]Universidade Federal de Catalão, Catalão, GO, Brasil.sabrina_andrade@discente.ufcat.edu.br,
[164]Universidade Federal de Catalão, Catalão, GO, Brasil. wesleyandrade@discente.ufcat.edu.br
[165]Universidade Federal de Catalão, Catalão, GO, Brasil. danielguimaraes@ufcat.edu.br
[166]Universidade Federal de Catalão, Catalão, GO, Brasil. thiagoporto@ufcat.edu.br

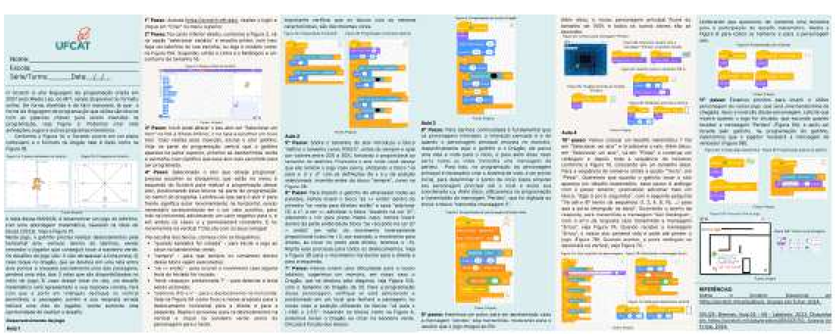
maior nível de compreensão do abstrato. Nós estamos na era digital, e o ensino tradicional é algo maçante para essa geração, exigindo dos professores a procura de métodos que despertam o interesse em seus estudantes. Uma alternativa é aliar a matéria que está sendo ministrada com a tecnologia. Nesta proposta, apresentamos um jogo digital por meio do software Scratch, um ambiente de programação visual desenvolvido pelo MIT, como ferramenta pedagógica para os alunos dos 8° ano do Ensino Fundamental em um colégio na cidade de Catalão-GO. A proposta é programar um jogo do labirinto, com um personagem principal que se locomove nos eixos x e y, um monstro que se locomove na diagonal, em que o personagem perderá uma vida se encosta nele, e um desafio matemático, veja Figura 1. Mas a matemática não está apenas no desafio, a programação toda envolve conceitos matemáticos, como o plano cartesiano, as coordenadas, equação da reta, ângulos e proporcionalidade, além de estimular o desenvolvimento do pensamento lógico e promover a aquisição de habilidades transferíveis, como o pensamento computacional e a resolução de problemas.

Essa proposta corrobora com os estudos que ressaltam a eficácia de abordagens baseadas em jogos no aprendizado matemático (Johnson & Smith, 2021; Rodriguez & Hernandez, 2022). Autores como Papert (1980) enfatizaram o valor educacional de ambientes de programação para o desenvolvimento do pensamento matemático e lógico em estudantes jovens. A construção de jogos expõe os alunos a desafios que demandam a aplicação direta de fórmulas matemáticas, tomada de decisões baseada em lógica e visualização de padrões. A programação de jogos, nesse sentido, atua como uma ponte para conectar os conceitos abstratos da matemática a contextos concretos e tangíveis. Além do exposto, é evidente que o emprego da tecnologia proporciona uma dinâmica de aprendizado recíproco no ambiente escolar. Ao introduzir conteúdos tecnológicos na sala, o professor percebe que o aluno tem a capacidade não apenas de assimilar o conhecimento, mas também de compartilhar suas habilidades tecnológicas, contribuindo para a eficácia do ensino dos conceitos de matemática por meio dela, e acreditamos que essas habilidades tecnológicas se dão por serem nativos digitais. Neste cenário, o papel do professor transcende o de mero transmissor de conhecimento, tornando-se um mediador crucial para integrar a tecnologia da forma efetiva no processo educativo.

Resultado da Aplicação em Sala

Para o desenvolvimento desta atividade foram necessárias 04 (quatro) aulas de 45 minutos, realizadas no laboratório de informática. A equipe do PIBID preparou um planejamento utilizando uma SD, separando as atividades em aulas, e a partir dessa SD foram realizadas apresentação em slides e também a produção de um manual guia para os estudantes, veja Figura 1 ou acesse o manual no drive da Equipe Pibid (2023).

Fig. 53: Manual do Jogo digital do Labirinto.



Fonte: Acervo do PIBID Matemática/UFCAT.

Ao iniciar a atividade, os estudantes foram questionados se já haviam tido experiência com jogos no Scratch, com apenas alguns respondendo afirmativo.

Como a equipe do PIBID possibilitou aos estudantes a realização de jogos alternativos de um labirinto, alguns alunos, enquanto esperavam o próximo passo do Slide da equipe, iam explorando a plataforma, familiarizando-se com os comandos e conceitos básicos. Essa abordagem se mostrou eficaz, pois ficou nítida eaa felicidade dos estudantes em suas descobertas dentro do Scratch, além de perceber que a todo o momento eles queriam testar as suas ideias e inserir suas criatividades, gerando debates e reflexão sobre a programação e a Matemática. Veja Figura 2 (jogo diferente).

Fig. 54: Algumas propostas dos estudantes.

Fonte: Acervo do PIBID Matemática/UFCAT.

A equipe executora do projeto estava preparada para explorar os conceitos matemáticos presentes no jogo do Labirinto. Durante a construção, foram abordadas várias questionamento sobre deslocamentos na horizontal e na vertical, ângulos, plano cartesiano, posições no plano cartesiano, entre outros conceitos, realizados seguindo o planejamento da SD.

As maiores dificuldades na execução desta atividade foram alguns atrasos na execução da atividade programada, sendo geradas por problemas técnicos nos computadores e internet, além de falta de atenção nas ações que estavam sendo transmitidas pela equipe executora.

CONCLUSÕES

Concluímos que a decisão de integrar jogos digitais com a Matemática teve um impacto positivo em todos os participantes. Especificamente, notamos um alto nível de envolvimento por parte dos alunos da turmas envolvidas na criação dos jogos, assim como na resolução das questões matemáticas essenciais para o desenvolvimento do jogo. Além disso, essa abordagem proporcionou uma experiência enriquecedora para os alunos do PIBID, introduzindo-os as ferramentas tecnológicas destinadas ao ensino e aprendizagem da Matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] Equipe Pibid. **Manual do jogo do Labirinto**, 2023. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1634skw9KleUR17UDjA9137zuaheu1xie/view?usp=sharing. Acesso em 13 mai. 2024.

[2] Johnson, A., & Smith, B. (2021). **Enhancing Mathematical Learning through Game-based Approaches**. Journal of Educational Technology, 15(3), 78-95.

[3] Rodriguez, C., & Hernandez, D. (2022). **Exploring Programming in Mathematics Education: A Case Study on Student Engagement and Learning Outcomes**.International Journal of STEM Education, 8(4), 15-30.

[4] Papert, S. (1980). **Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas**. Basic Books.

Hiperoperações exponenciais

Os sucessores algébricos da multiplicação.

Minatti, Saulo[167];

Resumo: *Este trabalho propõe uma abordagem alternativa para a recursão das hiperoperações, que são operações resultantes da repetição recursiva das operações de soma, multiplicação e potenciação. Enquanto as hiperoperações convencionais, a partir da potenciação, perdem algumas propriedades algébricas (como comutatividade, associatividade e distributividade), neste trabalho buscamos explorar uma nova forma de recursão que preserve tais propriedades, permitindo a formação de estruturas algébricas robustas. A proposta é estudar e apresentar essa nova abordagem recursiva, que possibilite a construção de estruturas munidas, por exemplo, de "potenciação"e multiplicação, e uma sucessão de estruturas com cada uma das operações sucessoras. Além disso, argumentamos que esse processo é categórico, ou seja, há apenas uma maneira de realizá-lo.*

Palavras-chave: *Recursão, exponencial, hiperoperação, estrutura, corpo.*

INTRODUÇÃO

Sabe-se que as operações aritméticas de exponenciação e multiplicação podem ser concebidas como as operações de multiplicação e soma repetidas, respectivamente 1.

No final de uma Iniciação Científica sobre Hiperoperações e Tetração (operação baseada na recursão exponencial), o autor e seu orientador pensaram em uma outra maneira de recursão para as hiperoperações, pensando em satisfazer propriedades algébricas. É evidente, por exemplo, que a potenciação não é capaz de gerar uma estrutura algébrica eficaz que se "comunique" com a multiplicação (operação "antecessora").

Como a potenciação já não satisfaz várias propriedades algébricas desejáveis, muito menos as hiperoperações convencionais subsequentes satisfarão tais propriedades.

A primeira hiperoperação exponencial

É com vista nisso que procuramos uma operação que satisfaça propriedades algébricas eficazes e se comunique com a multiplicação, sendo uma "candidata" à verdadeira sucessora algébrica da multiplicação, mais ainda, encontraremos ela na "força bruta", pois, o Teorema a seguir garante como deduzi-la:

[167]Universidade Federal de Santa Catarina. Este autor foi apoiado pelo PET Matemática UFSC.

Teorema 4.8 *Seja $*$ uma operação binária sobre $\mathbb{R}$.*
Isto é, há uma função f tal que:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x * y. \end{array}$$

Suponha que $*$ satisfaz as seguintes propriedades:

- *$*$ distribui à direita sobre a multiplicação: $(x \cdot y) * z = (x * z) \cdot (y * z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$;*
- *$*$ é contínua na primeira variável. Isto é, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, a função dada por $g_{y_0}(x) := f(x, y_0)$ é contínua (com a topologia usual);*
- *Há um elemento neutro à esquerda $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Isto é, $b * x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$;*
- *Operar com 1 à esquerda resulta em 1. Isto é, $1 *_b x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.* [168]

Sob tais hipóteses:[169]

$$x * y = \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

(Observe que supomos propriedades para que, com a multiplicação, a operação possa formar um corpo em $\mathbb{R}$, e tenha um comportamento que possa ser descrito por uma expressão contínua. Lembre-se que, nesse possível corpo, o 1 seria o neutro da "soma", pois a multiplicação faria o "papel" de soma).

Ao encontrar a "cara" dessa operação, define-se:

Definição 4.8 *Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. A (1)-hiperoperação exponencial de base b é dada por:*

$$\begin{array}{rccc} *_b\colon & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & (x,y) & \longmapsto & x *_b y := \exp_b(\log_b(x) \cdot \log_b(y)). \end{array}$$

Teorema 4.9 *Seja $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Então, $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ é um corpo.*
Mais ainda,

$$(\mathbb{R}, +, \cdot) \cong_{\exp_b} (\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b).$$

Iremos nos referir ao corpo $(\mathbb{R}_+^*, \cdot, *_b)$ como sendo o (1)-corpo exponencial de base b.

OUTRAS HIPEROPERAÇÕES EXPONENCIAIS

Ao estudar essa operação que é a "sucessora algébrica" da multiplicação, pensa-se em uma maneira de, analogamente, gerar uma nova operação e uma nova estrutura algébrica. A seguir, apresentamos como deve ser feita essa recursão:

Definição 4.9 *Sejam $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. A n-ésima hiperoperação exponencial de base b é definida por:*

$$\begin{cases} x \cdot_b^1 y := x *_b y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \text{ se } n = 1; \\ x \cdot_b^n y := \exp_b(\log_b(x) \cdot_b^{n-1} \log_b(y)), \text{ se } n \geq 2. \end{cases}$$

[168] $\mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ é o conjunto dos reais positivos.
[169] Utilizamos $\exp_b$ como notação para a função exponencial de base b

Em que a segunda definição é aplicada para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ *tais que* $\log_b(x), \log_b(y)$ *estão no domínio de* $\cdot_b^{n-1}$.

Definimos o domínio "maximal", isto é, o conjunto de todos os valores em que $\cdot_b^n$ *está bem definida como sendo o conjunto* $K_b^n \subset \mathbb{R}$. *Isto é:*

$$K_b^n \times K_b^n \coloneqq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot_b^n y \text{ está bem definido}\}.$$

Prova-se que K_b^n *é um intervalo aberto, relacionado com as* ***tetrações*** *da base* b*:*

$$K_b^n = ({}^{n-2}b, \infty).$$

Em que ${}^m b \coloneqq \left(b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}\right)_m$ *(com* m *cópias de* b*, para todo* $m \in \mathbb{N}^*$*) 1.*

CONCLUSÕES

Com a recursão das Hiperoperações Exponenciais, para cada $b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, mostramos que existe uma sequência de corpos ordenados completos isomorfos dois a dois via composições de $\exp_b$. Mais ainda, esquematizamos uma generalização para esse tipo de sequência de isomorfismos para um corpo qualquer, definindo conceitos como pseudomorfismos, pseudo-operações e corpo imagem.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHUN, J. H. **What is . . . tetration?**, 2014.

Explorando a geometria através da OBMEP

Elaboração, aplicação e análise de uma sequência didática

Silva, Silmara Louise da[170]

Resumo: *O texto apresenta um relato de experiência sobre a concepção, aplicação e análise dos resultados de uma sequência didática destinada a explorar os conceitos ligados à área de polígonos. Para tanto, foram empregadas abordagens pedagógicas diversas, incorporando o uso de materiais manipulativos e a introdução de problemas extraídos de edições anteriores da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Esta sequência didática foi ministrada a alunos do 9º ano do ensino fundamental em uma instituição pública.*

Palavras-chave: *Áreas de polígonos, estratégias de ensino, sequência didática, OBMEP.*

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas que envolvem o cálculo de áreas de figuras planas é uma área essencial da matemática, com relevância que vai além do contexto acadêmico. O entendimento desses conceitos é crucial não apenas para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos estudantes, mas também para sua capacidade de aplicar o pensamento crítico e analítico em situações do mundo real. Com o objetivo de explorar a importância desses problemas, foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática [1], em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [2], com foco na construção do conhecimento dos alunos, desde o uso de materiais concretos até a abstração necessária para enfrentar desafios complexos, como os da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) [3]. O objetivo foi aprimorar o processo de ensino-aprendizagem por meio de sequências didáticas cuidadosamente planejadas, que orientaram os alunos desde as noções básicas até uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Essa abordagem visa criar um ambiente de aprendizado onde os estudantes possam construir seu conhecimento por meio de atividades desafiadoras e progressivamente complexas, como destacado por Artigue [1].

CONCEPÇÃO DAS ATIVIDADES

A sequência didática elaborada consistiu de 5 folhas de atividades que tratavam do tema cálculo de áreas de figuras planas. Foram selecionadas questões da OBMEP cujas mesmas poderiam ser mais facilmente adaptadas para a utilização de material concreto na sala de aula. Na primeira folha,

[170]EE David Campista / EM Professor Júlio Bonazzi (Poços de Caldas-MG)

encontram-se três questões dissertativas selecionadas da OBMEP, destinadas tanto ao diagnóstico inicial quanto à avaliação do aprendizado ao término da aplicação. As folhas subsequentes apresentam itens que, de maneira gradual, direcionaram o estudante para o raciocínio necessário na resolução de questões objetivas. Vale ressaltar que a última folha se destaca por conter duas questões objetivas e uma questão dissertativa.

APLICAÇÃO DAS ATIVIDADES

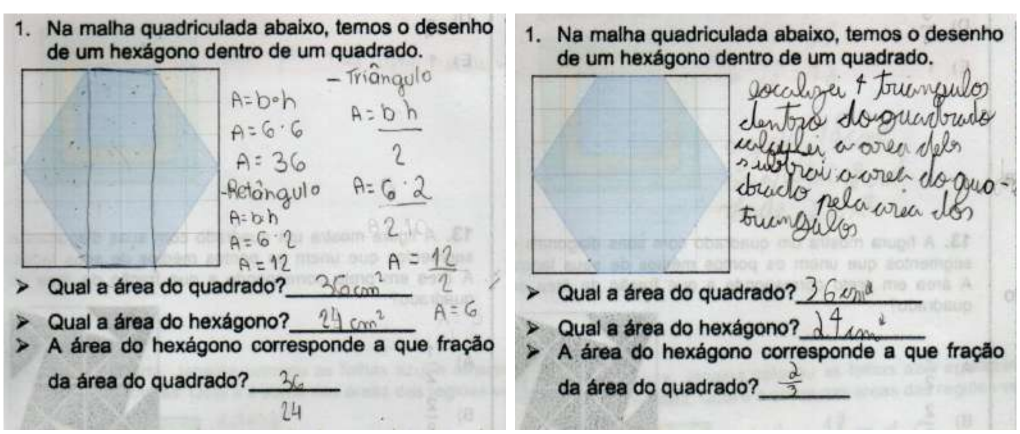
Com exceção da folha de atividades iniciais, que os estudantes realizaram individualmente no início, para avaliar seu domínio do tema e, posteriormente, para monitorar seu progresso na aprendizagem, as demais folhas foram feitas em grupos durante as aulas, exceto por aqueles que enfrentaram dificuldades com o tempo e precisaram terminá-las em casa. Devido à falta de familiaridade dos estudantes com a metodologia e o formato das atividades, enfrentamos algumas dificuldades na execução da primeira folha. Por esse motivo, ela exigiu um pouco mais de tempo do que o previsto para ser concluída. Nas folhas seguintes, com uma maior familiaridade com a metodologia, os estudantes conseguiram concluir no tempo esperado.

ANÁLISE

Durante a execução das atividades, duas perguntas comuns surgiram repetidamente: “O que devo fazer, professora” e “Está correto assim?”. Ficou evidente a falta de hábito de leitura e a dependência dos alunos em relação à orientação e validação por parte do professor. Diante desse cenário, realizamos leituras conjuntas para que eles se sentissem mais confiantes e pudessem avançar de forma autônoma.

À medida que as atividades progrediam, foi perceptível um amadurecimento no raciocínio, nas formas de registro e nas estratégias de resolução dos problemas. Inicialmente, foram empregadas estratégias que envolviam recorte, colagem e manipulação de materiais em madeira. Ao final, a utilização de materiais concretos não se mostrou necessária, pois os alunos haviam adquirido a habilidade de abstração e desenvolveram diversas estratégias para resolver os problemas.

A Figura 55 exemplifica duas das estratégias utilizadas pelos alunos.



1. Na malha quadriculada abaixo, temos o desenho de um hexágono dentro de um quadrado.

A=b·h
A=6·6
A=36
Retângulo
A=b·h
A=6·2
A=12
– Triângulo
A = b·h/2
A = 6·2/2
A = 12/2
A = 6

➢ Qual a área do quadrado? 36 cm²
➢ Qual a área do hexágono? 24 cm²
➢ A área do hexágono corresponde a que fração da área do quadrado? 36/24

1. Na malha quadriculada abaixo, temos o desenho de um hexágono dentro de um quadrado.

localizei 4 triangulos dentro do quadrado calculei a area deles subtrai a area do quadrado pela area dos triangulos

➢ Qual a área do quadrado? 36 cm²
➢ Qual a área do hexágono? 24 cm²
➢ A área do hexágono corresponde a que fração da área do quadrado? 2/3

Fig. 55: Registros de atividades realizadas

CONCLUSÕES

O trabalho realizado destaca a importância de uma abordagem diferenciada no ensino da matemática, onde a ênfase não está na pontuação, mas sim na oportunidade de avaliar se a abordagem adotada auxilia os alunos na resolução dos desafios. Foi surpreendente o engajamento e cooperação dos alunos, especialmente daqueles com dificuldades de aprendizagem. Foi possível observar que mesmo os alunos com desempenho mediano demonstraram um entusiasmo e dedicação notáveis, o que ressalta como a abordagem do conteúdo, o uso de materiais didáticos manipulativos e o trabalho em equipe podem influenciar positivamente o aprendizado. No entanto, cabe ressaltar a importância de um trabalho contínuo com atividades desse tipo, para que os alunos possam desenvolver habilidades de resolução de problemas progressivamente. Isso evidencia a necessidade de os educadores explorarem novas metodologias e estarem dispostos a adaptar-se às necessidades dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizado eficaz e inspirador.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARTIGUE, M. Engenharia didática. **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, p. 193-217, 1996.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc`. Acesso em: 10 de março de 2024.

[3] *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Disponível em: `https://www.obmep.org.br/`. Acesso em: 30 de março de 2024.

Transformando desafios em oportunidades

Etapas e lições das Olimpíadas dos Professores de Matemática

Silva, Silmara Louise da[171]

Resumo: *O texto oferece uma narrativa sobre a experiência e reflexões da autora durante sua participação na Olimpíada dos Professores de Matemática do Ensino Médio. Além disso, são explorados os objetivos da competição, os critérios de participação, as etapas de seleção e o prêmio concedido aos vencedores.*

Palavras-chave: *Olimpíada dos professores de matemática do ensino médio, educação matemática.*

INTRODUÇÃO

Conforme descrito no site oficial [3], a Olimpíada dos Professores de Matemática do Ensino Médio, tendo sua primeira edição no ano de 2023, visa selecionar anualmente até 10 professores destacados, premiando-os com uma viagem para conhecer o sistema educacional de um dos países classificados entre os 10 melhores em Matemática no ranking do PISA. Diante do desafio representado pelo baixo desempenho do Brasil no PISA 2018, esta iniciativa busca reconhecer e incentivar professores comprometidos com o ensino da Matemática, contribuindo para a melhoria da educação no país.

OBJETIVO DA OLIMPÍADA E SUA RELEVÂNCIA

A competição tem como objetivo identificar e premiar professores que se destacam por seu comprometimento com o ensino de Matemática, buscando impactar positivamente o desempenho e a motivação dos alunos. Diante do papel crucial da Matemática no desenvolvimento das nações e da preocupação com a qualidade da educação no Brasil, a Olimpíada dos Professores de Matemática do Ensino Médio surge como uma iniciativa fundamental para promover a excelência no ensino e, consequentemente, impulsionar o progresso socioeconômico do país [3].

[171] EE David Campista / EM Professor Júlio Bonazzi (Poços de Caldas-MG)

QUEM PODE PARTICIPAR E PERFIL DESEJADO

Professores do ensino médio, independentemente da idade, que demonstrem comprometimento com o ensino da Matemática, são elegíveis para participar. A competição valoriza a diversidade, contemplando tanto escolas públicas seletivas quanto não seletivas. Os critérios de seleção consideram não apenas os resultados dos alunos, mas também atributos como didática, envolvimento dos alunos e da família [3].

Inicialmente, eu não me via como o perfil de professora que os organizadores das olimpíadas buscavam. No entanto, fui encorajada pelos meus colegas e professores a participar, uma vez que a principal marca da minha prática pedagógica é envolver os alunos com o conteúdo, demonstrando empatia em relação às suas dificuldades.

ETAPAS DE SELEÇÃO

A seleção dos participantes ocorreu em três fases distintas.

Na primeira fase, os candidatos foram avaliados por meio de um questionário e uma avaliação didática, destacando a importância de demonstrar proficiência nas habilidades da BNCC e detalhar abordagens para lidar com desafios em sala de aula. Graças à experiência de 10 anos como professora, além de planejamentos cuidadosos e uso de material didático adequado, não houve grandes obstáculos. Além disso, por trabalhar com estudantes da educação de jovens e adultos, assim como com diversos alunos de inclusão, sempre me dediquei a oferecer uma abordagem de conteúdo diferenciada, com foco no desenvolvimento de suas habilidades.

Na segunda fase, os candidatos foram avaliados por meio de vídeos demonstrativos, buscando identificar práticas eficazes no ensino de Matemática. Optei, então, por solicitar feedback aos estudantes, colegas, gestores e membros da comunidade escolar sobre o trabalho desenvolvido. O reconhecimento veio através de testemunhos emocionantes, destacando a excelência do trabalho.

Na terceira e última fase, os candidatos participaram de entrevistas com o Comitê Acadêmico, enfatizando a capacidade de replicar práticas pedagógicas exemplares. Foram discutidas metodologias de ensino, com atenção especial aos alunos com dificuldades de aprendizagem, bem como à habilidade de trabalho em equipe.

O feedback que recebi ressaltou a eficiência das metodologias de ensino que utilizo, o impacto positivo na comunidade e meu compromisso em não deixar nenhum aluno para trás.

O PRÊMIO

Os vencedores da medalha de ouro serão premiados com uma viagem internacional para conhecer o sistema educacional de Xangai, na China, um dos países com melhor desempenho em Matemática no ranking do PISA. Essa oportunidade visa compartilhar conhecimentos e contribuir para a melhoria da educação no Brasil. Os premiados também visitarão 5 cidades brasileiras para disseminar o saber e alavancar o ensino de Matemática no país.

O sistema de ensino de Matemática em Xangai é reconhecido por sua abordagem intensiva e focada na prática, destacando-se pela resolução de problemas e aplicação de conceitos em situações reais. O incentivo ao pensamento crítico e ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio matemático contribui significativamente para o desempenho excepcional dos alunos em avaliações internacionais.

No processo seletivo, entre 556 participantes, apenas 10 foram premiados com a medalha de ouro e a viagem para Xangai. Outros 9 receberam a medalha de prata e 47 foram agraciados com a medalha de bronze. Esses números destacam a excelência dos premiados nesta edição da Olimpíada dos Professores de Matemática. Os dados foram obtidos no vídeo de encerramento do PAPMEM, edição de janeiro de 2024

CONCLUSÕES

Durante as etapas de seleção, tivemos a oportunidade de refletir sobre nossas práticas pedagógicas e aprimorar nossas habilidades como educadores de Matemática. Essa jornada me fez perceber ainda mais a importância do envolvimento do professor tanto dentro quanto fora da sala de aula, destacando o comprometimento dos meus próprios professores comigo e o meu com os meus estudantes. Meus professores foram e continuam sendo uma inspiração para mim, moldando minha abordagem e compromisso com o ensino. Essa influência se reflete em como busco transmitir aos meus alunos o quão prazeroso pode ser aprender Matemática, além de oferecer empatia diante de suas dificuldades, sem julgamentos, promovendo assim um aprendizado mútuo.

A participação na Olimpíada dos Professores de Matemática do Ensino Médio não só representa uma oportunidade única de reconhecimento e aprimoramento profissional para educadores comprometidos com a excelência no ensino de Matemática, mas também contribui significativamente para a promoção de uma educação de qualidade e para o desenvolvimento socioeconômico do Brasil.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2017. Disponível em: `http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc`. Acesso em: 10 de março de 2024.

[2] IMPA. **PAPMEM - Janeiro de 2024 - Respostas das perguntas e Encerramento**. Vídeo online. You Tube. 2024. Disponível em: `https://www.youtube.com/live/IK-e4AjCs_0?si=odmjFdy6xfxzOGFk`. Acesso em: 10 de março de 2024.

[3] *Olimpíada dos Professores de Matemática do Ensino Médio*. Disponível em: `https://opmbr.org/`. Acesso em: 10 de março de 2024.

Mágica das tampinhas

Uma proposta de atividade lúdica para o ensino de sistemas lineares

Santos, Thiago Henrique Campos[172], Santos, Rogério César[173]

Resumo: *Este trabalho propõe uma atividade lúdica de ensino de Matemática que visa o fortalecimento de conceitos como: divisibilidade, números inteiros e sistemas de equações, com foco no Ensino Médio. A atividade perpassa pela apresentação de uma mágica envolvendo quantidades de tampinhas que são distribuídas nas mãos, e operações são feitas para que o mágico possa adivinhar a quantidade de tampinhas em cada mão, a atividade sugere um cenário investigativo que intenciona a construção de aprendizagens significativas por meio da busca dos porquês do truque.*

Palavras-chave: *Lúdico, truques matemáticos, sistemas lineares, ensino de matemática.*

INTRODUÇÃO

A dimensão lúdica está culturalmente atrelada à ideia de jogos e brincadeiras. Entretanto, é importante atentar-se que, sobretudo no contexto educacional, ela ultrapassa tais aspectos, pois contribui para a formação intelectual do estudante, promove a interação entre os diversos atores que compõem a sala de aula e sua prática demanda que estes portem-se de forma ativa, crítica e criativa (ALMEIDA, 1998). Com isso, métodos lúdicos que propiciem a vivência da investigação e da descoberta podem ser ferramentas fundamentais para o despertar da curiosidade e do interesse de estudantes pela matemática, criando um ambiente que favorece a mobilização dos saberes adquiridos e a construção de novos conhecimentos de forma ativa.

Nesse contexto, apresenta-se a mágica das tampinhas. Nela, o professor desafia os estudantes a desvendarem um truque de adivinhação matemática, onde, em segredo, os alunos decidem os parâmetros iniciais da mágica — o que torna a adivinhação ainda mais desafiadora. Ao final, objetiva-se que a atividade propicie um cenário investigativo e motive o estudo de sistemas lineares gerando aprendizagens significativas.

A importância de estudos sobre o tema dar-se para além das contribuições significativas relacionadas à aprendizagem do tema central e do avanço rumo a consolidação do pensamento algébrico em conteúdos correlatos aos sistemas de equações lineares. Isso porque observa-se no mais amplo documento curricular vigente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que tais habilidades permeiam o ensino médio sob a ótica do uso de estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para articular modelos em diversos contextos, analisando com criticidade os resultados obtidos a fim de construir argumentação consistente, materializando-se de forma mais específica na habilidade EM13MAT301 consoante a atividade proposta (BRASIL, 2017).

[172] Professor nível IV da SEDUC-GO e estudante de pós-graduação do PROFMAT da Universidade de Brasília. thiago.campos@seduc.go.gov.br,

[173] Professor Adjunto da Universidade de Brasília. rogerc@unb.br

O Truque das Tampinhas

A mágica aqui apresentada é uma generalização inspirada na produção de Chemale (1999) apresenta-da por Santos e Gontijo (2018) da seguinte forma:

1. Peça que um aluno voluntário segure 7 tampinhas e escolha, secretamente, um número w de 3 a 7 e, também secretamente distribua essa quantidade de tampinhas nas mãos, com a ressalva de que nenhuma mão pode ficar vazia. Suponha, por exemplo, que a escolha tenha sido 4 tampinhas, distribuindo 1 tampinha em umas das mãos e 3 na outra. Nenhum desses dados é informado a quem apresenta a mágica.

2. Peça que ele, mentalmente, dobre a menor quantidade de tampinhas e triplique a maior quantidade informando a soma z dos resultados. Se a distribuição de tampinhas tiver sido igual nas duas mãos, continue normalmente. No exemplo apresentado, z será $2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$.

3. Já é possível adivinhar quantas tampinhas ao todo ele escolheu inicialmente: $w = 4$, e sua distribuição 1 e 3. Como?

Operacionalização: se x e y representam, respectivamente, a menor e a maior quantidade de tampinhas nas mãos do aluno voluntário após a distribuição inicial, o sistema $\begin{cases} 2x & + & 3y & = & z \\ x & + & y & = & w \end{cases}$ descreve a situação. Tome x como o primeiro valor positivo que torne $x + z$ um múltiplo de 3. No exemplo trabalhado, $z = 11$, então $x = 1$, pois 12 é múltiplo de 3. Consequentemente, y será obtido como a solução da primeira equação do sistema, com z e x como dados, isto é, $y = \dfrac{z - 2x}{3} = \dfrac{11 - 2 \cdot 1}{3} = 3$.

Revelação do truque: somando x em ambos os membros da primeira equação do sistema acima, tem-se $3x + 3y = z + x$, o que implica que $z + x$ é um múltiplo de 3. Neste caso, existem infinitos valores que podem ser atribuídos a x. Por que tomar x o menor inteiro positivo com esta propriedade? Observando a tabela 1 verifica-se que se x for o segundo ou terceiro valor com a propriedade citada, então o valor do y correspondente torna-se menor do que x, o que contradiz sua definição inicial. Em seguida o valor de y pode ser obtido por substituição.

Por meio da tabela 1 afere-se que não há respostas duplicadas para essa mágica, pois examinando todas as possibilidades para w de 3 a 7, vê-se que não é possível distribuir as tampinhas de tal forma que a soma z se repita em duas situações distintas, com $x \leq y$. Note que, o mesmo não ocorre se $w = 8$ fosse um caso possível, pois a soma $z = 20$, repetir-se-ia em duas situações, inviabilizando a apresentação.

Tabela 1 – demonstração da viabilidade do truque

$w = 3$			$w = 4$			$w = 5$			$w = 6$			$w = 7$			$w = 8$		
x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	2	8	1	3	11	1	4	14	1	5	17	1	6	20	1	7	23
			2	2	10	2	3	13	2	4	16	2	5	19	2	6	22
									3	3	15	3	4	18	3	5	21
															4	4	20

Proposta de Atividade Utilizando a Mágica

Sugere-se a utilização do truque para a introdução de uma aula com o tema sistema de equações lineares, através de uma atividade que propicie a aprendizagem ativa por meio de uma aula baseada num cenário investigativo inspirada nos moldes discutidos por Skovsmose (2000).

A aula é iniciada pelo professor que, inicialmente, é o apresentador da mágica. Com isso, espera-se prender a atenção da turma para que os alunos sintam-se desafiados a descobrir o "segredo da mágica". Após realizar o truque com 3 voluntários, o professor organiza a turma em duplas e entrega 7 tampinhas a cada uma delas. Posteriormente, fixa um cartaz na frente da sala, com uma tabela similar a tabela 1, porém preenchida apenas com as células relativas a w, x, y e z.

O professor pede que os estudantes façam uma rodada de mágicas no formato apresentado por Chemale (1999), que restringe o truque a $w = 7$ sempre. Após algumas rodadas, nota-se que os valores da soma z sempre se repetem, permitindo a quem propõe a mágica realizar a adivinhação apenas memorizando as 3 configurações de mão possíveis. Em seguida, o professor dá um significado às letras x, y, z e w e propõe as seguintes questões para investigação: o que ocorreria com a mágica caso w assumir valores de 3 a 7? E se w=8 fosse um valor possível? Sempre é possível realizar a adivinhação com certeza?

De posse das tampinhas e da tabela, o professor pede que os estudantes realizem uma nova rodada de mágicas, com a nova regra e registrem os resultados na tabela, conforme orientações e que a utilizem como suporte para investigar as indagações.

Após este momento, serão ouvidas as conclusões dos estudantes e, então, o professor poderá mediar o debate e corrigir falhas argumentativas. Assim, a turma poderá construir coletivamente uma conclusão para a investigação feita, e, certamente, num cenário tão amplo, fazer novas perguntas, que podem inspirar outras atividades. Fixados z e w, o professor pode apresentar o sistema linear descrito na seção anterior, com os pares de solução (x, y) tendo uma representação concreta para os estudantes, com seu significado ampliado, gerando um cenário favorável para as clássicas definições oriundas ao tema.

CONCLUSÕES

Espera-se que a atividade possa aguçar a curiosidade dos estudantes e os estimulá-los a buscar os porquês da mágica por meio da prática investigativa, operacionalizando estratégias e procedimentos matemáticos para articular um modelo matemático para a solução do problema, analisando a razoabilidade de suas respostas por meio dos materiais concretos disponíveis.

Motivados pela generalização dos casos em que é possível realizar a mágica, investigamos as condições para as quais o sistema $\begin{cases} ux + vy = z \\ x + y = w \end{cases}$ permite a realização da mesma, obtivemos pares de coeficientes u,v inéditos frente a literatura científica pesquisada e pretendemos apresentar uma demonstração para tais pares.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALMEIDA, P.N. .**Educação lúdica: técnicas e jogos pedagógicos**. São Paulo: Loyola, 1998.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. 2017.

[3] CHEMALE, E.H; KRUSE, F. **Curiosidades matemáticas.** Novo Hamburgo: Fevale, 1999.

[4] SANTOS, R. C. ; GONTIJO, C. H. **Uma mágica desafiadora**.Revista do professor de Matemática. São Paulo: SBM, no 96. pp.31–32, 2018.

[5] SANTOS, R. C. ; GONTIJO, C. H. **Generalizações de dois truques matemáticos envolvendo álgebra ao nível da educação básica.** C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 12, p. 57-65, jul. 2018.

[6] SKOVSMOSE, O. **Cenários para investigação**. Bolema, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

O potencial do RPG nas aulas de matemática

Ferraz, Tiago Cardoso[174]; Borges, Leonardo Silveira[175] e Zanella, Andreia[176]

Resumo: *Aplicar novas propostas de abordagens pedagógicas, como a integração de jogos, têm demonstrado impactos significativos para o processo de aprendizagem de matemática. Dessa forma, este estudo propõe a análise de um jogo analógico, inspirado nos Role Playing Games (RPG), denominado "Möbias e os desafios matemáticos", desenvolvido especificamente para alunos do Ensino Médio, visando aprimorar a resolução de problemas matemáticos. O RPG engloba as cinco áreas da matemática definidas pela Base Nacional Comum Curricular, destacando-se como uma ferramenta relevante para os estudantes. O jogo foi aplicado na Escola de Educação Básica Governador Ivo Silveira em Palhoça - SC para 304 estudantes que se reuniram por turma por turno durante um período. Após a partida, os participantes avaliaram positivamente a utilização do jogo e se sentiram confiantes para resolver os desafios propostos.*

Palavras-chave: *Jogos na matemática, ensino e aprendizagem, RPG.*

INTRODUÇÃO

Ao repensar as aulas de matemática para o ensino básico, o professor pode enfrentar diversos desafios que vão desde a elaboração de aulas com o uso de tecnologias até a implementação de novas ferramentas voltadas para a aprendizagem dos estudantes. É comum ler notícias que destacam as dificuldades enfrentadas pelos professores. Em uma reportagem veiculada pela CBN, a pesquisadora Katia Smole comenta sobre os desafios que os docentes enfrentam ao tentarem aplicar conceitos matemáticos aos alunos, mencionando que as dificuldades se agravam a partir do sexto ano do ensino fundamental [2]. Ao mesmo tempo, é importante ressaltar que existem professores que desenvolvem estratégias de ensino, tais como a utilização de metodologias de resolução de problemas, para conquistar a atenção dos alunos.

Uma ferramenta frequentemente usada em sala de aula são os jogos. Eles têm importância significativa ao trazerem empolgação aos alunos e, quando possuem objetivos de aprendizagem bem definidos, contribuem para o desenvolvimento das habilidades cognitivas, sociais e emocionais dos estudantes. Um dos tipos de jogos é o *Role Playing Game* (RPG), que surgiu na década de 1970 com o Dungeons & Dragons criado por Gary Gygax e Dave Arneson. Uma revisão histórica dos jogos de RPG, bem como a descrição de diversos jogos individuais, pode ser encontrada em [3].

[174] Universidade Federal de Santa Catarina. Este autor foi apoiado pela Uniedu
[175] Universidade Federal de Santa Catarina
[176] Universidade Federal de Santa Catarina

É um jogo de interpretação de papéis no qual cada jogador assume um personagem e executa as tarefas propostas. No ensino da matemática, o RPG pode ser usado como parte da metodologia da resolução de problemas e é excelente para o desenvolvimento dos alunos, promovendo a interação e proporcionando o desenvolvimento de diversas competências gerais elencadas pela Base Nacional Comum Curricular, tais como o pensamento criativo, crítico e científico, a argumentação, a empatia e cooperação e a responsabilidade e cidadania [1].

o jogo "Möbias e os Desafios Matemáticos"

Os *Role Playing Games* têm a característica de narrar uma história, e possuir elementos como dados de várias faces. No jogo "Möbias e os desafios matemáticos", são considerados componentes como tabuleiro representando os reinos de Möbias, *meeples* [177], cartas de ação contendo questões de matemática, cartas de desafios com problemas de raciocínio lógico, fichas de pontuação para os jogadores registrarem seus pontos, e um manual de regras. Para a criação do RPG, foram necessárias três etapas.

A primeira etapa consistiu em elaborar um resumo da história a ser contada através do jogo e desenhar um esboço do tabuleiro. Foi necessário criar as questões das cartas de ação e suas pontuações, estabelecer as regras do jogo e determinar a duração da partida. Diversos testes foram realizados para verificar a jogabilidade com o intuito de aprimorar a experiência do jogador, como imersão e regras claras.

Após a realização dos testes, foi iniciada a segunda etapa, a da validação do jogo por professores de matemática da escola onde seria aplicado. Oito professores jogaram o RPG e analisaram as cartas de ação e de desafios. Alguns erros foram identificados e corrigidos, seguindo para a etapa de aquisição dos materiais necessários para a execução.

A terceira etapa da criação envolveu a produção de cada componente. Foi necessário encontrar empresas que produzissem os tabuleiros, produzir o livro de regras e contratar um *designer* para desenhar o tabuleiro e os personagens.

Assim, após as três etapas acima foi possível utilizar o jogo com os estudantes. O RPG "Möbias e os Desafios Matemáticos" foi jogado na Escola de Educação Básica Governador Ivo Silveira em Palhoça/SC, com 304 alunos de 17 turmas do Ensino Médio diurno. O laboratório de matemática foi ambientado no estilo medieval, ambiente do RPG, com 6 mesas, cada uma acomodando até 7 estudantes. Os alunos foram divididos em grupos, com duas equipes de 3 alunos e um assumindo o papel de Mestre do Jogo.

Antes do início, o professor responsável instruiu os alunos sobre a dinâmica do jogo. Os estudantes escutaram a narração da história da criação da terra "Möbias". Abaixo, segue um resumo da narrativa contada:

"Antes da criação de Möbias, Zahl, o criador, estabeleceu os reinos e suas criaturas, dando início ao mundo após uma série de construções. Os reinos, como Menuros, Gaarbel, Gleich, Winkel e Bool foram criados para representar diferentes áreas da matemática. No entanto, a paz é ameaçada por Htam, que busca dominar todos os reinos com seu exército e se preparando para a guerra. Diante da ameaça, os reis convocam a arqueira, o guerreiro e a maga do Reino de Bool para derrotar Htam."

Depois de contar a história, o professor apresenta as regras. Em geral, o jogo baseia-se na luta entre três personagens representando o bem e três personagens representando o mal em uma jornada pelos reinos de Möbias. Os jogadores avançam no tabuleiro, em lados opostos, lançando dados e acumulando pontos de vida ao resolverem questões matemáticas ou desafios lógicos. O objetivo do

[177] Um meeple é uma pequena peça feita, geralmente, de madeira ou plástico que representa um jogador em um jogo de tabuleiro

jogo é que uma equipe vença eliminando todos os personagens adversários, acumulando mais pontos de vida ao final de um tempo determinado pelo professor, ou obtendo a maior pontuação após 15 rodadas de jogo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de criação de "Möbias e os desafios matemáticos", envolveu várias etapas de teste, e foi finalizado e implementado com sucesso, alcançando o objetivo geral de criar uma ferramenta educacional para ensinar matemática através de um RPG. Os estudantes receberam o RPG com grande apreço pela experiência de aplicar conceitos matemáticos em um ambiente de jogo. A atividade proporcionou uma oportunidade de engajamento e concentração pouco vista em sala de aula. Isso evidencia a capacidade do jogo de resgatar a motivação dos estudantes e criar um ambiente de aprendizado estimulante e envolvente.

Portanto, o jogo pode ser fundamental para que a prática pedagógica rompa com o paradigma do ensino tradicional. Quando bem estruturado e com objetivos de aprendizagem estabelecidos, o jogo pode oferecer possibilidades de dinâmicas interativas, colaborativas e, em alguns casos, competitivas, enriquecendo assim as experiências aos estudantes.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

[2] MARTINI, P. Melhorar desempenho em matemática ainda é desafio para educação brasileira. **CBN**, 2019. Disponível em: https://cbn.globoradio.globo.com/especiais/ desafios-da-matematica/2017/03/29/MELHORAR-DESEMPENHO-EM-MATEMATICA-AINDA-E-DESAFIO-PARA-EDUCACAO-BRASILEIRA.htm. Acesso em: 10 mar. 2024.

[3] SCHICH, L. **Heroic Worlds**: A History and Guide to Role-Playing Games. Prometheus Books, 1991, 448 páginas.

Cálculo variacional: uma breve introdução e aplicações

A curva braquistócrona

Marques da Silva, Vinícius[178];

Resumo: *O intuito é apresentar uma breve introdução ao cálculo variacional e suas aplicações. Desta forma, são requiridos previamente alguns conceitos preliminares sobre espaços vetoriais normados, espaços métricos e cálculo diferencial e integral. Posteriormente esses conceitos serão aprimorados para o estudo de funcionais, onde inevitavelmente surgirão conceitos a respeito da derivada de Fréchet e Gâteaux, bem como a equação de Euler - Lagrange e outros resultados importantes. Por fim discutiremos sobre condições suficientes para extremos, em particular aplicaremos os resultados estudados ao cenário da curva braquistócrona.*

Palavras-chave: *Cálculo variacional, equação de Euler - Lagrange, derivada de Fréchet, derivada de Gâteaux, braquistócrona.*

INTRODUÇÃO

Historicamente os primeiros vestígios do que hoje se conhece como cálculo variacional foram concebidas na Grécia antiga com Aristóteles, mas apenas conceitos supérfluos. Andando no tempo, existem outras duas aparições de problemas otimizadores concretos que chamaram a atenção, um dedicado a Heron de Alexandria (20-62) a.C e outro a obra Eneida, de Virgílio 70 a.C.

Heron postulou que na reflexão por um espelho plano a luz seguiria o caminho mais curto entre dois pontos, o que reforça o princípio aristotélico na qual diz "A natureza não faz nada de modo mais difícil".

Na obra Eneida, Virgílio retrata Elissa de Tiro, popularmente conhecida como Dido, que segunda a lenda, foi a primeira rainha de Cartago. Dido era fenícia (civilização antiga) onde atualmente é localizada nas regiões litorâneas do Líbano e da Síria.

Conta-se que após a morte de seu marido, Dido conseguiu fugir juntamente com alguns seguidores chegando ao norte da África. Com o intuito de fundar uma nova cidade, ela negociou com o rei Jarbas a compra das terras. Entretanto o rei Jarbas lhe disse que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar usando a pele de um touro. Desse modo, ela decidiu cortar a pele do touro em tiras bem finas e emendá-las de maneira que formasse uma corda muito comprida para cercar o máximo de terra possível.

[178]Afiliação. Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

A grande genialidade de Dido e seus seguidores foi perceber que a melhor forma de cercar o território desejado era cercá-lo conforme uma semicircunferência. Além disso, a escolha das terras tendo como horizonte o mar lhe beneficiava tanto com as navegações como a economia de tiras de couro para o perímetro. Tal feito ficou conhecido historicamente como problema isoperimétrico, que significa igual perímetro, e a cidade fundada levou o nome de Cartago.

No decorrer da história, o cálculo das variações aparentemente ficou em segundo plano por longos anos. Pierre de Fermat voltou a dar relevância ao tema após afirmar que a trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é mínimo (princípio Fermat). Posteriormente, Sneel e Descartes também concluíram experimentalmente.

Intrigados com tal descoberta, questionavam-se nas motivações das formulações seguirem tais preceitos, muitos deles creditavam tais fatos à natureza. Isaac Newton em 1686 se debruçou ao tema quando buscou otimizar um túnel que ligava dois pontos na superfície da terra, de modo que permitia que um corpo de massa m se deslocasse no menor tempo possível.

Apesar dos feitos de Newton e Fermat, foram os irmãos Jacques (1654-1705) e Johan Bernoulli (1667-1748) que impulsionaram o cálculo variacional no cenário mundial. Com a publicação do problema da braquistócrona (menor tempo), despertando então o interesse de solução em diversos matemáticos. Dentre estes destacaram-se Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Leonhard Euler (1707-1783). Inclusive, Euler reforça a importância do cálculo variacional quando diz “Como o universo é perfeito e o trabalho de um criador muito sábio, nada ocorre na natureza sem que uma lei de máximo ou mínimo não intervenha”.

Esse foi o estopim para que viessem outros matemáticos como Legendre, Jacobi Weierstrass, Gauss, Hilbert e Hamilton, cada qual com a sua contribuição. Desta forma o estudo de funcionais direcionará nossos esforços com relação a modelar o problema da braquistócrona. Os objetos de estudos serão, analisar extremos de funcionais, sendo assim, ferramentas como a derivada de Fréchet e Gâteaux ganham relevância.

Através da inserção dessas novas ferramentas será possível que façamos um progresso rumo à equação de Euler Lagrange, que basicamente permite que estudemos extremantes dos funcionais, sendo que, encontrar uma solução para a equação de Euler Lagrange é o mesmo que encontrar curvas candidatas a extremos desse funcional.

Característica do Funcional

Em particular a exposição estará direcionada ao seguinte funcional

Definição 4.10 *Considere o espaço normado $C^1[x_0, x_1]$ munido da norma:*

$$||y||_{C^1} = \sup_{s\in[x_0,x_1]} |y(s)| + \sup_{s\in[x_0,x_1]} |y'(s)|.$$

Definimos o funcional $\Psi : C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(s, y(s), y'(s))ds,$$

sendo F uma função de três variáveis reais a valores reais de classe C^1.

Teorema 4.10 *Sejam E um espaço de Banach e $U \subset E$ um aberto. Seja $\phi : U \to \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável em U, com derivada de Fréchet contínua em U. Se y_0 é um extremo para ϕ então, $d\phi(y_0)(h) = 0$, para todo $h \in E$.*

Combinando a definição4.10 com o Teorema 4.10 é possível concluir que uma condição necessária para que o funcional Ψ possua valores de extremos é justamente que a derivada de Fréchet se anule, isto é, $d\Psi(y_0)(h) = 0$. O lema que vem na sequência será essencial para obtermos a equação de Euler-Lagrange.

Lema 4.1 *Seja $E(s)$ uma função contínua num intervalo $[x_0, x_1]$. Se*

$$\int_{x_0}^{x_1} E(s)\mu(s)ds = 0,$$

para qualquer função arbitrária $\mu : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ contínua em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$, então $E(s) = 0$, para qualquer valor de $s \in [x_0, x_1]$.

Equação de Euler - Lagrange

Teorema 4.11 *Seja F uma função de três variáveis reais a valores reais e classe C^2. Considere: $C^1[x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\Psi(y) = \int_{x_0}^{x^1} F(s, y(s), y'(s))ds.$$

Suponha que:

$$d\Psi(y)(\mu) = \int_{x_0}^{x_1} F_y(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu(s) + F_{y'}(s, y(s), y'(s)) \cdot \mu'(s)ds = 0,$$

para toda função $\mu(s)$ de classe C^1 em $[x_0, x_1]$, com $\mu(x_0) = \mu(x_1) = 0$. Então, tem-se

$$F_y - \frac{d}{ds}F_{y'} = 0 \text{ em } [x_0, x_1],$$

que é conhecida como a equação de Euler - Lagrange.

Eventualmente podemos ter situações nas quais F não será dependente simultaneamente de $s, y(s), y'(s)$ e, portanto, é preferível que abordemos os diferentes casos possíveis que a equação de Euler - Lagrange pode assumir, a saber: $F = F(s, y'(s))$; $F = F(y(s), y'(s))$; $F = F(s, y(s), y'(s))$; $F = F(s, y(s))$; $F = F(y'(s))$.

Em particular a curva braquistócrona se enquadra no segundo caso da equação de Euler - Lagrange, isto é, $F = F(y(s), y'(s))$.

CONCLUSÕES

Em resumo, podemos distinguir o cálculo variacional do cálculo diferencial através do objeto a ser otimizado (maximizado ou minimizado). No cálculo diferencial procura-se estudar números com propriedades otimizadoras, ou seja, encontrar um valor x no qual $f(x)$ alcança um valor de extremo, enquanto no cálculo variacional o foco é encontrar propriedades otimizadoras com respeito a funções. Adentrando ao tema percebe-se que o cálculo variacional está diretamente ligado com as demais áreas da matemática, como, álgebra linear, cálculo diferencial e integral e análise.

Desta forma, as ferramentas que possuem destaque são as derivadas de Fréchet e de Gâteaux. A culminância de todos esses objetos possibilitou definir e compreender a equação de Euler-Lagrange, que basicamente, respeitando algumas hipóteses, nos permite encontrar curvas candidatas a extremante de um funcional. Por fim, constatou-se que somente conhecer a equação de Euler - Lagrange não garantiam que de fato o mínimo (máximo) era realmente atingido. Desse modo, foi preciso agregar outros resultados poderosos como, por exemplo, condição necessária de Jacobi, condição suficiente de Weierstrass e condição suficiente de Legendre para que pudéssemos concluir que o funcional estudado em questão possuía um extremante.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBOSA, João Lucas M. **Geometria Diferencial e Cálculo das Variações**, IMPA, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática Poços de Caldas 7/26 Julho 1975.

[2] ELSGOLTZ, L. Ecuaciones **Diferenciales y Cálculo Variacional**, Mir, Moscou, 1969.

[3] DE LIMA, Gabriel Loureiro. **Cálculo variacional: problemas clássicos, aspectos teóricos e desdobramentos**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. 2004.

[4] OLIVEIRA, César R. de **Introdução à análise funcional** / César R. de Oliveira. 1 ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2014.257 p. (Projeto Euclides)

A matemática do algoritmo NTRU

Um estudo de Anéis Polinomiais e Aritmética Modular

Ponciano, Vitor[179]; Rufino, Vilc e Parisot, Augusto

Resumo: *Com o avanço da computação quântica, muitos dos algoritmos criptográficos convencionais podem se tornar vulneráveis a ataques quânticos. O NTRU (Nth Degree Truncated Polynomial Ring Unit) é uma solução criptográfica que se baseia em problemas matemáticos envolvendo anéis polinomiais e aritmética modular para fornecer segurança contra ataques de computadores quânticos.*

Palavras-chave: *Criptografia, Anéis Polinomiais, Aritmética Modular, NTRU, Computadores Quânticos.*

INTRODUÇÃO

Desde 1994, com o trabalho do matemático Peter Shor, que introduziu os algoritmos quânticos com aplicabilidade na fatorização de inteiros e na resolução de problemas de logaritmo discreto [2], tornou-se evidente que a chegada dos computadores quânticos poderia potencialmente expor a vulnerabilidade do RSA.

Um dos algoritmos escolhidos pelo NIST foi o sistema criptográfico NTRU (Nth Degree Truncated Polynomial Ring Unit), inspirado em um esquema de criptografia de chave pública (PKE) introduzido por [1]. Os esquemas de Criptografia de Chave Pública (PKE) são definidos por três algoritmos: geração de chaves, criptografia e decifragem. Este esquema PKE é baseado em álgebra polinomial e aritmética modular, servindo como fundação para o sistema de criptografia NTRU. No sistema criptográfico NTRU, a segurança é derivada da dificuldade de resolver o Problema do Vetor Mais Curto (SVP) em reticulados [3].

Anel Quociente e Aritmética Modular: Seja R um anel e escolha um elemento não nulo $m \in R$. Dizemos que dois elementos a e b de R são *congruentes modulo* m se a diferença $a - b$ for divisível por m. Escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$ para indicar que a e b são congruentes modulo m. Adição e multiplicação nas classes de congruência são :

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b} \quad \text{e} \quad \overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a \cdot b}. \tag{33}$$

Em geral, se $a \in \mathbb{Z}_q$, então a é inversível se e somente se $\gcd(a, q) = 1$(gcd é o máximo divisor comum). Considere como exemplo o anel $F[x]/(x^2 + 1)$. Cada elemento desse anel quociente é representado de forma única por um polinômio da forma $\alpha + \beta x$, onde $\alpha, \beta \in F$. A adição é realizada de forma:

[179]Centro de Análise e Sistemas Navais- Marinha do Brasil. Estes autores foram apoiados Fundep

$$\overline{\alpha_1 + \beta_1 x + \alpha_2 + \beta_2 x} = \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} + \overline{(\beta_1 + \beta_2)x}. \tag{34}$$

A multiplicação é similar, exceto que precisamos dividir o resultado final por $x^2 + 1$ e obter o resto. Assim,

$$\overline{(\alpha_1 + \beta_1 x) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 x)} = \overline{\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)x + \beta_1\beta_2 x^2} = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)x. \tag{35}$$

Operações no Anel: A *adição de polinômios* e o *produto de convolução de dois polinômios* são definidos:

$$a(x) + b(x) \longleftrightarrow (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_{N-1} + b_{N-1}) \tag{36}$$

$$a(x) \otimes b(x) = c(x), \text{ onde } c_k = \sum_{i+j \equiv k \pmod N} a_i b_{k-i} \tag{37}$$

Vamos calcular o produto $a(x) \cdot b(x)$ no anel $R = \mathbb{Z}[x]/(x^5 - 1)$, considerando: $a(x) = 1 - 2x + 4x^3 - x^4$ *e* $b(x) = 3 + 4x - 2x^2 + 5x^3 + 2x^4$

$$c_0 = a_0b_0 = 3, c_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = -2, c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = -10 \tag{38}$$
$$c_3 = a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 = 21, c_4 = a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 = 5 \tag{39}$$
$$c_5 = a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_1 = -16, c_6 = a_2b_4 + a_3b_3 + a_4b_2 = 22, \tag{40}$$
$$c_7 = a_3b_4 + a_4b_3 = -2 \tag{41}$$

Portanto, no anel $R = \mathbb{Z}[x]/(x^5 - 1)$, o produto $c(x)$ de $a(x)$ e $b(x)$ é:

$$c(x) = \overline{3 - 2x - 10x^2 + 21x^3 + 5x^4 - 16x^5 + 22x^6 + 3x^7 - 2x^8} \tag{42}$$
$$= 3 - 2x - 10x^2 + 21x^3 + 5x^4 - 16 + 22x + 3x^2 - 2x^3 \tag{43}$$
$$= -13 + 20x - 7x^2 + 19x^3 + 5x^4 \text{em} R = \mathbb{Z}[x]/(x^5 - 1) \tag{44}$$

Se trabalharmos em vez disso no anel R_{11}, reduzimos os coeficientes módulo 11 para obter $a(x) \cdot b(x) = 9 + 9x + 4x^2 + 8x^3 + 5x^4$ em $R_{11} = (\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})[x]/(x^5 - 1)$.

Centro-lift: Seja $a(x) \in R_q$. O *centro-lift* de $a(x)$ para R é o único polinômio $a'(x) \in R$ que satisfaz $a'(x) \mod q = a(x)$, cujo coeficientes são escolhidos no intervalo $-\frac{q}{2} < a_i' \leq \frac{q}{2}$. Por exemplo, se $q = 2$, então o centro-lift de $a(x)$ é um polinômio binário. Vamos considerar $N = 5$ e $q = 7$, e o polinômio $a(x) = 5 + 3x - 6x^2 + 2x^3 + 4x^4 \in R_7$. Os coeficientes do centro-lift de $a(x)$ são escolhidos do conjunto $\{-3, -2, \dots, 2, 3\}$, então o centro-lift de $a(x)$ é dado por $-2 + 3x + x^2 + 2x^3 - 3x^4 \in R$.

Inverso em R_q: Seja q um número primo. Então, $a(x) \in R_q$ possui um inverso multiplicativo se e somente se $\gcd(a(x), x^N - 1) = 1$ em $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})[x]$. O inverso $a(x)^{-1} \in R_q$ pode ser computado utilizando o algoritmo estendido de Euclides para encontrar polinômios $u(x)$, $v(x) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})[x]$ que satisfazem $a(x)u(x) + (x^N - 1)v(x) = 1$. Então, $a(x)^{-1} = u(x)$ em R_q.

NTRU: O NTRU é um sistema criptográfico baseado em problemas matemáticos envolvendo anéis polinomiais e aritmética modular. Começamos fixando um inteiro $N \geq 1$ e dois módulos p e q, e definimos os anéis polinomiais de convolução R, R_p, e R_q da seguinte forma: $R = \mathbb{Z}[x]/(x^N - 1), R_p = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]/(x^N - 1)$ e $R_q = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})[x]/(x^N - 1)$

Definimos $T(d_1, d_2)$ como o conjunto de polinômios em R com d_1 coeficientes iguais a 1, d_2 coeficientes iguais a -1, e todos os outros coeficientes iguais a 0.

Escolha os parâmetros públicos (N, p, q, d) onde N e p são primos, gcd(p, q) = gcd(N, q) = 1, e $q > (6d + 1)p$.

Geração de Chaves

Escolha $f \in T(d + 1, d)$ invertível em R_q e R_p. Escolha $g \in T(d, d)$. Calcule F_q, o inverso de f em R_q. Calcule F_p, o inverso de f em R_p. Publique a chave pública $h = F_q \otimes g$.

Encriptar m**,** h

Escolha um texto simples $m \in R_p$. Escolha um valor aleatório $r \in T(d, d)$. Calcule $e \equiv pr \otimes h + m \pmod q$. **retorne** e.

Descriptografa e**,** f

Calcule $f \otimes e \equiv pg \otimes r + f \otimes m \pmod q$. Centralize para $a \in R$ e calcule $m \equiv F_p \otimes a \pmod p$. **retorne** m.

BIBLIOGRAFIA

[1] HOFFSTEIN, J.; PIPHER, J.; and SILVERMAN, J. H. **NTRU: A ring-based public key cryptosystem.** In: *International Algorithmic Number Theory Symposium*, Springer, 1998, p. 267-288.

[2] SHOR, P. W. **Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring**. In: Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 1994, p. 124-134.

[3] SILVERMAN, J. H. et al. **An introduction to mathematical cryptography**. Volume 1. Springer, 2008.

Teoria espectral para o operador $\mathcal{L}_T$ Grushin

Marrocos, Marcus Antonio Mendonça[180]; Tavares, Wanessa Ferreira[181]

Resumo: *Este trabalho tem por objetivo investigar o comportamento dos autovalores de uma família de operadores elípticos degenerados definidos em uma variedade Riemanniana. Estamos interessados na família de operadores parametrizados pela métrica da variedade.*

Palavras-chave: *Operadores degenerados, Grushin.*

INTRODUÇÃO

A teoria espectral para operadores elípticos possui diversas bifurcações e aplicações. O mais comum destes operadores é conhecido como o operador de Laplace-Beltrami que age em funções suaves sobre variedades riemannianas e é definido como a divergência do gradiente da função ou, equivalentemente, o traço do hessiano da função.

O operador Laplaciano Grushin que age em funções $C^\infty(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h)$ e é definido por

$$\Delta_G u(x,y) := \Delta^{\mathbb{R}^k} u + |x|^{2s}_{\mathbb{R}^k} \Delta^{\mathbb{R}^h} u,$$

onde $s > 0$, $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ e $\Delta^{\mathbb{R}^h}$ denotam respectivamente o Laplaciano Beltrami em $\mathbb{R}^k$ e em $\mathbb{R}^h$. Note que Δ_G não é uniformemente elíptico em todo $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h$, pois degenera para $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ em pontos sobre o eixo y. Apesar disso, alguns resultados clássicos da teoria de operadores elípticos continuam válidos para o operador Grushin, tais como a desigualdade de Sobolev e a desigualdade de Poincaré, existência de soluções fracas e regularidade de Hölder, Princípios do máximo, desigualdades de Hardy e um análogo do Teorema de Rellich-Kondrachov.

Em [2] foi considerado o problema espectral para o Laplaciano Grushin sujeito a condições de contorno de Dirichlet em um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Foi provado que as funções simétricas de um determinado subconjunto de autovalores dependem real analiticamente das perturbações do domínio e foi dada uma fórmula do tipo Hadamard para os autovalores do Grushin. Como corolários, foi caracterizado os domínios críticos para as funções simétricas sob perturbações isovolumétricas e isoperimétricas em termos de problemas sobredeterminados.

No presente trabalho, estamos interessados na Teoria Espectral para o operadores diferenciais que generalizam o Laplaciano Grushin considerando tanto as condições de fronteira de Neumann quanto de Dirichlet.

[180]UFAM. Este autor foi apoiado pela UFAM
[181]UFABC. Este autor foi apoiado pela UFABC

Nos propomos a investigar se os resultados do Lamberti [2] continuam válidos em situações mais gerais, considerando uma classe de operadores elípticos degenerados mais geral e em Variedades Riemannianas e não apenas em $\mathbb{R}^n$.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Considere um $(0,2)$-tensor T simétrico semidefinido positivo e uma função $\eta : M \to \mathbb{R}$ suave. Definimos o operador Laplaciano tipo Grushin por

$$\mathcal{L}_{T,\eta} f = div_\eta(T \bullet f) = div_g(T \bullet f) - g(\bullet \eta, T \bullet f).$$

Note que $\mathcal{L}_{T,\eta}$ é um operador degenerado uma vez que T é semidefinido positivo, observe que o operador também depende suavemente da métrica g e η.

Aqui, div representa a divergência de campos vetoriais suaves e $\bullet$ o gradiente de funções suaves.

A existência de autovalores e autofunções para o operador $\mathcal{L}_{T,\eta}$ com condição de Dirichlet ou Neumann definidos em domínios Ω de $\mathbb{R}^n$ depende de hipóteses adequadas sobre T e Ω, ver [3]. Existe uma sequência de autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n \leq \cdots \longrightarrow +\infty$ e $\phi_i : M \to \mathbb{R}$ autofunções associadas, para o problema de autovalor dado por

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{T,\eta}\phi_i & = \lambda \phi_i \quad em \ M \\ \mathcal{B}_\alpha(u) & = 0 \quad sobre \ \ \partial M \end{cases}$$

onde $\mathcal{B}_\alpha(u) = \alpha \langle \bullet u, T\nu \rangle + (1-\alpha)u$, para $\alpha \in \{0,1\}$, em outras palavras, quando $\alpha = 0$ temos a condição de fronteira de Dirichlet e quando $\alpha = 1$ a condição de fronteira de Neumann.

Como o operador $\mathcal{L}_{T,\eta}$ claramente depende da métrica g vamos considerar a família de operadores $\mathcal{L}_{gT,\eta}$ parametrizada por g. É conhecido na literatura que os autovalores de operadores elípticos dependem continuamente de g. Estamos interessados em verificar a regularidade da dependência dos autovalores de $\mathcal{L}_{gT,\eta}$ degenerado com relação a métrica g. Em geral não podemos esperar que $\lambda_n : M \to \mathbb{R}$ que associa cada métrica g ao enésimo autovalor de $\mathcal{L}_{T,\eta}$ seja diferenciável.

O teorema da escolha de Kato nos diz que em uma família analítica de operadores é possível parametrizar os autovalores analiticamente sem necessariamente colocá-los em ordem crescente. Para o nosso problema consideraremos uma família analítica de métricas parametrizada por um parâmetro t real.

O operador $\mathcal{L}_{gT,\eta}$ generaliza o operador Grushin do Lamberti [2]. Vamos adaptar as técnicas de [1] para este operador $\mathcal{L}_{gT,\eta}$ com T semidefinido positivo. Como aplicação apresentaremos um esboço do teorema 6.1 de [2].

RESULTADOS PRINCIPAIS

Seja $\mathcal{M}$ o conjunto de todas as métricas suaves em M.

Definição 4.11 *Definimos como funções simétricas elementares dos autovalores a aplicação* $\Lambda_{F,\tau} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\Lambda_{F,\tau}[g] := \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_\tau \in F \\ j_1 < \cdots < j_\tau}} \lambda_{j_1}[g] \cdots \lambda_{j_\tau}[g] \quad \forall \ g \in \mathcal{M}, F \subset N, \tau \in \{1, \cdots, |F|\}.$$

Definição 4.12 *Dizemos que* $\bar{g}$ *é métrica crítica de* $\Lambda_{F,\tau}$ *sob a restrição de volume* $\bar{g} \in \mathcal{V}[v]$ *se satisfaz*

$$d_{g=\bar{g}} \Lambda_{F,\tau}[H] + \bar{c} d_{g=\bar{g}} \mathcal{V}[H] = 0 \ \ para \ algum \ \bar{c} \in \mathbb{R} \ \ e \ para \ todo \ H \in S^2(\mathcal{M}).$$

Seja $\mathcal{V}[v] := \{g \in \mathcal{M}/Vol_g = v\}$. Observe que T' é a derivada direcional de $\mathcal{F}$ na direção de H,

$$d\mathcal{F}_{\bar{g}}(H) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \mathcal{F}(g(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} T_g = T'.$$

Teorema 4.12 *Se $\bar{g}$ é uma métrica crítica para $\Lambda_{F,\tau}$ sob a restrição de volume $\bar{g} \in V[v]$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\sum_{i \in F} div_\eta(T \bullet \phi_i^2)\bar{g} + 2 \bullet \phi_i \otimes T \bullet \phi_i - d\mathcal{F}_{\bar{g}}^*(\bullet \phi_i \otimes \bullet \phi_i) = c\bar{g}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] CUNHA, C. L. & GOMES, J. N. & MARROCOS, M. A. M. - *Hadamard type variation formulas for the eigenvalues of a class of second-order elliptic operators and its applications*, arXiv:2306.06504 [math.DG], (2023).

[2] LAMBERTI, P. D. & LUZZINI, P. & MUSOLINO, P. - *Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues*, Jornal of Geometric Analysis, (2021), 10679-10717.

[3] MONTICELLI, D. D. & SCOTT, RODNEY - *Existence and spectral theory for weak solutions of Neumann and Dirichlet problems for linear degenerate elliptic operators with rough coefficients* Journal of Differential Equations Volume 259, Issue 8, 15 October 2015, Pages 4009-4044

Exposições

O clube da matemática como ambiente de aprendizagem e espaço de formação docente

Pereira, Ana Paula Cabral Couto[182] e Pereira, Vinicius Mendes Couto[183]

Resumo: *Nesta exposição pretendemos apresentar o desenvolvimento e os resultados parciais alcançados pela implementação do projeto intitulado: Clube da Matemática como ambiente de aprendizagem e Espaço de Formação Docente, no contexto da cooperação firmada entre a Universidade Federal Fluminense (UFF) e a Prefeitura Municipal de Niterói (PMN). Desta forma, a partir do contexto geral, faremos uma breve descrição do projeto, um panorama das etapas realizadas e exposição das atividades desenvolvidas até o presente momento. A implementação do projeto se iniciou por meio de pesquisa bibliográfica, com o objetivo de consolidar o suporte teórico e conceber a formatação do Clube que virá a ser consolidado nas etapas posteriores. A partir da ampliação destas pesquisas têm sido produzidas cerca de 100 (cem) atividades de ensino, formando um arcabouço de possibilidades didáticas, podendo ser vistas como ferramentas para construção de espaços de aprendizagem e vivência matemática nas Unidades Escolares. As atividades elaboradas estão disponibilizadas no site* `www.clubedamatematica.com`

Palavras-chave: *Clube da matemática, ambientes de aprendizagem, vivência matemática.*

DESCRIÇÃO

O Projeto Clube da Matemática foi um dos projetos contemplados por meio do Edital de Projetos Aplicados fruto da parceria entre a Prefeitura Municipal de Niterói (PMN), a Fundação Euclides da Cunha (FEC) e a Universidade Federal Fluminense (UFF), tendo por objetivo incentivar o desenvolvimento de projetos aplicados para promover soluções relacionadas aos desafios prioritários do município associados às diferentes áreas do Plano Estratégico Niterói que Queremos (NQQ) 2033 e às metas de desenvolvimento sustentável da Agenda 2030 da Organização das Nações Unidas (ONU). O Clube da Matemática tem se constituído como um espaço de construção do conhecimento, ultrapassando a noção de um repositório de atividades e/ou materiais didáticos. Nesse contexto, a implantação do Clube é concebida como algo mais que o espaço físico, mas como um espaço de formação, apoiado por uma abordagem teórico-metodológica, conduzido pela mediação do professor. Intentamos construir um ambiente de aprendizagem envolvendo pesquisas acerca de atividades lúdicas e de métodos de ensino.

[182]Universidade Federal Fluminense, Colégio Universitário Geraldo Reis (Coluni-UFF), anapaulapereira@id.uff.br
[183]Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística (IME-UFF), viniciusmendes@id.uff.br

Em nossa concepção, a implementação de um Clube da Matemática na escola pode se dar de três formas, respeitando o que é possível naquele momento na escola: 1. Uma sala específica para ser o Clube, isto é, um local fixo para o armazenamento dos materiais e também um espaço de suporte às aulas de matemática da unidade escolar para desenvolvimento das atividades; 2. Uma proposta de atividade extracurricular que pode funcionar num contraturno de modo a oferecer uma sequência de atividades destinadas aos alunos inscritos com o intuito de despertar o gosto e a compreensão da Matemática; 3. Um tempo de aula de Matemática, dentro da grade curricular, promovendo um espaço de interação e interlocução com os conteúdos que estão sendo ministrados dentro daquele ano escolar, de modo a oferecer atividades e jogos que estimulem o interesse e o engajamento dos alunos nos estudos matemáticos.

Sendo assim, o Clube da Matemática assume uma área privilegiada para o desenvolvimento de atividades relacionadas ao campo da Matemática. Pode-se afirmar que as atividades realizadas neste espaço:

> "[...] estão voltadas para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e a formação geral do aluno, auxiliando-o a: i) ampliar sua linguagem e promover a comunicação de ideias matemáticas; ii) adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações; iii)desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais; iv) iniciar-se nos métodos de iniciação científica e na notação matemática; v) estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade; promover a troca de ideias por meio de atividades em grupo; vii) estimular sua compreensão de regras, sua percepção espacial, discriminação visual e a formação de conceitos. (REGO & REGO, 2010, p 44).

Na fase de implementação do Clube nas escolas da rede municipal de Niterói, os licenciandos têm a oportunidade de vivenciar na prática o que aprendem em suas formações teóricas, aplicando conhecimentos pedagógicos e matemáticos em situações reais de ensino e aprendizagem.

Entendemos que a simples manipulação de um material ou a realização de um jogo não garante a aprendizagem, muito menos com êxito. O objetivo a ser atingido não está no material em si, mas nas ações que serão desenvolvidas através dele, ou seja, como o material será explorado. E nesse ponto, o papel do professor é fundamental, sua atuação é determinante para o sucesso ou fracasso escolar.

Portanto, é necessário, desde a formação inicial dos futuros docentes, capacitar os professores com o conhecimento de metodologias que, utilizando os mais diversos materiais, sejam manipulativos, jogos ou até mesmo recursos digitais, possam constituir ambientes de aprendizagem alternativos para o ensino dos mais diversos conteúdos da Matemática.

A execução do referido projeto se deu em quatro etapas, iniciando com ampla pesquisa bibliográfica que consolidou o suporte teórico para posterior implementação do Clube da Matemática.

A partir desta pesquisa foram tecidas mais de 100 (cem) atividades de ensino a serem disponibilizadas no site `www.clubedamatematica.com`, estabelecidas como possibilidades de ações didáticas a serem implementadas no Clube da Matemática.

Dessa forma as atividades de ensino publicadas no site fazem parte do acervo que estará disponível na referida exposição.

Cada uma das atividades de ensino é acompanhada por uma ficha de atividade, organizada por secções de modo a fornecer uma sequência de informações relevantes ao professor, contendo orientações didáticas, as habilidades da BNCC que estão sendo consideradas na atividade, material a ser utilizado, além de uma sugestão de planejamento para implementação da atividade.

Fig. 56: Exemplo de Ficha de Atividades

Fonte: Caderno de Atividades do Clube da Matemática

Nesta exposição pretendemos mostrar algumas destas atividades que foram desenvolvidas e explorar suas potencialidades de uso em sala de aula através da vivência prática dos participantes do evento, manipulando os materiais.

Fig. 57: Coletânea de fotos de atividades desenvolvidas no Clube da Matemática

Fonte: Arquivo pessoal

BIBLIOGRAFIA

[1] Boaler, J.; Munson, J ; Willians, C.; **Mentalidades Matemáticas em Sala de Aula**. Ensino Fundamental. Volume 2. Porto Alegre: Penso Editora LTDA: Instituto Sidarta, 2020.

[2] Cortella, M.; **A Escola e o Conhecimento: fundamentos epistemológicos e políticos**. São Paulo: Editora Cortez: Instituto Paulo Freire, 2000.

[3] Cedro, W. L.; Moura, M. O.; **Uma Perspectiva Histórico-Cultural para o Ensino de Álgebra: O Clube da Matemática como Espaço de Aprendizagem**. Zetetiké - Cempem Unicamp - v.15, n.27 - jan/jun - 2007.

[4] Moura, M. O.; **A Atividade de Ensino como Unidade Formadora**. Bolema, Rio Claro - SP, v.11, n.12, 1997.

[5] Rêgo, R. M.; Rêgo, R. G.; **Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino da matemática**. In: LORENZATO, Sérgio. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2009.

Matemateca

Raphael, Deborah[184]

Resumo: *A Matemateca do IMEUSP construiu um grande acervo de "objetos matemáticos"que procura aproximar o público geral da matemática. Em particular, muitas peças expositivas podem ser exploradas no desenvolvimento de conteúdos do Ensino Fundamental e Ensino Médio, trazendo novas ferramentas para o professor. Esta exposição que apresentamos na Bienal explora várias facetas da matemática que podem ser utilizadas na aproximação com o público: o lúdico, o apelo estético, as aplicações na vida cotidiana. Esperamos que se divirtam com a visita! Quem sabe, sirva também como um incentivo para criarem seus próprios objetos matemáticos.*

[184]Universidade de São Paulo - IME.

Matemática MAKER - Jogos, quebra-cabeças e outros materiais pedagógicos

Cláudia Brum de Oliveira Fogliarini Filha[185]; Claudiomir Feustler Rodrigues de Siqueira[186] e Diego Lieban[187]

Resumo: *Neste trabalho, apresentamos uma série de recursos e estratégias que vêm sendo desenvolvidos na perspectiva da Educação STEAM e da Cultura Maker no IFRS - Campus Bento Gonçalves e Campus Canoas. Entre os diferentes materiais, destacam-se quebra-cabeças geométricos, jogos de estratégia, mecanismos e outros materiais didáticos, como réguas/compassos, teodolitos e círculos trigonométricos.*

Palavras-chave: *Cultura Maker, jogos de estratégia, materiais pedagógicos.*

EDUCAÇÃO STEAM E CULTURA MAKER

Este trabalho tem como objetivo integrar diferentes áreas do conhecimento e promover a criatividade e o pensamento crítico (Harari, 2018) por meio de atividades práticas e projetos interdisciplinares. Ao combinar as disciplinas de ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática (STEAM), procura-se incentivar estudantes a explorar soluções inovadoras para desafios reais e a desenvolver habilidades como resolução de problemas, colaboração e comunicação. Além disso, a Cultura Maker, que parte do princípio do "faça você mesmo"e valoriza a experimentação (Nussbbaum, 2013), é uma parte fundamental do trabalho. Com isso, encorajamos estudantes a criar, prototipar e testar ideias por meio de diferentes ferramentas e materiais, incluindo impressoras 3D e cortadoras a laser. A exploração destes recursos tem como premissa fomentar a formação técnica e tecnológica entre a comunidade interna e externa dos Institutos Federais, além de estreitar a relação com as escolas públicas locais, através da produção e distribuição de materiais pedagógicos. O desenvolvimento de materiais físicos e digitais interativos para o ensino e aprendizagem de matemática e com foco na construção e exploração dos objetos criados é introduzido neste trabalho como disparador para observar (e ao mesmo tempo promover) a relação de estudantes, professores (em exercício e em formação) com o uso de novas tecnologias. A matemática pode se desenvolver, assim, na criação ou na exploração desses materiais, seja como meio (ferramenta) ou atividade fim. Exemplos de modelos possíveis de serem desenvolvidos e explorados como recursos complementares,

[185]IFRS – Campus Canoas
[186]IFRS – Campus Canoas
[187]IFRS - Campus Bento Gonçalves

físicos e digitais, são quebra-cabeças geométricos, cadeias de DNA, estruturas moleculares, sistemas de mecanismos e engrenagens, entre outros. Como motivação inicial e, frente à necessidade iminente de encorajar professores de matemática (em exercício e em formação) com práticas de suas realidades mais próximas, este trabalho concentra (ainda que de forma não restrita) suas ações na pesquisa e desenvolvimento de materiais que possam ser recriados com o viés lúdico ou artístico para o ensino de matemática. Alguns desses materiais devem estar alinhados a programas já existentes desenvolvidos pela OBMEP Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas que, com o intuito de estender o programa para os alunos de quartos e quintos anos, já vem apresentando problemas de caráter mais lúdico e, muitas vezes, no formato de quebra-cabeça. Cabe ressaltar que tais iniciativas estão alinhadas com movimentos e projetos de inovação desenvolvidos no IFRS, em particular, os projetos PIPA IFmakeRS e Gurias Fazendo Ciência e que algumas atividades que já têm sido desenvolvidas podem ser acompanhadas em https://www.geogebra.org/m/xmgsf54t.

Fig. 58: Exemplos de materiais pedagógicos desenvolvidos para o ensino de Matemática na Educação Básica

Fig. 59: Exemplos de jogos de estratégia e materiais pedagógicos desenvolvidos para o ensino de outras áreas do conhecimento

BIBLIOGRAFIA

[1] HARARI, Y. N.; **21 lições para o século 21.** Companhia das Letras, 2018.

[2] NUSSBAUM, B.; **Creative Intelligence: Harnessing the Power to Create, Connect, and Inspire.** Harper Collins Publishers, 2013.

O ábaco dos inteiros, concreto e virtual, e os tijolos táteis

Ripoll, Cydara Cavedon[188]; Wermann, Franciele Marciane Meinerz[189]; Blumberg, Vanessa Pacheco[190] e Doering, Luisa Rodriguez[191]

Resumo: *Nesta exposição serão apresentadas as ferramentas Ábaco (físico) dos Números Inteiros, Ábaco Virtual dos Números Inteiros e os Tijolos Táteis, com as quais é possível abordar as infinitas representações com os números inteiros e as operações de adição, subtração e multiplicação. A ferramenta Tijolos Táteis é um material tátil acessível também a estudantes com deficiência visual possibilitando, assim, uma efetiva inclusão em uma sala de aula comum. Durante a exposição, participantes serão desafiados a refletir, a criar conjecturas, a descobrir e a deduzir as chamadas regras de sinais dessas operações, bem como a resolver equações lineares com os Tijolos Táteis.*

Palavras-chave: *Operações com números inteiros, ábaco (virtual) dos números inteiros, tijolos táteis, inclusão, deficiência visual.*

DESCRIÇÃO DA EXPOSIÇÃO

Nesta exposição, serão disponibilizadas ao público, para manuseio, as ferramentas Ábaco Virtual (e físico) dos Números Inteiros e os Tijolos Táteis. Acreditamos que a representação oportunizada por essas ferramentas possibilitam as três atividades cognitivas fundamentais propostas em [4] (formação, tratamento e conversão de uma representação), auxiliando, assim, estudantes no que diz respeito à compreensão dos processos envolvidos nas operações com números inteiros.

Descrição do Ábaco Virtual dos Números Inteiros

O Ábaco Virtual dos Números Inteiros (disponível em `www.mundojogos.com.br/abaco`) teve sua primeira versão criada em 2016, por Wermann, inspirada no ábaco físico dos inteiros (Figura 60 (a)).

[188]Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - UFRGS
[189]Colégio Província de São Pedro e EMEF Heitor Villa Lobos
[190]Colégio La Salle Canoas e Colégio SESI Gravataí
[191]Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática - UFRGS

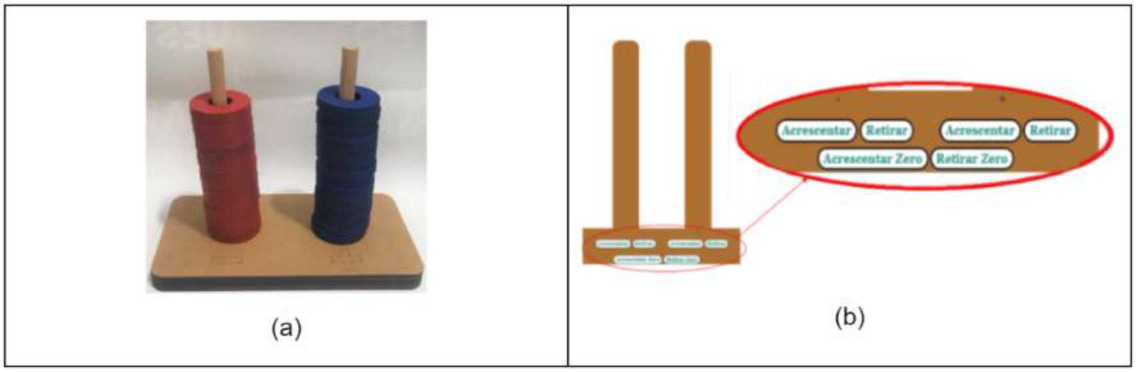


Fig. 60: Fonte [5]

O Ábaco Virtual tem o mesmo objetivo do ábaco físico dos inteiros, a saber, proporcionar a estudantes uma ferramenta que auxilie no estudo das operações no conjunto dos números inteiros, fazendo uso de argolas nas cores vermelho e azul em duas hastes verticais paralelas. Diferencia-se do ábaco físico pelo acréscimo de seis botões, que traduzem para o Ábaco Virtual as ações realizadas no manuseio do ábaco físico: "Acrescentar" (em ambas as hastes), "Retirar" (em ambas as hastes), "Acrescentar Zero" e "Retirar Zero" (Figura 60 (b)). Como na versão concreta, convenciona-se que as argolas vermelhas representam unidades negativas e as azuis unidades positivas e que a haste da esquerda é utilizada para inserir as unidades negativas ("haste negativa") enquanto na da direita são inseridas as unidades positivas ("haste positiva"). Os botões Acrescentar e Retirar, abaixo de cada haste, são utilizados para acrescentar ou retirar argolas na ou da respectiva haste.

O botão Retirar Zero, quando acionado, elimina simultaneamente uma argola em cada haste; assim, ele só funciona quando houver pelo menos uma argola de cada cor no ábaco. O botão Acrescentar Zero, quando acionado, acrescenta simultaneamente uma argola em cada haste. O uso dos botões Retirar Zero e Acrescentar Zero é uma das vantagens do Ábaco Virtual em relação ao ábaco físico.

No Ábaco é possível representar números de diferentes formas; por exemplo, na Figura 61 estão apresentadas três formas diferentes de representar o número inteiro -3.

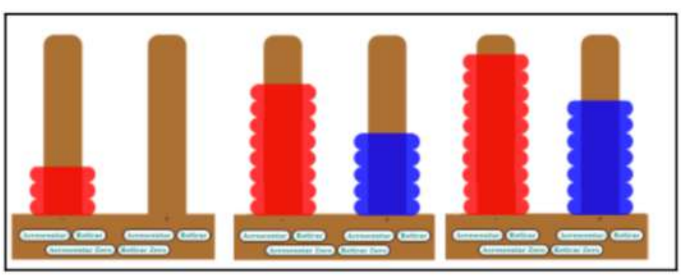


Fig. 61: Fonte [5]

Também podemos utilizar o Ábaco para realizar as operações de adição, subtração e multiplicação. Na Figura 62, podemos observar a representação da operação $(+3) + (-2)$. Inicialmente representamos o $+3$ no ábaco (Figura 62 (a)). Em seguida, usando o botão Acrescentar da haste negativa, incluímos duas unidades negativas (Figura 62(b)). Até aí, representamos a adição $(+3) + (-2)$. O resultado da operação em uma só haste é obtido pressionando duas vezes o botão Retirar Zero (já que o maior número de pares formados por uma unidade positiva e uma unidade negativa é dois), obtendo-se, assim, $+1$ como resposta (Figura 62(c)).

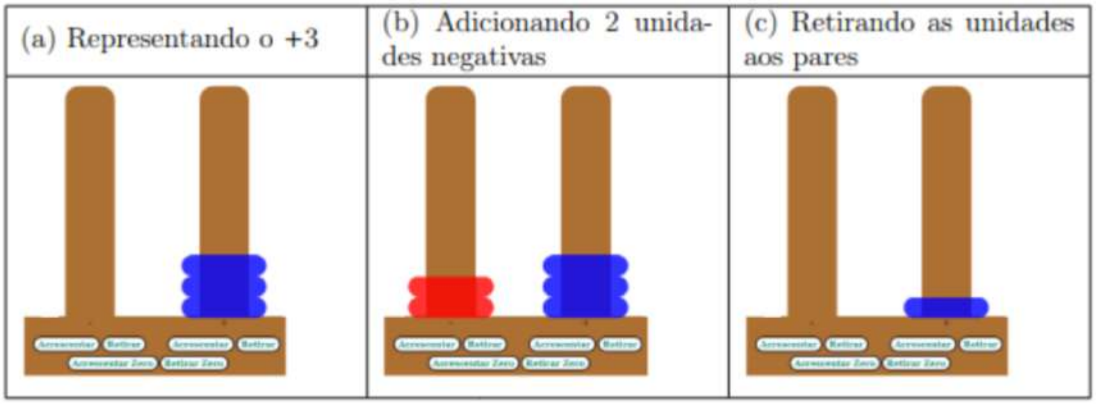


Fig. 62: Fonte [5]

Descrição do Material Tijolos Táteis

Na dissertação [1] é relatada a construção do material Tijolos Táteis (Figura 63), inspirada no Ábaco dos Inteiros e levando em consideração os critérios para construção de materiais táteis de [3]. Esta ferramenta oportuniza também a estudantes sem acuidade visual construção de seus conhecimentos em uma sala de aula comum contribuindo assim, para uma efetiva inclusão.

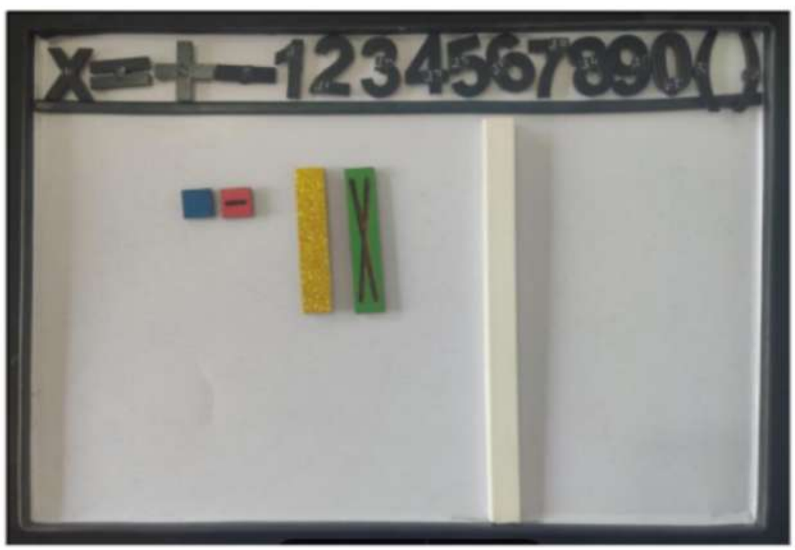


Fig. 63: Fonte [1]

A ferramenta Tijolos Táteis é composta por uma placa metálica branca, que serve de base para as construções; por uma barra branca, que separa quantidades positivas de negativas, ou que representa a igualdade nas equações lineares; e por dois tipos de peças:

Tijolos Táteis: Peças com cores, texturas e tamanhos diferentes. No Kit há quatro formatos de tijolos para realizar representações aritméticas e algébricas, descritas na Figura 64(a). Por exemplo, os tijolos lisos/azuis representam unidades positivas e os com reentrância/vermelhos as unidades negativas.

Números Táteis: Peças em formato de números e símbolos em tinta, com a escrita em Braille em sua superfície (Figura 64(b)).

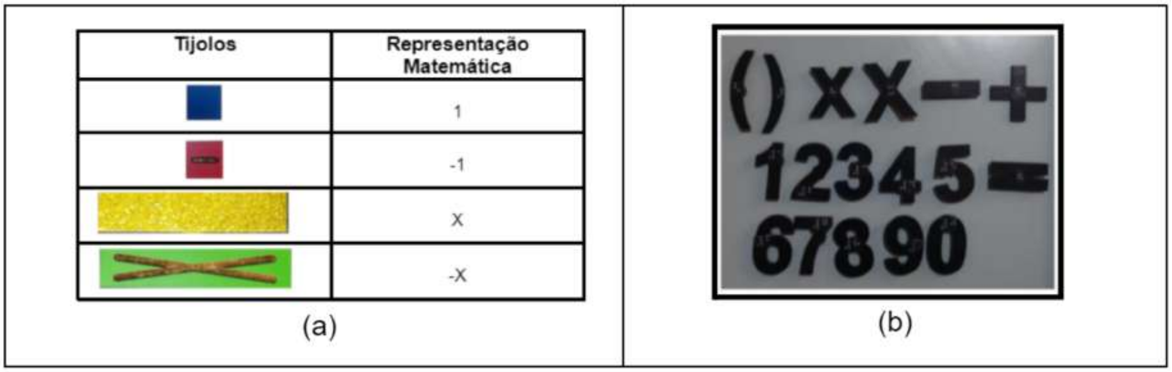


Fig. 64: Fonte [1]

As regras de utilização dos Tijolos Táteis são:

1ª regra: Se adicionarmos na placa um tijolo liso/azul/unidades positivas e um tijolo com reentrância/vermelho/unidades negativas, o número representado inicialmente não é alterado.

2ª regra: Se há na placa um tijolo liso/azul e um tijolo com reentrância/vermelho, podemos "retirar" esses tijolos da placa sem alterar o número representado inicialmente.

A representação para Números Inteiros com os Tijolos Táteis é muito semelhante e foi inspirada na representação no Ábaco dos Inteiros. Para simular o Ábaco dos Inteiros com as peças dos Tijolos Táteis bem como as operações matemáticas que elas traduzem devemos localizar unidades positivas à direita da barra branca e as unidades negativas à esquerda da barra, simulando assim as hastes positiva e negativa do Ábaco (virtual) dos inteiros.

Observação: A disposição vertical é sugerida (e recomendada para deficientes visuais) para simular o Ábaco dos Inteiros com os Tijolos Táteis. Entretanto, salientamos que as representações com os Tijolos Táteis não necessita dessa disposição, consideramos importante o aluno expressar suas representações da maneira que lhe parece mais conveniente.

Podemos observar na Figura 65 a representação da soma $(-4) + (+2)$ no Ábaco Virtual dos Inteiros e nos Tijolos Táteis:

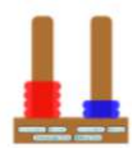
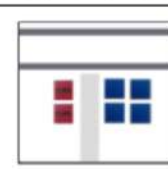
Simbologia Matemática	Ábaco Virtual dos Inteiros	Tijolos Táteis
$(-4) + (+2)$		

Fig. 65: Fonte [1]

Para resolver equações algébricas de 1º grau com uma incógnita, utilizamos o Princípio Aditivo juntamente com as regras vistas anteriormente. Representamos múltiplos inteiros de X como somas repetidas: $2X = X + X$. A tradução do Princípio Aditivo para os Tijolos Táteis é "uma equação representada nos Tijolos Táteis não se altera quando inserimos dos dois lados da barra o mesmo tipo e quantidade de peças". Apresentamos, na Figura 66, uma sugestão de resolução da equação $2X + 3 = 5$.

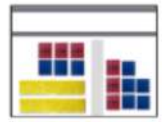
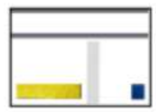
Algebricamente	Tijolos Táteis
$2X + 3 = 5$	
$2X + 3 - 3 = 5 - 3$	
$X + X = 1 + 1$	
$X = 1$	

Fig. 66: Fonte [1]

BIBLIOGRAFIA

[1] BLUMBERG, V.S.P. Conceitos Aritméticos e Algébricos para estudantes com e sem acuidade visual: Construção de um material acessível. A aparecer em `https://lume.ufrgs.br` , 2024.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF. 2018.

[3] CERQUEIRA, J O. B. S.; FERREIRA, E. M. B. Recursos didáticos na educação especial. **Revista Benjamin Constant**, Rio de Janeiro: IBCENTRO, n. 6, abr. 2000.

[4] DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, v. 7, p. 266–297, 2012.

[5] MEINERZ, F.; DOERING, L.R.; RIPOLL, C.C. O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: um recurso para o ensino presencial e remoto (2022). Disponível em: `https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2022/10/ebook_Franciele_Luisa_Cydara-18-10-2022-final.pdf` Acesso em: 25 abr. 2024.

A matemática do céu noturno

Lima, Victor P. G.[192]; Farto, Jéssica A. C.[193]; Trindade, Eron V.[194] e Salvador, José A.[195]

Resumo: *O céu, em particular, sempre despertou grande curiosidade e teve múltiplas utilidades para diferentes povos e comunidades, seja para contagem do tempo, para previsão das épocas de plantio e colheita ou, até mesmo, para a navegação. Movido pela curiosidade, Galileu confeccionou e apontou uma luneta para o céu pela primeira vez, expandindo os horizontes do conhecimento. Com a construção de telescópios e outros instrumentos para observação cada vez mais poderosos, nossa compreensão do Universo segue se aprimorando significativamente, dia após dia. Dessa forma, propomos uma atividade que visa explorar as fascinantes relações entre a Matemática e a Astronomia. No início da noite, será realizada uma explanação geral sobre essas interessantes relações, com foco na Astronomia de Posição. Em seguida, será realizada uma sessão de observação do céu noturno, com telescópios, no terraço do Observatório Astronômico da UFSCar. Será oferecida, ainda, uma orientação abrangente de como interpretar o céu mais facilmente com o auxílio de softwares. Com essa atividade, esperamos possibilitar uma imersão um pouco mais profunda no vasto universo que nos rodeia.*

Palavras-chave: *Observações astronômicas, coordenadas celestes, telescópios.*

DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE

Propomos a realização de uma Oficina de 2 horas de duração, no Observatório Astronômico da UFSCar. O prédio do Observatório se localiza na Praça da Ciência, na Área Norte da Universidade, próximo ao Departamento de Matemática, e é vinculado ao Núcleo de Formação de Professores.

O ideal é que a atividade seja realizada no período noturno, das 18h às 20h, já que antes do pôr do Sol normalmente não é possível observar outros objetos astronômicos que não o Sol. Planejamos a atividade para que seja proveitosa tanto para pessoas que não tiveram quase nenhum contato com Astronomia ou Matemática quanto para pessoas mais experientes nos temas. O público estimado para melhor andamento das atividades, tendo em vista a capacidade do espaço e o tempo disponível, é de 20 participantes.

A Oficina será composta por duas partes:

- uma introdução sobre a Astronomia de Posição e a Matemática, de aproximadamente 40 minutos de duração, no auditório do Observatório;

[192]Núcleo de Formação de Professores (NFP) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
[193]Departamento de Física (DF) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
[194]Departamento de Física (DF) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
[195]Departamento de Matemática (DM) - Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

- em seguida, questionamentos e observação do céu noturno com telescópios, de aproximadamente 1h e 20 minutos de duração, no terraço do Observatório.

A Astronomia de Posição e a Matemática

A Astronomia de Posição (ou Astrometria) é a área da Astronomia que abrange os estudos sobre as posições e os movimentos dos objetos astronômicos. É uma área que tem como base diversos conceitos matemáticos e geográficos.

Durante a parte inicial da Oficina, serão explorados os seguintes temas [1] [2]:

- o globo terrestre e a esfera celeste;
- o equador e os pólos;
- os paralelos, os meridianos e os fusos horários;
- a descrição de uma posição no globo terrestre a partir das coordenadas geográficas latitude e longitude;
- a descrição de uma posição na esfera celeste a partir das coordenadas equatoriais declinação e a ascenção reta;
- o plano do horizonte, o zênite e o nadir;
- a descrição de uma posição no céu a partir das coordenadas horizontais altitude e do azimute;
- o movimento aparente do Sol;
- as massas, as luminosidades, os tamanhos e as distâncias das estrelas (e as projeções delas na esfera celeste).

Essencialmente, as coordenadas geográficas e as coordenadas celestes (equatoriais ou horizontais) são coordenadas esféricas, amplamente estudadas na Matemática.

Observação do Céu do Início do Inverno em São Carlos

Após a introdução na temática das posições e dos movimentos dos objetos astronômicos no céu, vamos visualizar o céu noturno do final de julho ou do começo de agosto no terraço do Observatório Astronômico da UFSCar.

Durante essa segunda parte da Oficina, os participantes serão guiados para a execução das seguintes tarefas:

- localização aproximada da direção Norte-Sul a partir de constelações visíveis;
- utilização do aplicativo de código livre Stellarium [3] para reconhecimento de estrelas e constelações e para o planejamento de observações;
- posicionamento, alinhamento e operação de telescópios altazimutais e equatoriais para observação astronômica.

Os participantes serão instruídos pela equipe proponente da Oficina. A equipe estará disponível para explicações e esclarecimentos, bem como para indagações.

A ideia principal é que os participantes desenvolvam habilidades práticas básicas de observação e interpretação do céu noturno, do início do inveno, no hemisfério sul. Três ou quatro telescópios de até 8 polegadas de diâmetro estarão disponíveis para a atividade.

Na semana de 29/07/2024 a 02/08/2024, no início da noite, não será possível observar a Lua, já que ela estará abaixo do horizonte. Provavelmente será possível visualizarmos brevemente os planetas internos (Mercúrio e Vênus), as constelações do Escorpião (próximo ao zênite), Cruzeiro do Sul e Centauro.

Vale ressaltar que não será possível realizar a observação do céu com telescópios se estiver nublado ou se estiver chovendo, de modo que a Oficina precisará ser adaptada para exploração do céu com o aplicativo Stellarium.

CONCLUSÕES

Esperamos que os participantes desfrutem deste laboratório natural e se sintam cada vez mais inspirados pelas maravilhas do céu, assim como pelas possibilidades de explorar a Matemática inerente aos desafios astronômicos.

BIBLIOGRAFIA

[1] LANGHI, R. **Aprendendo a ler o céu: Pequeno guia prático para Astronomia observacional**, São Paulo. Livraria da Física, 2016.

[2] OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. São Paulo. Livraria da Física, 2017.

[3] ZOTTI, G.; WOLF, A. Stellarium: Finally at Version 1.0! And Beyond. **Journal of Skyscape Archaeology**, v. 8, n. 2, p. 332–334, 2022.

Museu da matemática UFMG

Divulgação e Popularização da Matemática por meio da Matemática Recreativa

Dias, Júlia da Mata Gonçalves[196];

Resumo: *A Matemática Recreativa é uma abordagem metodológica em Educação Matemática que, entre outras razões, surgiu como recurso pedagógico na busca por melhorias e renovações para os materiais e métodos de ensino dentro desse campo. Nesse sentido, o Museu da Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais atua com o objetivo de promover e divulgar a Matemática Recreativa, extrapolando os limites da sala de aula e trabalhando como divulgador e desmitificador da Matemática para os mais diversos públicos. Assim, esta exposição pretende compartilhar de forma prática as experiências das visitas ao Museu, replicando-as para os participantes do evento, promovendo, também, uma reflexão sobre a metodologia que trabalhamos, que desconstrói a representação do ensino-aprendizagem da Matemática limitadamente a vias mecânicas, abstratas e formais. Tais experiências têm mostrado que a interação com quebra-cabeças, jogos de tabuleiro, desafios lógicos, entre outros materiais de nosso acervo, promove uma percepção positiva da Matemática e enriquece a nossa formação inicial e é nisso que esse resumo se pauta.*

Palavras-chave: *Matemática recreativa, divulgação da ciência, popularização da matemática, jogos matemáticos.*

MATEMÁTICA RECREATIVA NO MUSEU

A Matemática é frequentemente associada à uma perspectiva mecanicista e formal, que valida a existência de uma única forma de se fazer e aprender, reflexo de um movimento generalizado na educação, ainda que atue mais intensamente na Matemática. Opostas a essa perspectiva, existem experiências que abordam essa área do conhecimento de forma alternativa e intuitiva, promovendo o raciocínio lógico, despertando a curiosidade e buscando oferecer um aprendizado concreto, sem perder de vista o entusiasmo, o prazer e a diversão. Nesse cenário, é pautado nesses últimos propósitos que se encontra o Museu da Matemática UFMG, que, além disso, também busca proporcionar aos participantes uma experiência enriquecedora e influenciadora, despertando vocações científicas e fomentando perspectivas e sonhos de uma formação acadêmica.

Nesse contexto, a Matemática Recreativa surge para fornecer ferramentas de construção do conhecimento matemático, a partir de quebra-cabeças geométricos, jogos de tabuleiro, enigmas aritméticos, dobraduras de papéis, jogos de estratégia, apresentação de fórmulas e teoremas a partir de objetos concretos, entre outros. Segundo Rino (2004), todos esses artifícios podem ser usados para promover habilidades sociais, estimular a discussão matemática, aprender conceitos e reforçar

[196]Graduanda em Matemática pela Universidade Federal de Minas Gerais e voluntária do projeto

o raciocínio lógico, aumentando a capacidade de resolução de problemas, a motivação e o interesse pela Matemática, objetivos primários de nosso projeto.

Com isso em mente, o Museu da Matemática UFMG se coloca como um espaço de disseminação do conhecimento científico e matemático a partir de uma perspectiva recreativa, objetivando envolver e despertar a curiosidade dos visitantes sobre as maravilhas da Matemática, mediante o desenvolvimento de atividades lúdicas e instigantes. Além disso, o Museu é um centro de apoio para professores, tendo como metas difundir a Matemática Recreativa como prática pedagógica, contribuir para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática e promover a capacitação continuada de professores. Se pautando no objetivo central de divulgar e popularizar a Matemática da maneira positiva que nós a vemos, dentro e fora da sala de aula, a atuação no Museu se dá no contato dos estudantes da Educação Básica com o acervo do Museu, a partir de visitas ao seu espaço e de itinerâncias a diversos municípios do Estado de Minas Gerais, e também na participação em eventos públicos, como o Domingo no Campus da UFMG.

Acervo do Museu da Matemática UFMG

Atualmente, o acervo do Museu da Matemática UFMG conta com atividades de caráter diverso, voltadas às diferentes facetas do pensamento lógico matemático e feitas nos mais diversos formatos, desde peças em madeira até objetos impressos em nossa impressora 3D, passando também por vários trabalhos manuais. Com relação às categorias desses jogos matemáticos, podemos divi-los em 3 grandes grupos: jogos de tabuleiro, quebra-cabeças geométricos e desafios lógicos.

Jogos de Tabuleiro

Ao longo da história, grande parte das culturas do mundo produziu seus próprios jogos de tabuleiro, pelos mais diversos motivos: desde o treino de estratégias de guerra até o simples (mas vital) entretenimento. Sendo assim, dentro de cada um desses jogos são facilmente encontradas várias noções de lógica e estratégia, bem como diversos outros conteúdos matemáticos, já que muitos resultados na Teoria dos Grafos e na Teoria das Probabilidades surgiram com base e a partir de jogos. Nesse sentido, consideramos de suma importância e relevância o resgate desses elementos de Matemática Ancestral para o acesso público, pois, além de proporcionarem uma experiência matemática repleta de diversão, também contam um pedaço da história da ciência e do mundo, contribuindo com os nossos objetivos de desmistificação e popularização da Matemática.

Fig. 67: Jogos de Tabuleiro: Mancala, Hex e Jogo Real de Uhr, respectivamente

Quebra-Cabeças Geométricos

Pensados para instigar a percepção geométrica e espacial, bem como a familiaridade com figuras matemáticas, são quebra cabeças que exigem a criatividade e o raciocínio geométrico para sua resolução. Envolvem formas geométricas, reconhecimento de padrões, percepções angulares, entre outros preceitos da Geometria.

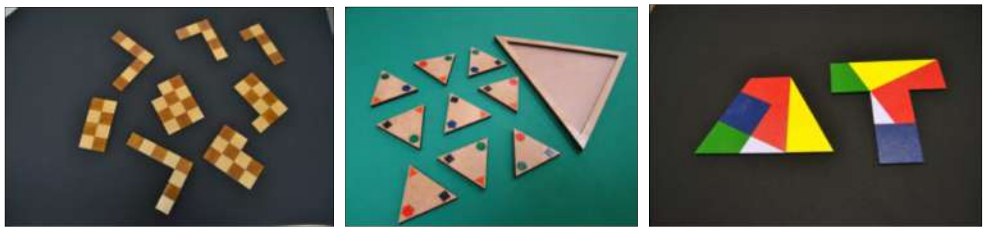


Fig. 68: Quebra-Cabeças Geométricos

Desafios Lógicos

A Matemática não é feita apenas de resultados e objetos mensuráveis: ela representa também uma maneira de pensar e agir no mundo, pautada na lógica, na curiosidade, na originalidade e no método científico. Assim, o Museu também procura oferecer aos seus visitantes desafios que os levem a pensar de maneiras não convencionais, a desenvolver e apurar o raciocínio lógico, importante não só para o fazer matemático, mas para uma vida acadêmica e cidadã mais completa.

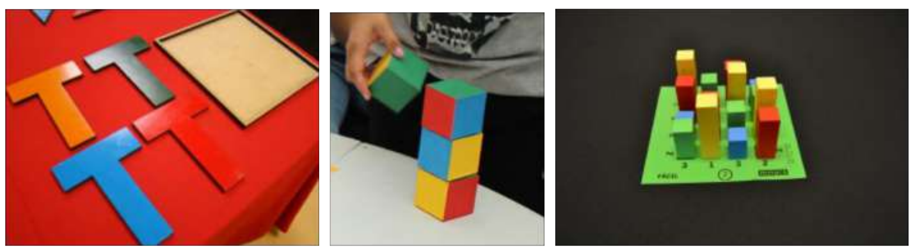


Fig. 69: Desafios Lógicos

BIBLIOGRAFIA

[1] MARQUES, M. C. P., PERIN, C. L., SANTOS, E. e RINO, J. (2004). O Jogo, Interacções e Matemática. **Lisboa: Associação de Professores de Matemática.**

[2] BEZERRA, Maria da Conceição Alves. **Concepções, Aspectos e as Principais Tarefas da Matemática Recretiva**. Rio Grande do Norte: Hipátia, v.7, n. 1, p. 141-152, jun. 2022.

Mágicas interativas com fundamentação matemática [197]

Truques de magia e diversões matemáticas

Pedro Luiz Malagutti,[198]

Resumo: *Serão apresentados ao público vários truques de magia apoiadas em conceitos lógico-dedutivos para mostrar a beleza e a força da Matemática em situações inusitadas. As mágicas envolvem Lógica, Combinatória, Aritmética e Geometria; elas têm o objetivo de trazer aos participantes algumas atividades lúdicas para seduzir os aprendizes e levá-los a apreciarem diferentes áreas da Matemática.*

Palavras-chave: *Divulgação científica, mágicas matemáticas, atividades matemáticas manipulativas.*

DESCRIÇÃO

A arte de adivinhar ou prever números e cálculos aritméticos faz parte da cultura matemática desde nossa mais tenra infância. Muitos autores têm dedicado seu tempo a escrever livros sobre truques aritméticos de efeitos mágicos, dirigidos às audiências de todas as idades, baseados em propriedades advindas da teoria dos números. Além disso, a arte de trabalhar com barbantes para construir figuras, é parte do folclore de quase todas as culturas. Por séculos os homens desenvolveram esta arte com um grau de sofisticação comparável à arte do origami, realizada até hoje no Japão. Milhares de padrões e truques foram inventados, e esta arte parece encantar as crianças até hoje, podendo ser um excelente início ao estudo de fatos topológicos. Por outro lado também, a utilização de materiais concretos inovadores pode despertar o gosto pelas ideias matemáticas e suas aplicações; são exemplos disso as ilusões de ótica e as conclusões de desafios lógicos com pouquíssimas informações. Essas atividades são, portanto, fonte de integração e sociabilidade, afastando a Matemática das crenças incorretas, comumente difundidas, sobre suas dificuldades e inacessibilidade dessa ciência ao cidadão comum. Tendo esse panorama como pano de fundo, pretendemos contribuir, com uma série de atividades interativas, para a melhoria do ensino da Matemática, apresentando várias brincadeiras que envolvem aritmética, geometria, topologia geométrica e lógica. Almejamos, assim, trazer ao público em geral (principalmente estudantes do ensino básico, das licenciaturas e professores do ensino fundamental) alternativas de ensino de matemática, tornando o estudo da matemática mais prazeroso. Em suma, pretendemos que as as atividades propostas forneçam aos participantes a alegria de aprender matemática por meio de elementos lúdicos.

[197]Exposição de materiais didáticos para divulgação científica em Matemática

[198]Departamento de Matemática - UFSCar e OBMEP.

Atividades manipulativas

Segue uma pequena lista de atividades propostas:
Adivinhação da idade
Usando a base 2
Usando a base 3
Mágicas com calendários e progressões aritméticas
Truques envolvendo Aritmética
Dados empilhados
Desaparecimento de dinheiro
Truque com números primos
Mágicas com combinatória
Permutações e semáforos
Teletransporte
Mágicas e Topologia
Truques com barbantes
Manipulações de materiais elásticos: janelinha, truques com e. v. a.
Geometria e impossibilidades
Diferentes maneiras de se quadrar o círculo.
Mágicas envolvendo Lógica Matemática
Exposição de materiais concretos que envolvem matemática e mágica.

CONCLUSÕES

A exposição pretende apresentar uma série de atividades planejadas para trazer aos estudantes e professores alternativas para a melhoria do ensino de Matemática. São apresentados truques, paradoxos, desafios e mágicas, sendo a maioria feitas com materiais simples, como papel e barbante. Por meio de paradoxos geométricos, por exemplo, desejamos que os participantes repensem conceitos de Geometria, percebendo que o intuitivo nem sempre é o verdadeiro. As atividades manipulativas, além de prazerosas, proporcionam descobertas surpreendentes e a confecção de materiais pelo próprio aprendiz propiciam a concretização de conceitos matemáticos difíceis de serem alcançados por métodos tradicionais usualmente utilizados em sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] MALAGUTTI, P. L.; SAMPAIO, J. C.; Mágicas Matemáticas e outros mistérios. **EDUFScar**, 2010.

[2] MALAGUTTI, P. L.; SAMPAIO, J.C.; Mágicas com papel, Geometria e outros mistérios. **EDUFScar**, 2011.

Arquimedes, Cavalieri e o volume da esfera

Lima, Gutemberg Pinheiro[199]; Moreira, Rafael de Lima[200] e Souza, Yan Xavier[201]

Resumo: *Na abordagem do Princípio de Cavalieri, foi elaborada uma sequência de atividades para realizar a dedução do volume de uma esfera refletindo-se sobre as ideias de Arquimedes para, assim, determiná-la a partir do volume de uma anticlepsidra. Dessa maneira, todos os estudantes tem a oportunidade de aplicar conceitos teóricos em uma situação prática e envolvente, relacionando diversas tecnologias com a abstração matemática inerente ao estudo dos temas citados. Com uma estrutura de aulas adaptável e utilização de recursos compartilhados, podemos realizar a referida proposta com poucos insumos utilizando apenas uma impressora* 3*D, sendo possível reutilizar os materiais produzidos em turmas subsequentes. Após uma revisão prévia de tópicos de Geometria, foram desenvolvidos modelos tridimensionais na plataforma Tinkercad para impressão* 3*D, possibilitando a verificação do Princípio de Cavalieri nos cortes transversais previamente confeccionados. Assim, os estudantes podem comprovar tais relações e suas implicações de maneira prática, assegurando uma aprendizagem significativa, equitativa e dinâmica.*

Palavras-chave: *Princípio de Cavalieri, volume da esfera, impressão* 3*D.*

DESCRIÇÃO

Na abordagem de habilidades indicadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que referem-se a áreas e volumes de sólidos geométricos, está presente o Princípio de Cavalieri. Conforme a organização do material didático da rede SESI São Paulo, temos o capítulo "Arquimedes e Cavalieri: uma dupla de muita capacidade!" presente no terceiro ano do ensino médio, tema que motivou a presente exposição dado que possibilitou a criação de materiais manipuláveis, contemplando assim diversos perfis de estudantes.

Para retomar e aprofundar as expectativas que tratam sobre conceitos de área e volume que envolvem a comparação de sólidos geométricos, os estudantes foram mobilizados com seus conhecimentos prévios analisando um raciocínio milenar proposto por Arquimedes em "O Método". Para isso, foi exibida uma apresentação (*slides*) contendo o roteiro das aulas e materiais complementares, todos disponibilizados publicamente em um *site* gerenciado pelo docente.

[199]SESI São Paulo: Centro Educacional nº 426 - Diadema, Orientador de Educação Digital`gutemberg.lima@sesisp.org.br`

[200]SESI São Paulo: Centro Educacional nº 426 - Diadema, Professor de Educação Básica, `rafael.moreira@sesisp.org.br`

[201]SESI São Paulo: Centro Educacional nº 426 - Diadema, Técnico de Laboratório Didático, `yan.xavier@sesisp.org.br`

As ações citadas acima ocorreram após a elaboração de um cronograma e respectivos agendamentos realizados com o nosso Técnico de Laboratório Didático Yan Xavier de Souza e o nosso Orientador de Educação Digital Gutemberg Pinheiro de Lima, que providenciaram os recursos necessários e deram todo o suporte para a execução do projeto.

Fig. 70: estudantes criando modelos tridimensionais dos sólidos geométricos indicados

Em grupos, os estudantes produziram versões digitais dos modelos tridimensionais indicados pelo docente na plataforma Tinkercad (modelagem) e, com isso, o nosso Orientador de Educação Digital nos auxiliou com o gerenciamento e compartilhamento dos projetos, momento no qual nosso Técnico de Laboratório Didático aproveitou para explicitar o funcionamento das impressoras 3D da nossa unidade escolar. Na próxima aula, os estudantes receberam sólidos geométricos, paquímetros digitais e notebooks para preencher um formulário digital com questões abordando os cálculos da área a partir de medições, relacionando-as com o Princípio de Cavalieri. Os grupos evidenciaram grande entusiasmo na realização da atividade e, no momento das devolutivas, aproveitamos para deduzir a fórmula do volume da esfera, relacionando-as com o volume do cilindro e do cone. Com isso, atingimos nossos objetivos nessa prática e vivenciamos a importância das expectativas presentes em nosso material didático conforme orientações da BNCC, assegurando a retomada de diversos conteúdos e promovendo aprendizagens de modo equitativo.

Fig. 71: docente orientando as medições e cálculos solicitados no formulário virtual

Ao final do período letivo de 2023, inscrevemos este projeto no evento Saber em Ação 2024 da rede SESI São Paulo, sendo aprovado para compartilhamento de práticas exitosas na semana de formação destinada aos participantes de nosso polo, composto por 11 escolas e aproximadamente 360 docentes. A seguir, temos as indicações de alguns materiais produzidos durante a execução do projeto no período letivo de 2023:

- Apresentações Google:
  - `https://docs.google.com/presentation/d/1wztA1Odc8DyKbG5KUqXd7s6_pvOA-l7ekOSyq8vL-y0/edit?usp=sharing` acesso em 30/04/2024;
- Google Fotos:
  - `https://photos.app.goo.gl/rjVGxR75aMJfTcNz6` acesso em 30/04/2024;
- YouTube - relato para inscrição no Saber em Ação 2024:
  - `https://youtu.be/Z8AJPCnVhV4` acesso em 30/04/2024.

Fig. 72: material manipulável produzido na impressora 3D durante a proposta

BIBLIOGRAFIA

[1] Ávila, G.; **Arquimedes, a esfera e o cilindro.** Revista do Professor de Matemática. São Paulo, nº 10, p. 11-20, 1987.

[2] Dolce, O.; Pompeo, J. N.; **Fundamentos de Matemática Elementar, Geometria Espacial.** Vol. 10. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005.

[3] Lima, E. L. et al.;**A Matemática do Ensino Médio.** Vol. 2. Coleção do Professor de Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] Magnaghi, C.P.; Assis, A. K. T.; **O Método de Arquimedes - Análise e Tradução Comentada.** Montreal: C. Roy Keys Inc., 2019.

[5] Pinto, F. A.; **Arquimedes, as alavancas e o volume da esfera. Revista do Professor de Matemática.** São Paulo, nº 58, 2005.

Trigonovan

Vaz, Vanderlei Perpétuo[202]

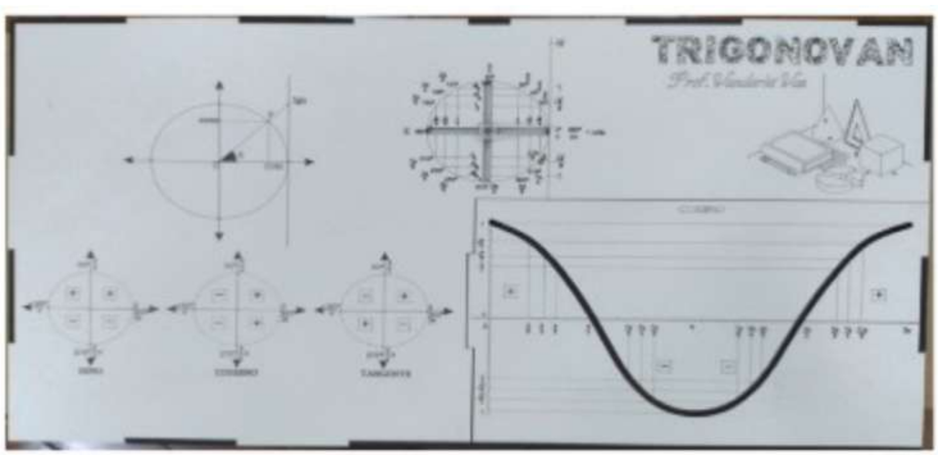
Resumo: *Trigonovan trata-se de um material pedagógico desenvolvido para facilitar o ensino/aprendizagem de trigonometria no Ensino Médio. Ao utilizá-lo, o professor levará o aluno a entender as especificidades das funções seno, cosseno e tangente, bem como compreender o comportamento do esboço gráfico cada uma delas no plano cartesiano.*

Palavras-chave: *Trigonometria, seno, cosseno, tangente, função.*

DESCRIÇÃO

Trigonovan é um material confeccionado em madeira (mdf) de $3mm$, em forma de uma caixa retangular (prisma reto retângulo) com medidas aproximada de $40cm$ por $22,5cm$ por $1,3cm$. Esta caixa comporta em seu interior um mecanismo contendo uma engrenagem utilizado para deslocar uma cremalheira. O movimento dessa engrenagem se dá pelo giro no sentido anti-horário de um ponteiro em torno de uma circunferência trigonométrica acoplada a ela que fica na parte frontal do material. O deslocamento da cremalheira indica, através de gráfico já impresso e vazado também na parte frontal da caixa (recortado por tecnologia laser), os valores das funções seno, cosseno e tangente, bem como o esboço dos gráficos senoide, cossenoide e tangentoide.

Fig. 73: Esboço da função cosseno



[202] Colégio Ressurreição, `vazprofessor@gmail.com`

Fig. 74: Esboço da função tangente

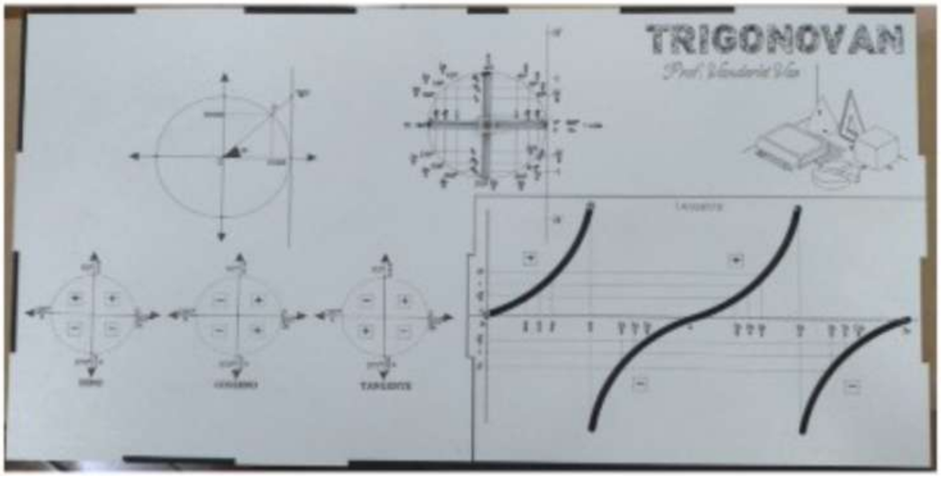
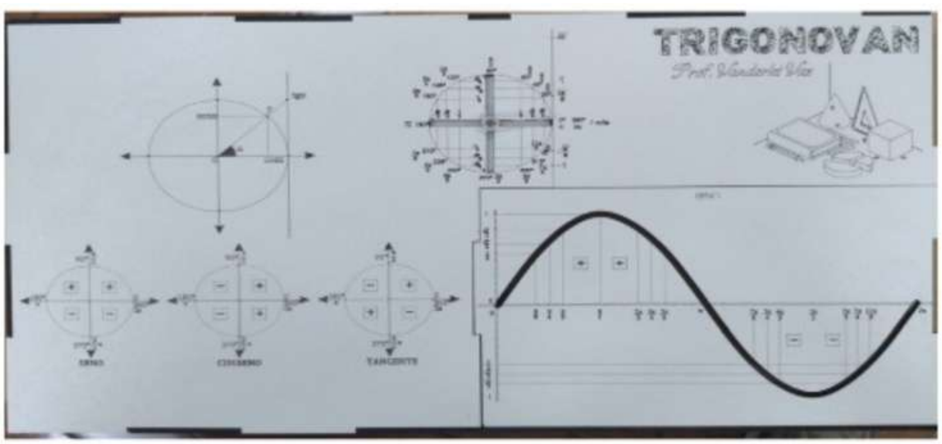
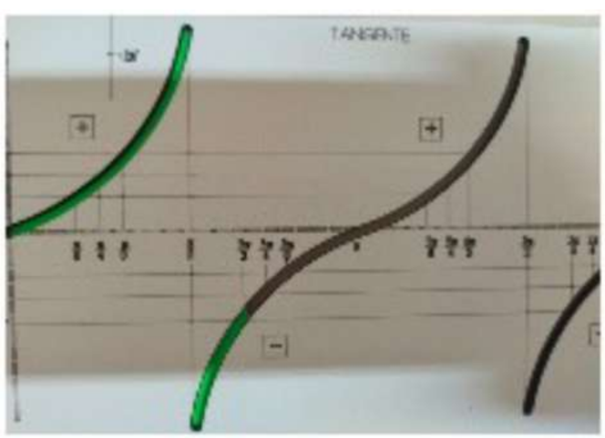
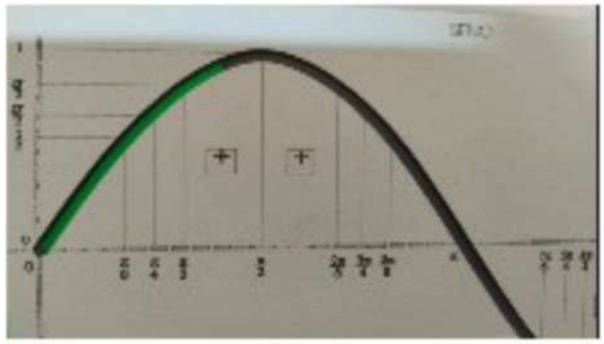
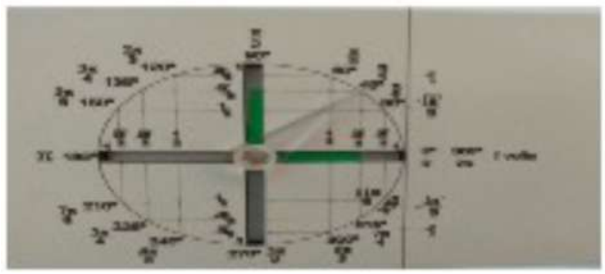


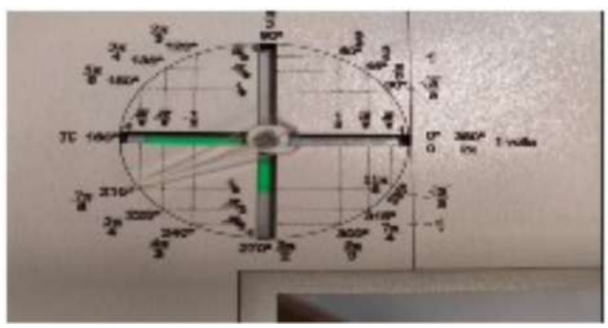
Fig. 75: Esboço da função seno











Mesas-redondas

Convivência nas escolas: o papel da escola, poder público e família

Blanco, Débora Gonzalez Costa[203]; Eiras, Norma Suely Siqueira[204]; Matsumoto, Ana Paula Borelli[205] e Micelli, Priscila Estevao[206]

Resumo: *Programa Conviva - SP Programa de Melhoria de Convivência Escolar cujo objetivo é promover e articular a participação ativa da família na vida escolar dos estudantes da rede de ensino estadual; articular e fortalecer a rede de proteção social no entorno da comunidade escolar, com aproximação entre os serviços de assistência e saúde mental. Parte-se do princípio de que um clima harmonioso, colaborativo e seguro contribui com a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem, razão de ser da escola. O Programa foi implementado atendendo as seguintes frentes: segurança nas escolas, psicólogo na educação, formação para vice-diretor e professor de orientação de convivência escolar. A escola conta ainda com o Protocolo de Segurança 179 que regulamenta as tomadas de ação em fase de problemas no interior das escolas. Na oportunidade, apresentaremos uma prática de desenvolvimento da temática em uma de nossas escolas.*

[203] Dirigente Regional de Ensino de São Carlos/Sp.
[204] Supervirsora de Ensino - Equipe Conviva.
[205] Professora Especialista em Currículo - Equipe Conviva.
[206] Vice-Diretora da Escola Sebastião de Oliveira Rocha.

Redesenhando os cursos de serviço de matemática na universidade[207]

Acker, Felipe[208]; Bortolossi, Humberto José [209]; V. Rohrer, Andrea[210] e Tomei, Carlos[211].

Resumo: *Durante a pandemia, encontros no Fórum de Pós Graduação de Matemática deixaram claro a necessidade de reconsiderar o ensino de matemática nos cursos universitários. Tanto os cursos de serviço (Cálculo, Álgebra Linear, Probabilidade, Estatística, Métodos Numéricos) quanto os cursos oferecidos no bacharelado precisam de atualização, em conteúdo e estratégias didáticas. As disciplinas não acompanharam novas demandas tecnológicas e estão cada vez mais distantes das demandas profissionais a quem se destinam.*

O programa dos encontros é motivado por duas fontes: os encontros no Forumppg e outro, em junho, que deu continuidade à reflexão sobre esses temas.

As três sessões da mesa tratam dos cursos de serviço, dos cursos do bacharelado, e da necessidade de interagir com novas formas de matemática aplicada. Cada sessão consta de apresentação de material, seguida que debate.

Palavras-chave: *Matemática na universidade, ensino, cursos de serviço, disciplinas.*

DESCRIÇÃO

Propõe-se uma dinâmica com 3 mesas redondas, com duração de 1h30min cada. Cada mesa redonda será composta por docentes convidados, além de um dos autores desta proposta. Após uma apresentações de cada membro da mesa, abre-se o debate. Cada mesa leva noventa minutos. As três mesas devem se concentrar nos seguintes temas.

1. Cursos de serviço;
2. Cursos do bacharelado;
3. Interação com outros departamentos técnico-científicos.

[207]Um encontro preparatório foi apoiado pela FAPERJ, Processo SEI-260003/011870/2023, Ref. Proc. E-26/210.372/2023

[208]Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM/UFRJ)
[209]Universidade Federal Fluminense (UFF)
[210]Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (IPRJ/UERJ)
[211]Depto. de Matemática, PUC-Rio. Este autor é apoiado por FAPERJ e CNPq

Introdução e Relevância do assunto

Boa parte da ciência de ponta utiliza métodos matemáticos que não frequentam nossas salas de aula. A tarefa não trivial de compreender o que está acontecendo, antecipar tendências e elaborar estratégias e projetos pedagógicos adequados deve ser uma preocupação de toda a comunidade matemática. Um esforço coletivo parece ser a única alternativa em um cenário em que a urgência já foi, simplesmente, esquecida.

Uma distribuição frequente de cursos de serviço para as engenharias nas universidades brasileiras consiste em quatro cursos de cálculo (a uma variável, a várias, os teoremas integrais e equações diferenciais), dois de álgebra linear (chegando a autovalores e o teorema espectral) e tópicos sortidos em análise numérica e probabilidade.

Partes desses conteúdos estão invariantes há décadas, desconsiderando as alterações dos interesses das várias engenharias e a disponibilidade de recursos computacionais. Como isso é possível? Uma das dificuldades a tratar é identificar as fontes dessa inércia.

A ciência e tecnologia modernas exigem cada vez mais matemática, que frequentemente é apresentada fora da égide dos departamentos de matemática. A atualização dos cursos de serviço deveriam acompanhar esses avanços (Song, 2019). Ainda assim, percebe-se um desinteresse por essa questão fundamental. Em particular, a falta de adequação entre conteúdos e o que se requer dos formandos no setor produtivo sugere que a universidade não honra um de seus compromissos com a sociedade. Comparar os cursos típicos de serviço das universidades brasileiras e internacionais é um exercício significativo: há outras coisas para aprender, de outras maneiras.

A demografia entre as engenharias mudou substancialmente também. Assim, por exemplo, há bem menos alunos para quem os teoremas integrais, fundamentais em eletromagnetismo ou mecânica de fluidos, são ainda relevantes. E, para todas as atividades voltadas para a computação e programação, a quase inexistência de matemática associada ao tempo discreto é, no mínimo, questionável.

Álgebra linear, num contexto em que manipulações de dados é cada vez mais importante, cresce em aplicabilidade. As soluções atuais muitas vezes transcendem os próprios departamentos de matemática: frequentemente os cursos de engenharia e de computação oferecem disciplinas de matemática com a especificidade que consideram conveniente, e a possibilidade de interação interdisciplinar é simplesmente obliterada.

Por outro lado, é difícil colher de outros departamentos uma lista de demandas que poderiam ser empregadas para estruturar os cursos de serviço. Um dos aspectos a considerar é a descrença na capacidade de atendimento das demandas por parte dos departamentos de matemática.

Tentativas isoladas nas universidades brasileiras precisam ser mais conhecidas, discutidas, divulgadas. Ao mesmo tempo, parece incontornável e inadiável o início de um processo profundo de autocrítica. Já lá se vão mais de três décadas desde que os computadores chegaram às nossas casas. No entanto, a matemática que fazemos e ensinamos apenas começa, timidamente, a incorporar os novos dados de realidade colocados pelo grande poder de processamento desde então disponível.

Aspectos pedagógicos são igualmente importantes. A qualidade dos alunos que entram na universidade (no Brasil, especialmente, em que faltam escolas técnicas e as contrapartidas dos *colleges*) introduz ondas de candidatos despreparados, cujas abundantes repetições muitas vezes não são sequer consideradas no projeto educacional universitário. Nesse contexto, Singh *et al.* [2] sugeriram que não é suficiente afirmar para a geração *Millennial* que matemática é importante. Precisamos engajá-la em seus processos de aprendizagem, para que deixem de ser estudantes passivos. Os autores postularam que o ensino deveria mover-se do "aprender as regras de operações"para "entender os conceitos matemáticos que promovem o pensamento matemático."Os cursos de matemática apresentam taxas de reprovação indicando o mau planejamento do projeto didático. A falta de adequação entre conteúdos e o que se requer dos formandos no setor produtivo desmotiva e sugere que, mais do que o próprio despreparo dos estudantes, pode ser a principal razão das altas taxas de reprovação.

A nacionalização dos concursos de acesso às universidades por meio do ENEM é uma componente a ser levada em consideração: um sistema de ensino superior de qualidade é a base para o estabelecimento de *startups* e empresas de grande porte com foco em tecnologia. Nas condições atuais, garantir que nossas instituições de ensino superior ofereçam formação matemática de alto nível colada às demandas tecnológicas presentes e futuras deixa de ser apenas um investimento em pesquisa básica para se tornar um fator decisivo para a atração de estudantes vocacionados e, portanto, para a própria economia.

Saber o que e como ensinar é uma evidência mínima de que conhecimento é relevante. O gigantesco mecanismo da educação superior, extremamente inercial, parece ter perdido a capacidade de revitalizar sua prática. No entanto, o grande prestígio da matemática se deve ao reconhecimento, por outras áreas, de seu papel fundamental como ferramenta (no dizer dos engenheiros) ou como linguagem (no dizer dos físicos). É preciso que a Matemática, que integra a formação básica de engenheiros, físicos, economistas e biólogos, seja por estes reconhecida como valiosa. A alternativa é ver-se descartada ou, mais provavelmente, simplesmente relegada como está já acontecendo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CANTORAL, Ricardo. Enseñanza de la Matemática en la Educación Superior. **Revista Electrónica Sinéctica**, 19, p. 3-27, 2001.

[2] SINGH, P.; SIAN HOON, T.; MD NASIR, N. A.; TAU HAN, C.; RAHMAN, N. A. Teaching and Learning of College Mathematics and Mathematical Thinking: Are the Lines of the Same Track?. **Asian Journal of University Education**, 12 (2), p. 65-78, 2016.

[3] SONG, Jiayou. How to Strengthen Mathematics Teaching in College Education. **Advances in Higher Education**, v. 3, Issue 2, p. 117-120, 2019.

Formação de formadores – O que devem conhecer os docentes que lecionam nos cursos de licenciatura em matemática?

de Souza, Maria do Carmo[212]; Giraldo, Victor Augusto[213]; Jorge, Grasiele Cristiane[214]; Santos, Viviane de Oliveira[215]; e Santos, Walcy[216]

Resumo: *Esta mesa redonda é iniciativa de colaboração entre diversas Sociedades envolvidas na área de matemática – SBM, SBEM, ANPMat, SBMAC, SBHMat. Levando em conta a importância estratégica e a urgência de valorização dos cursos de formação inicial de professores no Brasil, especialmente nas Instituições públicas de ensino superior, o objetivo desta mesa redonda é discutir como a participação de docentes com diferentes perfis acadêmicos pode ser fundamental para os cursos de Licenciatura em Matemática, reconhecidos como cursos com objetivos específicos de formação profissional e com personalidade própria. Em particular, buscamos superar dicotomizações comuns, como conteúdo e pedagogia, teoria e prática, escola e universidade.*

[212]Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
[213]Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
[214]Universidade Federal de São Paulo - UNIFESP
[215]Universidade Federal de Alagoas - UFAL (ANPMat)
[216]Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ

Matemática como ferramenta de inclusão: deficiência, acolhimento, gênero e diversidade

Baldin, Yuriko Yamamoto[217]; Esquincalha, Agnaldo[218]; Thiengo, Edmar Reis[219] e Nogueira, Clelia Ignatius[220]

Resumo: *Um dos grandes desafios da educação contemporânea tem sido a inclusão em ambiente escolar que implica o acolhimento dos estudantes, desde o nível elementar até o superior. A Mesa Redonda II busca discutir a Matemática, um dos pilares da educação escolar, como uma ferramenta para o estabelecimento de situações que favoreçam o acolhimento da diversidade de estudantes presentes em sala de aula, atendendo não apenas a aspectos legais, mas a demanda cada vez maior da sociedade, e que, ao mesmo tempo, proporcionem o acesso ao conhecimento matemático. Palestrantes especialistas no tema de Ensino de Ciências Exatas e Matemática, e em Formação de Professores de Matemática irão contribuir ao debate.*

[217]Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
[218]Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
[219]Instituto Federal do Espírito Santos - IFES
[220]Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE

Minicursos

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Funções geradoras e a contagem de matrizes (0,1) simétricas

Oliveira, Carlos Eduardo[221]; Oliveira Santos, José Plínio[222]

Resumo: *Este trabalho pretende apresentar uma resolução original para a solução do problema: quantas matrizes (0,1) (cujas entradas são todas iguais a 0 ou 1) simétricas de ordem n podem ser construídas com a restrição adicional de que a soma dos elementos de qualquer linha é fixada para cada inteiro* $0, 1, 2, \ldots, n$ *como por exemplo:*

- *Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem* 5 *podem ser construídas, de modo que a soma dos elementos de qualquer linha seja igual a 2?*
- *Quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem* 4 *podem ser construídas, de modo que* $s(1) = 2, s(2) = s(3) = 3$ *e* $s(4) = 4$*, onde* $s(i)$ *indica a soma dos elementos da linha* i*.*

A proposta de resolução deste problema envolve a utilização de funções geradoras, um conceito matemático de extrema importância e com diversas aplicações, mas pouco estudado em cursos superiores na área de matemática e ciências exatas. Neste sentido, a proposta do minicurso é, usando o problema das matrizes mencionado anteriormente, ensinar os conceitos de função geradora, mostrar suas aplicações elementares, seu potencial de estudo e, por fim, aplicar esses conceitos na resolução do problema proposto, cuja solução pode ser modelada por uma função geradora de n variáveis com expansão polinomial em que o coeficiente de $\prod_{i=1}^{n} x_i^{t_i}$, $t_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *expressa o número de matrizes em que a soma da linha* i *é igual a* t_i*.*

Palavras-chave: *Combinatória, função geradora, matrizes, contagem, teoria dos números.*

INTRODUÇÃO

O estudo das funções geradoras é fundamental em diversos campos da matemática e das ciências exatas aplicadas, sendo uma ferramenta poderosa e capaz de modelar e analisar uma ampla série de sequências. As funções geradoras são frequentemente utilizadas em análise combinatória, combinatória enumerativa, probabilidades, estatística, teoria dos números, teoria dos grafos e outras ramos da matemáticas. Elas podem oferecer uma estratégia elegante e eficaz de expressar sequências finitas ou infinitas de números ou eventos discretos, permitindo a simplificação e manipulação de problemas mais complexos. Além disso, as funções geradoras propiciam soluções analíticas para problemas que, de outra forma, seriam desafiadores de se estudar. Dessa forma, compreender e dominar as funções geradoras não apenas fortalece a base matemática, mas também abre portas para a resolução de uma variedade de problemas práticos em diversas áreas do conhecimento.

[221] Afiliação. IFSP
[222] Afiliação. Unicamp

FUNÇÕES GERADORAS

Dado um fenômeno discreto que possa ser descrito pela sequência $a_0, a_1, \ldots,$ dizemos que a função f é a função geradora desse fenômeno se f for da forma:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i.x^i$$

Um bom exemplo de aplicação dessa simples ideia pode ser visto através do problema: uma urna possui 3 bolas amarelas, 2 bolas brancas e 1 bola cinza. De quantas formas podemos retirar um grupo de n bolas dessa urna, onde $n = 0, 1, 2, \ldots, 6$?

Antes de proceder à função geradora, vamos tentar avaliar como podem se dar essas retiradas para alguns valores de n:

- se $n = 0$, existe apenas uma maneira de realizar a retirada, a saber, não retirando nada;
- se $n = 1$, as retiradas podem ser a,b,c, ou seja, existem 3 maneiras de realizar a retirada;
- se $n = 2$, as retiradas podem ser aa,bb,ab,ac,bc ou seja, existem 5 maneiras de realizar a retirada;

Não é complicado notar que, à medida em que aumentamos a quantidade de bolas a ser retirada, bem como a quantidade total de bolas da urna no início do problema, que nossa tarefa de contar por exaustão pode se tornar impraticável. Nesse caso, trabalhar com uma função geradora pode ser uma estratégia interessante.

Note que em uma retirada qualquer, a quantidade de bolas amarelas retiradas pode ser $0, 1, 2, 3,$ já que existem 3 bolas amarelas disponíveis na urna. Da mesma forma, as quantidades de bolas brancas pode ser $0, 1, 2$ e de bolas cinzas $0, 1$. Note também que a soma das quantidades de bolas amarelas, brancas e cinzas é o total de bolas retiradas. Assim, podemos lançar mão do princípio multiplicativo e controlar o aparecimento de bolas de uma determinada cor por um polinômio específico em que suas possíveis quantidades serão expressas no expoente como se segue:

- polinômio que controla o aparecimento das bolas amarelas $(1 + x + x^2 + x^3)$, note que $1 = x^0$ representa a situação em que não é sorteada nenhuma bola amarela;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas brancas $(1 + x + x^2)$;
- polinômio que controla o aparecimento das bolas cinzas $(1 + x)$

Ao multiplicarmos os três polinômios, obteremos todas as possíveis retiradas de bolas dessa urna:

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + x^3)}_{amarelas}\underbrace{(1 + x + x^2)}_{brancas}\underbrace{(1 + x)}_{cinzas} = x^6 + 3x^5 + 5x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1$$

APLICAÇÃO AO PROBLEMA PROPOSTO

O problema a ser resolvido com o auxílio das funções geradoras é: quantas matrizes (0,1) simétricas de ordem n podem ser construídas com a soma dos elementos de qualquer linha fixada para qualquer inteiro $0, 1, 2, \ldots, n$.

Para resolver o problema, vamos usar uma matriz de ordem 4 como fonte de observação e vamos nomear os elementos de suas linhas na forma de sequência x, y, z, w como se segue:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{bmatrix}$$

Como a matriz é simétrica, se "dobrarmos" a matriz em torno da sua diagonal principal, sobreporemos elementos que são obrigatoriamente iguais:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2y_1 & x_3z_1 & x_4w_1 \\ & y_2 & y_3z_2 & y_4w_2 \\ & & z_3 & z_4w_3 \\ & & & w_4 \end{bmatrix}$$

Ao notar que há apenas uma intersecção entre elementos de duas linhas distintas (que denotamos por x, y, z, w), fica evidente que a prevalência dos índices passa a ser desnecessária e vamos retirá-los, trabalhando com a matriz no formato:

$$\begin{bmatrix} x & xy & xz & xw \\ & y & yz & yw \\ & & z & zw \\ & & & w \end{bmatrix}$$

Por fim, podemos notar que cada entrada da matriz "dobrada" acima é igual a 0 ou 1. Essa afirmação é válida tanto para os elementos da diagonal principal que são "isolados", bem como para os demais que são "duplos" de mesmo valor, ou seja, ambos iguais a 0 ou ambos iguais a 1. Dessa forma, as 10 entradas dessa matriz são controladas individualmente pelas funções geradoras:

$$(1+x), (1+xy), (1+xz), (1+xw), (1+y), (1+yz), (1+yw), (1+z), (1+zw), (1+w)$$

Multiplicando as funções acima:

$$\begin{aligned} & (1+x).(1+xy).(1+xz).(1+xw).(1+y).(1+yz).(1+yw).(1+z).(1+zw).(1+w) \\ = \; & w^4x^4y^4z^4 + w^4x^4y^3z^4 + w^4x^3y^4z^4 + 2w^4x^3y^3z^4 + w^3x^4y^4z^4 + 2w^3x^4y^3z^4 \\ + \; & 2w^3x^3y^4z^4 + w^3x^2y^4z^4 + w^2x^4y^3z^4 + w^2x^3y^4z^4 + w^2x^2y^4z^4 + 3w^2x^3y^3z^4 + \\ + \; & \ldots + w^2x^2 + w^2x + w^2y + wx^2 + 2wx + 2wy + w + x + y + 1 \end{aligned}$$

A interpretação desse resultado nos mostra de maneira clara todas as quantidades de matrizes que podem ser construídas de acordo com as condições estabelecidas.

- Se $s(1) = s(2) = s(3) = s(4) = 4$, o termo $w^4x^4y^4z^4$, mostra que há apenas uma matriz com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se $s(1) = 2$, $s(2) = s(3) = 3$ e $s(4) = 4$, o termo $3w^2x^3y^3z^4$, mostra que há três matrizes com as condições específicas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] SANTOS, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida Pinheiro; MURARI, Idani Therezinha Colzalari. (2008) **Introdução à análise combinatória.** 1.ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

[2] ANDREWS, George Eyre (1976). **The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 2.** Cambridge University Press.

[3] GRIMALDI, Ralph Peter (2003). **Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction.** Pearson.

[4] STANLEY, Richard P. (1997). **Enumerative Combinatorics, Volume 1.** Cambridge University Press.

Análise complexa, séries de Fourier e translações de sequências

Um convite aos espaços vetoriais de funções holomorfas

Santos, Charles F.[223]

Resumo: *Considere o operador de translação à direita definido no espaço de Hilbert das sequências quadrado-somáveis de números complexos. O problema de determinar os subespaços fechados não triviais invariantes por este operador foi resolvido por Arne Beurling no final da década de 1940. A solução usa de maneira essencial o espaço de Hardy, formado por funções holomorfas no disco unitário. Este minicurso pretende introduzir o espaço de Hardy, usando como motivação o Teorema de Beurling. Com isto, pretende-se mostrar um exemplo de espaço de Hilbert não comumente apresentado nas disciplinas de análise funcional dos cursos de graduação e pós-graduação em matemática. Ainda, evidencia-se a beleza matemática de um problema cuja solução envolve necessariamente uma mudança de ponto de vista: um problema sobre sequências é resolvido pelo uso de funções holomorfas e séries de Fourier. Pessoas com conhecimentos de espaços métricos, funções de variável complexa e séries de Fourier devem ser capazes de seguir o minicurso. Conhecimentos de medida e integração e análise funcional facilitarão ainda mais a apreciação do conteúdo.*

Palavras-chave: *Espaços de Hilbert, funções holomorfas, séries de Fourier, sequências, números complexos.*

INTRODUÇÃO

A análise funcional tem sido um dos pilares da matemática pura e aplicada desde o início do século XX e um de seus conceitos mais importantes são os operadores lineares em espaços de Hilbert. Dado um operado em particular, a determinação explícita dos subespaços vetoriais (fechados) mantidos invariantes por este operador é um problema tipicamente difícil. A própria existência de subespaços invariantes não triviais (isto é, diferentes do subespaço nulo e de todo o espaço) para cada operador linear limitado em um espaço de Hilbert complexo separável de dimensão infinita, conhecida como o *Problema do Subespaço Invariante*, ainda está em aberto.

Este minicurso tem como meta a demonstração do Teorema de Beurling, que descreve os subespaços invariantes de um operador particular. Dado o espaço de sequências

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_{n=0}^{\infty} \,:\, a_n \in \mathbb{C} \ \forall n \geq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\},$$

[223]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo – ICMC/USP. Este autor foi apoiado pela Pró-Reitoria de Inclusão e Pertencimento da Universidade de São Paulo – PRIP/USP

definimos o operador *shift*, ou de translação à direita, $S : \ell^2 \to \ell^2$ por

$$S\left((a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)\right) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)\,.$$

Trata-se de um operador de fácil definição e quase sempre apresentado como exemplo ou em exercícios em cursos de análise funcional.

No entanto, a descrição dos subespaços invariantes de S exige a introdução de um espaço de funções holomorfas. Denotando por $\mathbb{D}$ o disco acerto do plano complexo centrado na origem e de raio 1, definimos o **espaço de Hardy** H^2 como o conjunto das funções holomorfas em $\mathbb{D}$ cuja série de potências em torno da origem gera uma sequência de coeficientes que pertence a ℓ^2. A associação entre cada sequência pertencente a ℓ^2 e a função dada pela correspondente série de potências estabelece uma bijeção entre ℓ^2 e H^2, que dá ao último uma estrutura de espaço de Hilbert separável.

Podemos identificar ainda cada elemento de H^2 com uma série de Fourier na forma complexa por meio da associação

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\longleftrightarrow\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}\,.$$

Isto permite enunciar uma propriedade fundamental dos elementos de H^2, que segue de um resultado provado por Fatou logo após Lebesgue apresentar sua teoria de integração.

Teorema 7.1 (Fatou) *Dada $f \in H^2$, a menos de um subconjunto de medida nula de $[0, 2\pi]$, sempre existe o limite radial*

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})\,.$$

Se $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é a série de potências de f em torno da origem, então $f^*(e^{i\theta})$ pode ser representada pela série de Fourier $f^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$.

O operador em H^2 que tem o efeito de transladar os coeficientes da série de potências para a direita é $S_{H^2} : H^2 \to H^2$ dado pela multiplicação pela variável independente:

$$S_{H^2} f(z) = z\, f(z)\,, \quad z \in \mathbb{D},\ f \in H^2\,.$$

Portanto, os subespaços invariantes de S em ℓ^2 podem ser identificados com os subespaços invariantes de S_{H^2} em H^2. Nosso principal resultado pode finalmente ser enunciado.

Teorema 7.2 (Beurling) *Os subespaços invariantes de S_{H^2} em H^2 são precisamente os conjuntos da forma*

$$\{\Theta \cdot f \;:\; f \in H^2\}\,,$$

onde $\Theta \in H^2$ e seus limites radiais satisfazem $|\Theta(e^{i\theta})|$ a menos de um subconjunto de medida nula em $[0, 2\pi]$.

PLANO DO MINICURSO

O minicurso será ministrado em estilo expositivo usual, sendo realizado em 3 aulas. Segue a divisão do conteúdo por aula.

- **Aula 1:** introdução do problema de encontrar os subespaços invariantes de S; introdução de H^2 e propriedades imediatas de seus elementos; identificação entre ℓ^2, H^2 e um espaço de funções dadas por séries de Fourier (subespaço fechado de L^2 do círculo unitário).
- **Aula 2:** representação integral de Poisson dos elementos de H^2; Teorema de Fatou, incluindo tanto quanto possível das ideias da demonstração.
- **Aula 3:** demonstração do Teorema de Beurling; fatoração canônica dos elementos de H^2 como corolário do Teorema de Beurling; caso o tempo permita, enunciado das expressões analíticas explícitas dos fatores da fatoração canônica.

Como já dito no resumo, assumiremos conhecimentos de espaços métricos e funções de variável complexa. Noções de séries de Fourier, espaços de Hilbert e de teoria da medida e integração serão introduzidas na medida do necessário, embora seu conhecimento prévio seja muito útil.

CONCLUSÕES

É visível a impossibilidade de enunciar o Teorema de Beurling puramente em termos de sequências. Assim, a introdução do espaço de Hardy se revela essencial e mostra como uma mudança de ponto de vista pode desbloquear avanços notáveis em problemas matemáticos desafiantes. O espaço H^2 é um exemplo muito pouco usual nas disciplinas de análise funcional, mas que levou a diversos desenvolvimentos em pesquisa ao longo dos últimos cem anos. Os espaços de funções holomorfas provêem frutíferas interações entre análise complexa, harmônica e funcional, sendo o Teorema de Beurling um forte exemplo.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUREN, P. L. **Theory of H^p Spaces**. New York: Academic Press, 1970.

[2] HELSON, H. **Lectures on Invariant Subspaces**. New York: Academic Press, 1964.

[3] MARTÍNEZ-AVENDAÑO, R., ROSENTHAL, P. **An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space**. New York: Springer, 2007.

Uma introdução de bolso de jogos topológicos

Andrade Lara, Dione[224]

Resumo: *Neste minicurso veremos algumas propriedades topológicas através de outra abordagem conhecida como jogos topológicos. Esta técnica, além de representar propriedades topológicas, em alguns contextos serve como generalização de propriedades.*

No primeiro dia, vamos rever algumas propriedades básicas de espaços topológicos, e no segundo dia, daremos alguns exemplos de jogos topológicos básicos, e algumas aplicações.

Palavras-chave: *Jogos topológicos, Menger, Oxtobi, Rothberger, topologia.*

INTRODUÇÃO

Vamos fixar algumas notações comuns na área de topologia geral. Daqui em diante vamos denotar $\mathbb{N}$ por ω que representa o primeiro ordinal e numerável. Defina X^Y como o conjunto de todas as funções $f : Y \to X$ podemos ver X^Y também como $X \times X \times X \times \cdots$ ($|Y|$ vezes). Daí $\omega^\omega = \{f | f : \omega \to \omega\}$. Se considerarmos $n = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ podemos definir $2^\omega = \{f | f : \omega \to 2 = \{0, 1\}\}$ e $\omega^n = \{f | f : n = \{0, ..., n-1\} \to \omega\}$. Seja $X^{<\omega} = \bigcup_{n \in \omega} X^n$ o conjunto dado pelas funções finitas $f : n \to X$, com $n \in \omega$.

Exemplos de Jogos topológicos

Para os exemplos de jogos topológicos que apresentaremos, considere dois jogadores, que indicaremos como Jogador I e Jogador II. O nosso "tabuleiro" será um espaço topológico (X, τ) e o Jogador I e II poderão jogar (dependendo do jogo) pontos, abertos, coberturas abertas etc. Os jogos topológicos que iremos abordar terão uma quantidade infinita enumerável de rodadas[225]. Depois de todas as rodadas existe uma regra que determina quem vence.

Jogo de Banach-Mazur

Jogo de Banach-Mazur $BM(X)$**:** Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio. Vamos definir o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga um aberto não vazio A_0 e o Jogador II

[224] ICTIN - UFLA

[225] Existem jogos com uma quantidade não enumerável de rodadas

responde com um aberto não vazio $B_0 \subset A_0$. Na próxima rodada, o Jogador I joga, novamente, um aberto não vazio $A_1 \subset B_0$ e o Jogador II responde com um aberto não vazio $B_1 \subset A_1$. E assim por diante. Depois de terminar a partida teremos $A_0 \supset B_0 \supset A_0 \supset B_0 \supset \cdots$. O Jogador II vence no jogo de Banach-Mazur's se $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} B_n \neq \emptyset$.

Observe que o jogador II vence em $BM(\mathbb{R})$ e $BM(\mathbb{N})$ e o Jogador I vence em $BM(\mathbb{Q})$. Para verificar que I vence em $BM(\mathbb{Q})$ considere o seguinte jogo: O jogador I começa jogando $A_0 = \mathbb{Q}$ e II escolhe $B_0 \subset A_0$ Então, o Jogador I responde com $A_1 = B_0 \setminus \{x_0\}$ com $x_0 \in B_0$. Na $n+1$-ésima rodada, o Jogador I responde $A_{n+1} = B_n \setminus \{x_n\}$ com $x_n \in B_n$. Então $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega} B_n = \emptyset$.

Nestes jogos, definimos o conceito de estratégia[226]. De maneira intuitiva, uma estratégia vencedora para o Jogador I é um conjunto de respostas para as jogadas do Jogador II que garante a vitória do Jogador I (de maneira análoga definimos estratégia vencedora para o Jogador II). Vamos usar a notação I $\uparrow BM(X)$ para representar "Jogador I possui estratégia vencedora em $BM(X)$" (assim como II $\uparrow BM(X)$ representa "Jogador II possui estratégia vencedora em $BM(X)$") e a notação I $\not\uparrow BM(X)$ representa que "Jogador I não possui estratégia vencedora em $BM(X)$ (de maneira similar II $\uparrow BM(X)$ representa "Jogador II não possui uma estratégia vencedora em $BM(X)$").

O jogo de Banach-Mazur nos proporciona uma outra maneira de enxergarmos um espaço de Baire.

Teorema 7.3 ***(Teorema de Oxtoby)*** *O espaço X é de Baire*[227] *se, e somente, se o Jogador I não possui uma estratégia vencedora.*

Jogo de Rothberger

Jogo de Rothberger $R(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio e seja $\mathcal{O}$ o conjunto das coberturas abertas de X. Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um aberto $A_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n-ésima rodada, o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com $A_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence o Jogo de Rothberger se $\{A_n : n \in \omega\} \in \mathcal{O}$.

Definição 7.1 *Dizemos que X é um espaço de* ***Rothberger*** *se o Jogador I não possui estratégia vencedora em $R(X)$. Note que II $\uparrow R(X)$ implica que I $\not\uparrow R(X)$.*

Observe que:

- Se X não é de Lindelöf então I $\uparrow R(X)$. Basta que o Jogador I jogue somente a mesma cobertura.
- Se X é um espaço topológico enumerável então II $\uparrow R(X)$. Seja $X = \{x_n : n \in \omega\}$ uma enumeração dos elementos de X. O Jogador I começa jogando $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_0 \in \mathcal{C}_0$ com $x_0 \in A_0$. Na n-ésima rodada o Jogador I joga $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}_n$ com $x_0 \in A_0$. Então $\{A_n : n \in \omega\}$ cobre X e graças a isso o Jogador II vence.
- Se II $\uparrow R(X)$ então X é um espaço de Lindelöf. Seja $\mathcal{C}$ uma cobertura aberta para X e suponha que o Jogador I joga a mesma cobertura $\mathcal{C}$ a cada jogada. Então, na n-ésima rodada o Jogador I joga $\mathcal{C}$ e o Jogador II escolhe $A_n \in \mathcal{C}$ então $\{A_n :\in \omega\}$ é uma sub-cobertura enumerável de $\mathcal{C}$.

[226] Fique a vontade para dizer "estratégia" em diversos idiomas.

[227] Chamamos (X, τ) de **espaço de Baire** se toda intersecção de abertos densos é densa em X.

Apesar de todos os espaços em que II $\uparrow R(X)$ serem de Lindelöf existe um espaço compacto em que I $\uparrow R(X)$. À saber 2^ω.

Proposição 7.1 2^ω *é um espaço compacto, mas não é de Rothberger. Em outras palavras, o Jogador I possui uma estratégia vencedora.*

Jogo de Menger

Jogo de Menger $M(X)$: Seja (X, τ) um espaço topológico não vazio. Definimos o seguinte jogo: Na primeira rodada o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_0 \in \mathcal{C}_0$. Na n-ésima rodada , o Jogador I joga uma cobertura aberta $\mathcal{C}_n \in \mathcal{O}$ e o Jogador II responde com um subconjunto finito $F_n \in \mathcal{C}_n$. O Jogador II vence no Jogo de Menger se $\bigcup_{n\in\omega} F_n \in \mathcal{O}$.

Proposição 7.2 *Se X é um espaço compacto então II $\uparrow M(X)$, logo X é um espaço de Menger.*

Por essa última proposição, concluímos que se X é de Menger isso não implica que X seja um espaço de Rothberger. Por exemplo $X = 2^\omega$.

Proposição 7.3 *Existe um espaço de Lindelöf que não é de Menger. À saber, ω^ω.*

BIBLIOGRAFIA

[1] AURICHI, L. F.; DIAS, R. R. Topological games and alster spaces. **Canadian Mathematical Bulletin**, 57(4), 2014.

[2] ENGELKING, R. General topology. **Sigma series in pure mathematics.**, Heldermann Verlag, 1989.

[3] LARA, D. A. Ordens Parciais e Aplicações. **Dissertação de Mestrado.**, ICMC-USP São Carlos, 2012.

Integração do século XXI

A integral de Henstock-Kurzweil

Andrade da Silva, Fernanda[228]; da Silva, Márcia R.[229]

Resumo: *Sendo o carro-chefe da análise moderna, a integral é sem dúvida uma das peças mais familiares do Cálculo. Mas a integral com a qual a maioria está familiarizada, a integral de Riemann, é na verdade apenas uma entre várias. Neste minicurso, iremos expor uma teorema relativamente nova da integral, conhecida como integral de Henstock-Kurzweil.*

Palavras-chave: *Integral de Riemann, integral de Henstock-Kurzweil.*

Carga Horária: *4h (2 × 2h).*

INTRODUÇÃO

A noção de derivada já era conhecida antes de Isaac Newton e Gottfried Leibniz. A esses dois matemáticos é atribuída a invenção do Cálculo por volta de 1670. Para Newton, o processo de integração era amplamente visto como um inverso à operação de diferenciação, e a integral era sinônimo da antiderivada. Por volta de 1850, uma nova abordagem surgiu na obra de Augustin-Louis Cauchy e logo depois na obra de Georg Riemann. Eles acreditavam que a integral definida poderia ser interpretada como a área sob curvas contínuas, e poderia ser obtida pela soma de uma série infinita de áreas correspondentes a retângulos aproximados de largura infinitamente pequena, o que torna esta definição de integral, conhecida como Integral de Riemann, independente da derivada.

A teoria da integral de Riemann possui algumas limitações. Em primeiro lugar, a classe das funções limitadas Riemann integráveis restringe-se a funções com uma quantidade enumerável de descontinuidades e nem toda derivada é Riemann integrável. Assim, muitas funções importantes não têm uma integral de Riemann, mesmo depois de estendermos ligeiramente a classe de funções integráveis, permitindo integrais de Riemann "impróprias". Além disso, mesmo para funções integráveis, é arduo provar bons teoremas de convergência usando apenas as ferramentas normalmente associadas às integrais de Riemann. Por exemplo, o limite pontual de funções Riemann integráveis não é necessariamente integrável neste sentido. Para superar estas deficiências, Henri Lebesgue propôs uma nova noção de integração, conhecida como integral de Lebesgue. Esta integral é estritamente mais geral do que a integral de Riemann, ou seja, pode-se integrar uma classe maior de funções. Contudo, ao comparar a integral imprópria de Riemann com a integral de Lebesgue, descobrimos que nenhuma é estritamente mais geral que a outra. Ademais, o método de Lebesgue é

[228] Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) da Universidade de São Paulo, `ffeandrade@usp.br`
[229] Centro de Ciências da Natureza (CCN) da Universidade Federal de São Carlos, Campus Lagoa do Sino, `marciars@ufscar.br`

complexo e é necessário uma quantidade considerável de Teoria da Medida até mesmo para definir sua integral.

Nem a integral imprópria de Riemann nem a integral de Lebesgue geraram uma construção totalmente satisfatória de antiderivadas. Noções um pouco mais gerais de integral foram fornecidas por Arnaud Denjoy (1912) e Oskar Perron (1914). Entretando, suas definições revelaram-se equivalentes.

Décadas mais tarde, de forma independente, Ralph Henstock (1955) e Jaroslav Kurzweil (1957) criaram uma formulação muito mais simples da integral de Denjoy-Perron. Em sua definição, a abordagem intuitiva da integral de Riemann é preservada, mas ao contrário da integral de Riemann que considera partições marcadas de um intervalo com subintervalos cujos comprimentos são limitados por uma constante fixa, Henstock e Kurzweil usaram uma função estritamente positiva δ (chamada calibre) para medir o comprimento de cada subintervalo, ou seja, o comprimento máximo dos subintervalos pode variar. Ao fazer este pequeno ajuste, descobriu-se que a sua integral também superou algumas das limitações da integral de Riemann, em particular, toda função derivável é integrável. Além disso, a integral de Kurzweil e Henstock nos permite lidar com integrandos que são altamente oscilantes e apresentam uma quantidade não enumerável de descontinuidades.

A integral de Kurzweil e Henstock também é conhecida por vários nomes: integral de Henstock-Kurzweil, integral generalizada de Riemann, integral de Perron e, devido à sua definição, também é chamada de integral de calibre. Por ser uma integral consideravelmente mais simples do que a integral de Lebesgue e por englobar as integrais de Riemann, Newton e até mesmo a de Lebesgue, o interesse por esta integral tem aumentado nas últimas décadas, e alguns matemáticos até defendem que devemos ensinar a integral de Henstock-Kurzweil ao lado ou no lugar da integral de Riemann ou da integral de Lebesgue.

OBJETIVO

O objetivo deste minicurso é apresentar de modo geral, porém simples, o conceito e as principais propriedades da Integral de Henstock-Kurzweil.

EMENTA

1. Motivação e Definição
2. Propriedades Básicas da Integral de Henstock-Kurzweil
3. Teorema Fundamental do Cálculo
4. Teoremas de Convergência

CONCLUSÃO

Com o avanço do Cálculo, notou-se que a Teoria da Integral de Riemann possui algumas limitações. Assim, no final do século XIX, muitos matemáticos tentaram remediar alguns dos defeitos desta integral. Acreditamos que a integral de Henstock-Kurzweil fornece uma boa base para a teoria da integração. Uma das virtudes deste minicurso é que nenhuma teoria de medida é necessária. O únicos pré-requisito é que o ouvinte tenha uma boa compreensão dos “epsilons” e “deltas” argumentos comuns no primeiro curso em Análise Real.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bartle, R. G. *A Modern Theory of Integrations*. Graduate Studies in Methematics, Vol. 32, American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 2001.

[2] Henstock, R. *The General Theory of Integration*. Oford Mathematical Monographs, 2.ed, 1991.

[3] McLeod, R. M. *The Generalized Riemann Integral*. The Mathematical Association of America. 1980.

[4] McShane, E. J. *Integration*. Princeton University Press, 1947.

Explorando a combinatória e a probabilidade

Descobrindo a beleza de problemas clássicos e suas soluções

Viana, Fernando Cesar[230]

Resumo: *A Combinatória e a Probabilidade são pilares essenciais da matemática, enriquecidos por suas aplicações práticas e relevância no cotidiano. Esta apresentação se dedica a uma exploração meticulosa de alguns dos problemas mais emblemáticos e surpreendentes nestes campos, destacando tanto a beleza de seus enunciados quanto pela inovação de suas soluções. Abrangendo desde o histórico Teorema das Quatro Cores, que desafia a coloração de mapas, até o intrigante Problema da Agulha de Buffon, que estabelece uma ponte entre a geometria e a probabilidade, o minicurso explora a riqueza e diversidade da matemática. Também serão discutidos o Paradoxo de Monty Hall, que desafia nossa intuição probabilística, o clássico Problema das Pontes de Königsberg, fundamental na teoria dos grafos e o Problema da Caixa de Bertrand que destaca a importância da informação condicional na probabilidade. Adicionalmente, serão abordados o Paradoxo dos Aniversários, demonstrando as peculiaridades da probabilidade em eventos cotidianos, e o Problema da Secretária Desatenta, que ilustra conceitos de permutações e combinações. O histórico Problema da Divisão dos Pontos, surgido da correspondência entre Pascal e Fermat, e o Dilema dos Prisioneiros, um estudo central em teoria dos jogos, também serão explorados para enfatizar a aplicabilidade da matemática em situações de decisão e estratégia.*

Palavras-chave: *Combinatória, Probabilidade, Paradoxo e Contraintuitivo*

[230]Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

A geometria diferencial das cúpulas:

Da arquitetura ocidental antiga às construções indígenas brasileiras

Spindola, Flausino[231]

Resumo: *Neste minicurso, utilizamos a arquitetura dos grandes centros urbanos para motivar a aprendizagem do cálculo e da geometria diferencial. Abordamos os conceitos da geometria de curvas e de superfícies de modo que história, geografia, arquitetura, engenharia civil e demais áreas do conhecimento estejam presentes. Além disso, é apresentado o conhecimento construtivo tradicional dos povos indígenas do alto Xingu, que na construção da habitação maloca, efetuam estrutura a qual se aproxima da mesma apresentada por Monge para a configuração principal do elipsoide triaxial.*

Palavras-chave: *Elipsoide de Monge, geometria diferencial, linhas de curvatura, arquitetura Vernacular, ensino de geometria.*

INTRODUÇÃO

A motivação para o ensino de matemática não é simples. Porém, nem sempre reparamos que, para o ensino de geometria se tornar atrativo, o segredo pode estar em olhar para o horizonte com um olhar peculiar.

Nas obras de arquitetos como Oscar Niemeyer, Lucio Costa, Lina Bo Bardi, Le Corbusier, podemos observar o que chamamos de cascas de concreto armado, onde a espessura pode ser considerada desprezível, e portanto podem ser utilizadas em grandes vãos sem apoios intermediários. A observação do espaço urbano pode ser, portanto, uma imersão visual e estímulo à aprendizagem da geometria de superfícies.

Fig. 76: Oca no Parque Ibirapuera (SP), à esquerda. Congresso Nacional (DF), à direita.

[231]Universidade Federal do Maranhão

A Geometria das Cúpulas

Na Figura 77, ilustramos o modelo tridimensional da primeira construção em formato de abóbada que se tem notícia, o tesouro de Atreu (sec XIII a.C). Nesta figura ilustramos também o batistério de San Giovanni (1152), coberto por uma cúpula de 54,86m de altura e circunferência de 107,24m, a maior construção do gênero na Itália.

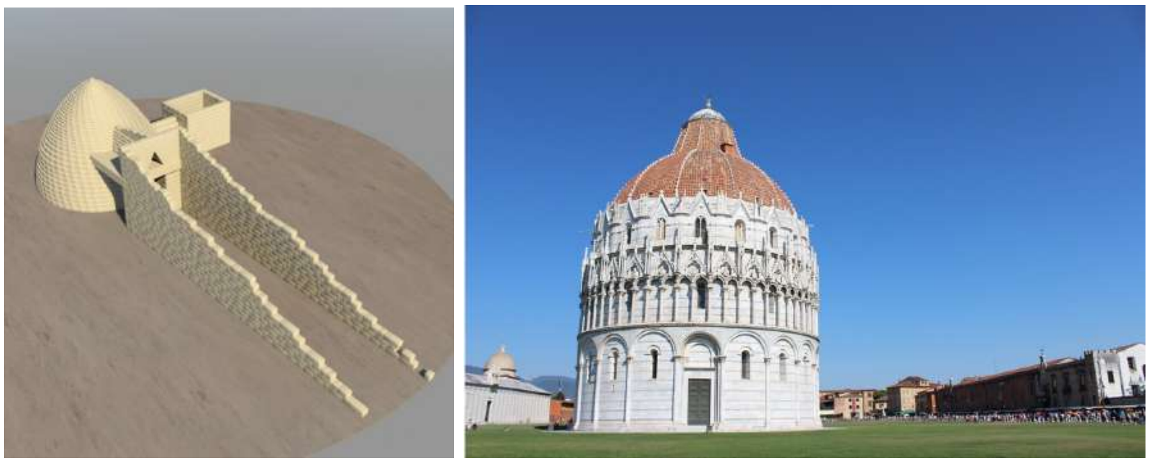


Fig. 77: Modelo 3D do Tesouro de Atreu, a esquerda, e Batistério de Pisa, a direita.

Se analisarmos as cúpulas de igrejas e palácios da europa medieval ou do renascimento vamos verificar abóbadas, em geral, em formato semi-esférico ou formato de semi-elipsoide de revolução. A equação geral da quádrica elipsoide é conhecida dos cursos de geometria analítica:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

onde $a, b, c \neq 0$. No caso em que todos os parâmetros a, b, c são iguais, temos uma esfera. No caso em que dois são iguais e um diferente temos o caso elipsoide de revolução e, no caso em que $a \neq b \neq c$ e $a \neq c$, temos o caso do elipsoide triaxial ou *Elipsoide de Monge*.

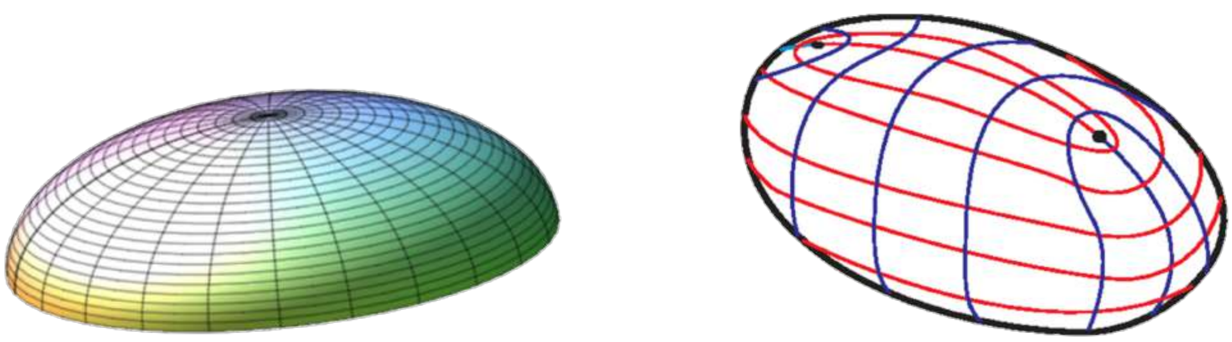


Fig. 78: Semi-elipsoide de revolução, à direita. Elipsoide de Monge, à esquerda.

Gaspard Monge (1746 - 1818) utilizou o modelo do elipsoide de três eixos distintos no projeto da cúpula do prédio do Parlamento da Revolução Francesa Este projeto não foi concretizado à época por limitações técnicas, de modo que ilustramos, na Figura 80, os projetos arquitetônicos:

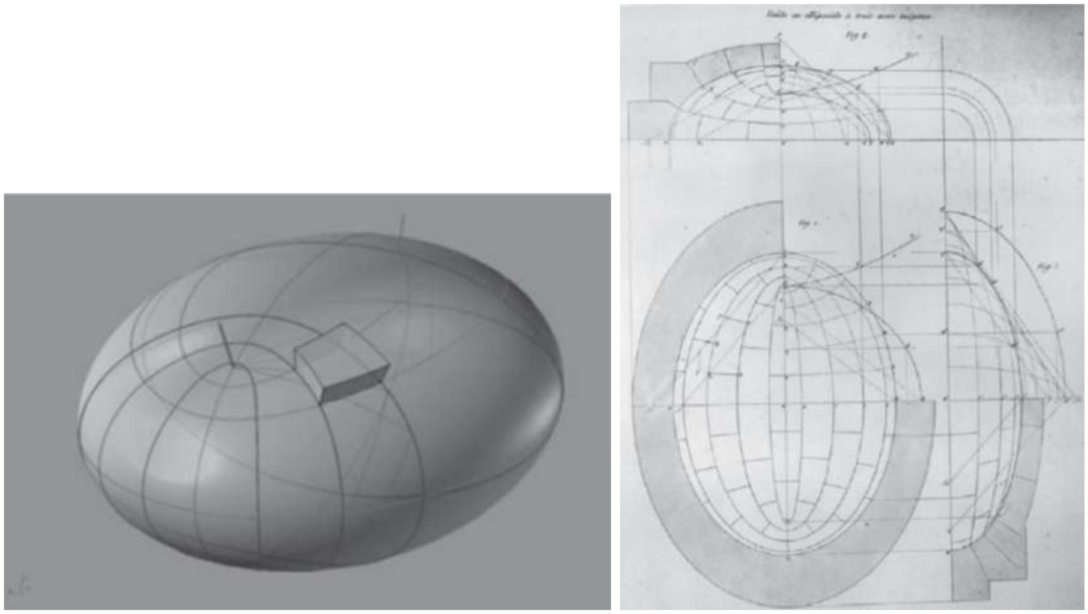


Fig. 79: Projeto de construção da cúpula elipsoidal

No elipsoide de Monge, da Figura 78, esquerda as linhas em vermelho e azul são chamadas linhas de curvatura e os pontos preto (que totalizam quatro), são chamados pontos umbílicos. O conjunto destas linhas com os pontos umbílicos em uma superfície formam a *Configuração Principal* de uma superfície .Estas linhas são determinadas pela *equação diferencial das linhas de curvatura*. No caso do problema construtivo da Figura 79, a solução ótima para o encaixe das pedras se dá exatamente pela obtida na resolução da equação das linhas de curvatura para o elipsoide triaxial.

Em análise de imagens de habitações indígenas de povos do alto Xingu, constatamos que na construção das malocas de planta baixa elipsoidal, a estrutura de sustentação da cúpula se aproxima da ideia abstrata de um elipsoide. [1]. Trazemos portanto uma releitura das habitações indígenas, e da forma como podem contribuir à aprendizagem de geometria diferencial.

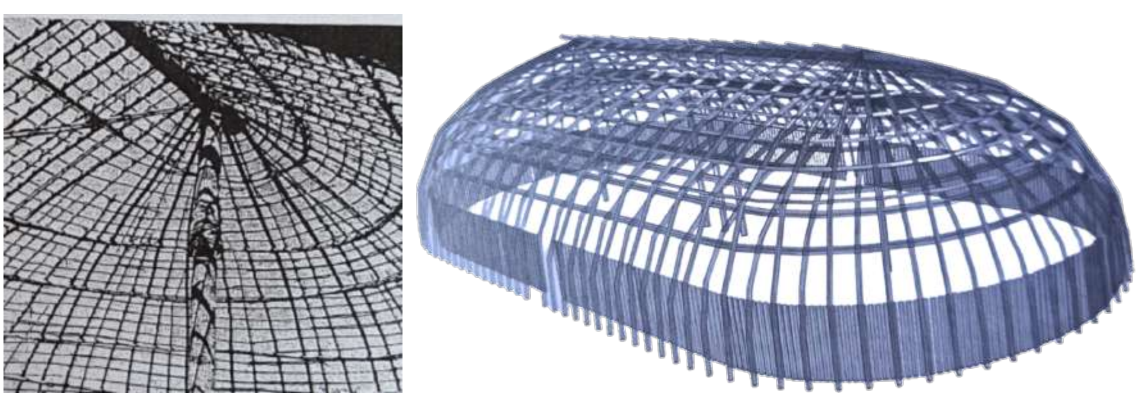


Fig. 80: A esquerda a casa Yawalapiti, e a direita maquete 3d da casa Kamayurá

BIBLIOGRAFIA

[1] PORTOCARRERO, J. Tecnologia Indígena em Mato Grosso: Habitação. Entrelinhas. 2018

[2] SOTOMAYOR, J. O elipsoide de Monge. Matemática Universitária. 15(1993) pp 33-47.

Dízimas periódicas e o teorema de Etiénne Midy

Dízimas periódicas, seus períodos e seus comprimentos

Sampaio, João Carlos Vieira[232]

Resumo: *Ao explorar dízimas periódicas surge a pergunta sobre como determinar o comprimento (número de dígitos) do período da dízima periódica sem que conheçamos quais são os dígitos da dízima. Isto é possível com o uso de congruências módulo m, um conceito a ser revisado brevemente no minicurso. Por exemplo, a dízima periódica de fração geratriz $1/31$ terá comprimento 15 porque $10^{15} \equiv 1 \pmod{31}$, e 15 é o primeiro inteiro positivo ℓ tal que $10^{\ell} \equiv 1 \pmod{31}$. Dentre outras propriedades de dízimas periódicas a serem exploradas neste minicurso, temos o teorema de Etiénne Midy [2, 5], que em 1835 demonstrou que considerando-se por exemplo $1/7 = 0,\overline{142857}$, temos $142 + 857 = 999$, esta soma sendo um número formado por uma sequência de noves, e que esta propriedade também é válida para todas as frações irredutíveis n/p, em que o denominador p é primo, $p \geq 7$, e a dízima periódica correspondente se subdivide em dois blocos. Brian Ginsberg [2] chamou a atenção para o fato de que, considerando-se $1/7 = 0,\overline{142857}$, temos $14 + 28 + 57 = 99$, ainda um número formado por uma sequência de noves, e que esta propriedade é válida para frações $1/p$ em que o denominador p é primo e o período da dízima pode ser subdividido em três blocos.*

Palavras-chave: *Dízimas periódicas, comprimento de uma dízima, teorema de Midy.*

INTRODUÇÃO

A ideia para este minicurso surgiu a partir de uma indagação de alunos do curso *Introdução à Análise para Licenciandos*, do curso de Licenciatura em Matemática da UFSCar, quando o autor o lecionava nos anos 2015 e 2016: como determinar o comprimento do período de uma dízima periódica, antes de levar a termo o cálculo aritmético da dízima pelo tradicional algoritmo da longa divisão na chave?

Usaremos a notação $a_1a_2\ldots a_n$ (bem como outras similares), para denotar um inteiro positivo descrito no sistema decimal posicional por seus dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, isto é, $a_1a_2\ldots a_n = a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n$. Tal como na literatura de matemática elementar sobre dízimas periódicas, temos a notação no sistema decimal fracionário $0,\overline{d_1\ldots d_\ell} = 0,d_1\ldots d_\ell\, d_1\ldots d_\ell\, d_1\ldots d_\ell\ldots$. O número real $0,\overline{d_1\ldots d_\ell}$ é chamado de *dízima periódica simples*.

[232]Departamento de Matemática. CCET–UFSCar.

Como sabemos, $0,\overline{d_1 \dots d_\ell} = \dfrac{d_1 \dots d_\ell}{\underbrace{99\dots9}_{\ell \text{ dígitos}}} = \dfrac{d_1 \dots d_\ell}{10^\ell - 1}$. Esta última fração de inteiros positivos é chamada *geratriz da dízima periódica.*

Também temos dízimas periódicas compostas, da forma $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m\overline{d_1 \dots d_\ell} = a_1 \dots a_n + \dfrac{b_1 \dots b_m}{10^m} + \dfrac{d_1 \dots d_\ell}{10^m(10^\ell - 1)} = \dfrac{a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m d_1 \dots d_\ell - a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m}{\underbrace{99\dots9}_{\ell \text{ dígitos}}\underbrace{00\dots0}_{m \text{ dígitos}}}$.

Na expressão $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_m\overline{d_1 \dots d_\ell}$, dizemos que $b_1 \dots b_m$ é a *parte não periódica* da dizima. Em ambos os casos de dízimas periódicas chamaremos o inteiro $d_1 \dots d_\ell$ de parte periódica (ou período) da dízima, sendo seu comprimento igual a ℓ quando este for o menor possível. É possível determinar o comprimento ℓ de uma dízima periódica a partir de sua fração geratriz, sem ter que visualizar a dízima periódica resultante? A resposta a esta pergunta é afirmativa e será objeto de estudo deste minicurso.

O COMPRIMENTO ℓ DE UMA DÍZIMA PERIÓDICA

Uma referência base para esta seção é Childs [1]. Uma fração de inteiros positivos a/b é uma fração *própria* se $0 < a/b < 1$, e *está na forma irredutível* quando $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$.

Proposição 7.4 *Se a fração própria de inteiros positivos a/b está na forma irredutível, e* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*, $b \geq 3$, então* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{d_1 \dots d_\ell}{\underbrace{99\dots9}_{\ell \text{ dígitos}}} = 0,\overline{d_1 \dots d_\ell}$ *para algum inteiro positivo $d_1 d_2 \dots d_\ell$.*

Sendo ℓ o menor inteiro positivo nas condições da proposição 7.4, dizemos que a representação decimal $0,\overline{d_1 \dots d_\ell}$ é uma dízima periódica simples, com *período* sendo o inteiro positivo $d_1 \dots d_\ell$, sendo ℓ o comprimento do período.

Proposição 7.5 *Sejam m, n inteiros não negativos, $a \geq 1$ e $b \geq 3$ inteiros com* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*. Se a fração* $\dfrac{a}{2^m \cdot 5^n \cdot b}$ *está na forma irredutível então sua dízima periódica (simples ou composta) tem comprimento $\ell = \ell(b)$, sendo $\ell = \ell(b)$ o primeiro inteiro positivo satisfazendo* $10^\ell \equiv 1 \pmod b$*. Tal inteiro ℓ também é chamado* ordem de 10 módulo b*. A existência de um tal inteiro ℓ é consequência de que* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*.*

Tendo em vista a proposição 7.5 podemos restringir nosso estudo a frações próprias e irredutíveis a/b com $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$. Da teoria dos números temos a função ϕ de Euler (função totiente), $\phi\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, definida por $\phi(b) = \#\{m \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{mdc}(m, b) = 1\}$. Aqui $\mathbb{N}^*$ é o conjunto dos inteiros positivos e $\#$ denota número de elementos. Da literatura da teoria dos números [3] temos: se $p \geq 2$ é primo então $\phi(p) = p - 1$; se $p \geq 2$ é primo e n é inteiro positivo, $n \geq 2$, então $\phi(p^n) = p^n - p^{n-1}$; se a e b são inteiros positivos, primos entre si, então $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$; (**Teorema de Euler-Fermat**) sendo b um inteiro positivo, se $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$ então $10^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod b$.

Proposição 7.6 *Seja b um inteiro positivo, $b \geq 3$, com* $\mathrm{mdc}(b, 10) = 1$*. O comprimento $\ell = \ell(b)$ é um divisor de $\phi(b)$. Se b é primo, $b \neq 5$, então ℓ é um divisor de $b - 1$.*

Consideremos o problema de calcular o comprimento da dízima periódica de fração geratriz $1/83$. Temos $\mathrm{mdc}(83, 10) = 1$ e, como 83 é primo, $\phi(83) = 83 - 1 = 82 = 2 \cdot 41$. O conjunto dos divisores de positivos 82 é $D(82) = \{1, 2, 41, 82\}$, e $\ell = \ell(83)$ será um desses divisores. Pela proposição 7.5, ℓ é o primeiro inteiro positivo satisfazendo $10^{\ell} \equiv 1 \pmod{83}$. Pelo Teorema de Euler-Fermat, temos $10^{82} \equiv 1 \pmod{83}$. Usando a calculadora científica do computador calculamos `10^41 mod 83` obtendo 1 como resultado. Em seguida calculamos `10^2 mod 83` obtendo 17. Assim sendo $\ell(83) = 41$, ou seja, a dízima periódica de $1/83$ terá 41 dígitos. Podemos apreciá-la pelo site Wolfram Alpha [6]: $0,01204819277108433734939759036144578313253\,0120481927710843373493 9\ldots$ tendo a revelação $1/83 = 0,\overline{01204819277108433734939759036144578313253}$.

Dentre outras propriedades de dízimas a serem exploradas no minicurso destacamos as duas seguintes.

Proposição 7.7 (Midy, 1835) *Se a fração própria de inteiros positivos a/b está na forma irredutível, e b é um primo, $b \geq 7$, com $\ell(b) = 2n$, e $a/b = 0, d_1 \ldots d_n d_{n+1} \ldots d_{2n}$, então $d_1 \ldots d_n + d_{n+1} \ldots d_{2n} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$.*

Proposição 7.8 (Ginsberg, 2004) *Se p é inteiro positivo primo, $p \geq 7$, com $\ell(p) = 3n$, $n \geq 1$, sendo $1/p = 0, d_1 \ldots d_n d_{n+1} \ldots d_{2n} d_{2n+1} \ldots d_{3n}$, então $d_1 \ldots d_n + d_{n+1} \ldots d_{2n} + d_{2n+1} \ldots d_{3n} = \underbrace{99\ldots9}_{n \text{ dígitos}} = 10^n - 1$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] CHILDS, LINDSAY. **A concrete introduction to higher algebra**. 1st ed. New York: (UTM) Springer-Verlag, 1979.

[2] GINSBERG, BRIAN D. **Midy's (nearly) secret theorem – an extension after 165 years**. College Math J. 35 (2004) 26-30. doi:10.2307/4146879.

[3] HEFEZ, ABRAMO. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4] LIMA, ELON LAGES. **Números e funções reais**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[5] MIDY, E. **De quelques propriètès de nombres et des fractions décimales periodiques**. Disponível em `https://archive.org/details/1014596483`. Acesso em 4/03/2024.

[6] `https://www.wolframalpha.com/` Acesso em 11/03/2024.

Uma breve introdução à teoria de regularidade elíptica e problemas de fronteira livre

da Silva, João Vitor[233]

PROPOSTA DE CURSO

1. **Título do curso**: Uma breve introdução à teoria de regularidade elíptica e problemas de fronteira livre;
2. **Nível**: Intermediário;
3. **Autores**: João Vitor da Silva (UNICAMP).
4. **Número de aulas**: 3 aulas (apresentações) de 90 minutos em cada apresentação;
5. **Descrição detalhada**: Neste curso trataremos de introduzir os estudos modernos relativos à teoria de regularidade elíptica para soluções fracas e no sentido da viscosidade de EDPs de segunda ordem na forma divergente e não-divergente. Dentre os pontos a serem abordados estarão a equivalência de noções de soluções para os perfis harmônicos, regularidade para modelos elípticos totalmente não-lineares com dupla lei de degenerescência e alguns problamas de fronteira livre clássicos da literatura, como o problema de obstáculo e o problema de núcleos mortos.

   (a) **Objetivos:** Introduzir conceitos, ferramentas e os resultados modernos relativos às EDPs de segunda ordem e suas teorias de regularidade para soluções fracas e no sentido da viscosidade exporando alguns contextos onde tais tópicos se fazem presentes como na Teoria de Schauder e em problemas de fonteira livre como o problema de obstáculo oriundo da física-matemática e matemática de finanças, bem como o problema de núcleos mortos oriundo da catálise química.

   A teoria de regularidade para EDPs assumem um papel importante em suas aplicabilidades em diversos segmentos da análise matemática de fenômenos físicos, biológicos e sociais além do embasamento teórico para várias subáreas do conhecimento matemático tais como Geometria Diferencial, Sistema Dinâmicos, Análise Geométrica

[233]Universidade Estadual de Campinas

para citar alguns exemplos. Abordaremos questões referentes a regularidade de soluções em problemas elípticos não-lineares e degenerados, com impacto em vários campos de pesquisa correlata; Em particular a teoria geométrica da medida e a análise geométrica, encontram-se no cerne científico desta proposta.

Em resumo, problemas de fronteira livre representam uma classe de questões em ciências exatas com grande apelo de aplicações. Aparecem em várias áreas da ciência, incluindo mecânica dos fluidos, física de plasma e teoria de semicondutores. Fronteiras livres são relevantes para nossa compreensão do estudo de propagação de chamas e também na evolução de superfícies de descontinuidades. Alguns dos problemas sob estudo incluem problemas de fronteira livre e de transição de fase governados por equações totalmente não-lineares degenerados. Uma questão recorrente é a suavidade das soluções ou de seus conjuntos de nível e o comportamento perto de pontos singulares.

(b) **Público-alvo**: Estudantes de Pós-graduação e Pesquisadores em geral com interesse na teoria de regularidade para soluções fracas e no sentido da viscosidade de EDPs elípticas de segunda-ordem e suas aplicações.

(c) **Conteúdo:**

  i. Revisão sobre EDPs de segunda ordem;
  ii. Teoria de Schauder via Princípio do Máximo;
  iii. Introdução às EDPs totalmente não-lineares de segunda ordem;
  iv. Estimativas para modelos totalmente não-lineares com dupla lei de degenerescência;
  v. Um estudo sobre o problema de obstáculo para o Laplaciano;

(d) BIBLIOGRAFIA:

  i. Elzon C. Bezerra Júnior, João Vitor da Silva, Giane C. Rampasso, Gleydson C. Ricarte & Hernán; Vivas, Recent developments on fully nonlinear PDEs with unbalanced degeneracy. **Mat. Contemp**. 51 (2022), 123-161. 35
  ii. João Vitor da Silva & Gabrielle Nornberg, Regularity estimates for fully nonlinear elliptic PDEs with general Hamiltonian terms and unbounded ingredients. **Calc. Var. Partial Differential Equations** 60 (2021), no. 6, Paper No. 202, 40 pp.
  iii. João Vitor da Silva & Gleydson C. Ricarte, Geometric gradient estimates for fully nonlinear models with non-homogeneous degeneracy and applications. **Calc. Var. Partial Differential Equations** 59 (2020), no. 5, Paper No. 161, 33 pp.
  iv. **João Vitor da Silva** & **Gleydson C. Ricarte, Regularidade elíptica e problemas de fronteiras livres.** 34° **Colóquio Brasileiro de Matemática - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2023. 156 pp. ISBN:978-85-244-0532-7. ISBN:978-85-244-0533-4**.
  v. João Vitor da Silva & Hernán Vivas, The obstacle problem for a class of degenerate fully nonlinear operators. **Rev. Mat. Iberoam**. 37 (2021), no. 5, 1991-2020.
  vi. João Vitor da Silva, Julio D. Rossi & Ariel M. Salort, Regularity properties for p-dead core problems and their asymptotic limit as $p \to \infty$. **J. Lond. Math. Soc**. (2) 99 (2019), no. 1, 69-96.
  vii. João Vitor da Silva & Ariel M. Salort, Sharp regularity estimates for quasi-linear elliptic dead core problems and applications. **Calc. Var. Partial Differential Equations** 57 (2018), no. 3, Paper No. 83, 24 pp.

viii. Qing Han & Fanghua Lin, Elliptic partial differential equations. Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. x+147 pp. ISBN: 978-0-8218-5313-9.

ix. Xavier Fernández-Real & Xavier Ros-Oton, Regularity Theory for Elliptic PDE. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. EMS books (forthcoming, 2023)

x. Augusto Ponce, Métodos Clássicos em Teoria do Potencial. Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2009. ISBN: 978-85-244-0244-9.

xi. Peter Lindqvist, Notes on the infinity Laplace equation. Springer Briefs in Mathematics. BCAM Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao; Springer, [Cham], 2016. ix+68 pp. ISBN: 978-3-319-31531-7; 978-3-319-31532-4.

xii. Eduardo V. Teixeira, Elliptic regularity and free boundary problems: an introduction. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications] 26 Colóquio Brasileiro de Matemática. [26th Brazilian Mathematics Colloquium] Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2007. ii+205 pp. ISBN: 978-85-244-0252-4

xiii. Eduardo V. Teixeira, Introdução à teoria de regularidade elíptica: uma abordagem geométri. III ENAMA, Maringá, 2009.

xiv. Eduardo V. Teixeira, Um convite à análise geométrica de EDPs elípticas de 2a ordem. IV EBED, João Pessoa, 2011.

xv. Lihe Wang, Regularity Theory. Lecture Notes - Korea Winter School, 2013.

xvi. Noemí Wolanski, Introdución a los problemas de frontera libre. Cursos y Seminarios de Matemática - Serie B, Fascículo 2, Publicaciones del Departamento de Matemática, FCEN-UBA, 2007. ISSN 1851-1481.

6. Pré-requisitos: São desejáveis os conhecimentos de:

   (a) Teoria do potencial:

      i. D.G. Figueiredo, **Teoria Clássica do Potencial**. [Classical potential theory] Editora Universidade de Brasília, Rio de Janeiro 1963 iv+166 pp.

      ii. D. Gilbarg & N. S. Trudinger, **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xiv+517 pp. ISBN: 3-540-41160-7.

   (b) EDPs Elíticas:

      i. L.C. Evans, **Partial Differential Equations**. Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xxii+749 pp. ISBN: 978-0-8218-4974-3

      ii. Qing Han & Fanghua Lin, **Elliptic partial differential equations**. Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. x+147 pp. ISBN: 978-0-8218-5313-9.

      iii. Qing Han, **Nonlinear elliptic equations of the second order**. Graduate Studies in Mathematics, 171. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016. viii+368 pp. ISBN: 978-1-4704-2607-1.

   (c) Teoria da Medida;

i. W. P. Ziemer, **Modern real analysis**. Second edition. With contributions by **Monica Torres**. *Graduate Texts in Mathematics*, 278. Springer, Cham, 2017. xi+382 pp. ISBN: 978-3-319-64628-2; 978-3-319-64629-9.

(d) Análise Funcional:

i. H. Brezis, **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp. ISBN: 978-0-387-70913-0.

Matrizes 2×2 ou coquatérnios

Aplicada ao estudo do espaço hiperbólico

Colombo, Jones[234]

Resumo: *Neste minicurso vamos apresentar a álgebra, conhecida como Coquatérnio. Esta álgebra é na verdade a álgebra das matrizes 2×2 vista com respeito a uma base adequadamente escolhida. Vamos analisar as principais propriedades desta álgebra desde o ponto de vista do dos quatérnios. O objetivo deste minicurso é mostrar que assim como a álgebra dos Quatérnios é adequada para cálculos no espaço euclidiano, a álgebra dos Coquatérnios é adequada para os cálculos do Espaço Hiperbólico.*

Palavras-chave: *Split-quaternion, matrizes de rotação, geometria hiperbólica.*

INTRODUÇÃO

Quatérnios

Em Matemática, os quatérnios [8] é um sistema numérico que extende os números Complexos [7]. Os quatérnios foram primeiramente descritos pelo matemático Irlandês Willian Rowan Hamilton em 1843 e aplicado ao estudo da mecânica do espaço tridimensional. Por este motivo os quaternico são frequentemente denotados por H (de Hamilton), ou por $\mathbb{H}$. É tradição representar os quatérnios da forma:

$$a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k},$$

onde os coeficiente a, b, c e d são números reais, e $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são as bases de um espaço vetorial sobre os Reais.

Onde a multiplicação por $\mathbf{1}$ e os elementos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são definidos por ele ser o elemento identidade, isto é,

$$\mathbf{i}\,1 = 1\,\mathbf{i} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{j}\,1 = 1\,\mathbf{j} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{k}\,1 = 1\,\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

O produto dos outros elementos da base são:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \\ &\mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Combinando esta regras,

$$\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = -1.$$

[234]IME – UFF

Os quatérnios é um tópico de matemática pura, mas também têm usos práticos em matemática aplicada [2, 6], particularmente para cálculos que envolvem rotações tridimensionais, como em computação gráfica tridimensional, visão computacional e análise de textura cristalográfica. Eles podem ser usados junto com outros métodos de rotação, como ângulos de Euler e matrizes de rotação, ou como alternativa a eles, dependendo da aplicação.

Em termos modernos, os quatérnios formam uma álgebra de divisão normada associativa quadridimensional sobre os números reais e, portanto, um anel, também um anel de divisão e um domínio. É um caso especial de álgebra de Clifford, classificada como $\mathrm{Cl}_{0,2}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Cl}^{+}_{3,0}(\mathbb{R})$. Foi a primeira álgebra de divisão não comutativa a ser descoberta.

Coquatérnios

Na álgebra abstrata, os Coquatérnios [9] (ou Split-Quaternion) formam uma estrutura algébrica introduzida por James Cockle em 1849. Eles formam uma álgebra associativa de dimensão quatro sobre os números reais.

Após a introdução no século 20 usando as definições de anéis e álgebras sem coordenadas, foi provado que a álgebra dos coquatérniosé isomorfa ao anel das matrizes reais 2×2 sobre os Reais. Portanto, o estudo dos Coquatérnios pode ser reduzido ao estudo de matrizes reais, e isso pode explicar por que há poucas menções aos Coquatérnios na literatura matemática dos séculos XX e XXI.

Seguindo a tradição representar os quatérnios vamos representar os coquatérnios da forma:

$$a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k},$$

onde os coeficiente a, b, c e d são números reais, e $\mathbf{1}$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são as bases de um espaço vetorial sobre os Reais. Onde a multiplicação por $\mathbf{1}$ e os elementos $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são definidos para ele ser o elemento identidade, isto é,

$$\mathbf{i}\,1 = 1\,\mathbf{i} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{j}\,1 = 1\,\mathbf{j} = \mathbf{j}, \qquad \mathbf{k}\,1 = 1\,\mathbf{k} = \mathbf{k}$$

O produto dos outros elementos da base são:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}^2 = -\mathbf{j}^2 = -\mathbf{k}^2 = -1, \\ &\mathbf{i}\,\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\mathbf{i} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\,\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\,\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Combinando esta regras,

$$\mathbf{i}\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = 1.$$

Como os quatérnios, eles formam uma álgebra associativa real quadridimensional sobre os reais. Mas, como a álgebra real das matrizes 2×2 – e ao contrário da álgebra real dos quatérnios – os coquatérnios contêm divisores de zero não triviais, elementos nilpotentes e idempotentes. (Por exemplo, $\frac{1}{2}(1 + \mathbf{j})$ é um divisor de zero idempotente e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ é nilpotente.)

Espaço Hiperbólico

O espaço hiperbólico n-dimensional [10], [4], geralmente denotado $\mathbb{H}^n$, é a única variedade Riemanniana completa n-dimensional , simplesmente conectada, com uma curvatura seccional negativa constante igual a -1. A unicidade significa que quaisquer duas variedades Riemannianas que satisfaçam essas propriedades são isométricas entre si.

Existem muitas dessas construções ou modelos de espaço hiperbólico [3], cada um adequado a diferentes aspectos do seu estudo. Eles são isométricos entre si, em cada caso, uma isometria explícita pode ser dada explicitamente. Aqui está uma lista dos modelos mais conhecidos: o modelo do meio plano de Poincaré, modelo do disco de Poncaré, o modelo do hiperbolóide, o modelo de Beltrami-Klein.

CONCLUSÕES

O minicurso será organizado da seguinte forma: vamos introduzir o Espaço Hiperbólico e o modelo que iremos trabalhar. Depois vamos fazer a exposição do quatérnios como em [1]. Uma vez feito isso, vamos apresentar os Coquatérnios e, examinar, levando em consideração diversas analogias entre as duas álgebras. Por último vamos apresentar no modelo do espaço hiperbólico os elementos básicos (dos axiomas de incidência: pontos, retas, ângulos, intercessões, etc) e fazer alguns cálculos que podem ser executados como o auxílio dos Coquatérnios.

BIBLIOGRAFIA

[1] DIEUDONNÉ, J., **Linear Algebra and Geometry**, Hermann, 1969. ISBN:2705656545, 9782705656546

[2] HALL, Brian C. **Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction**, Graduate Texts in Mathematics, vol.222 (2nd ed.), Springer, (2015). doi:10.1007/978-3-319-13467-3, ISBN 978-3319134666.

[3] BARBOSA, J. L. M., **Geometria Hiperbólica**, Goiânia: Instituto de Matemática e Estatística da UFG, 2002.

[4] LYMBERPOULOS, A.; COUTO, I. T., **Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies**, Coleção Textos Universitário, SBM, 2018. ISBN:9788583371397

[5] HOFFMAN, K.; KUNZE, R., **Linear Algebra**, 2nd edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1971).

[6] STILLWELL, J., **Naive Lie Theory**, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2008. ISBN: 978-0-387-78214-0.

[7] NEEDHAM, T. **Visual Complex Analysis**, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[8] QUATERNION. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion`>. Acesso em: 21 fev. 2024.

[9] SPLIT-QUATERNION. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/wiki/Split-quaternion`>. Acesso em: 21 fev. 2024.

[10] HYPERBOLIC SPACE. Na: WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre. Wikimedia, 2006. Disponível em: <`https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_space`>. Acesso em: 21 fev. 2024.

Construção de um relógio de sol

Oliveira, L.[235]; Salvador, J. A.[236] e Silva, S. L.[237]

Resumo: *Neste minicurso oferecemos uma motivação interessante através das orientações para a construção de um relógio de sol, abordando conceitos geométricos para a montagem equatorial e a trigonometria para justificar a montagem horizontal. Antes porém vamos mostrar como determinar dois elementos essenciais para a sua construção que são o meridiano e a latitude local*

Palavras-chave: *Relógio solar, montagem equatorial, montagem horizontal, meridiano local, trigonometria.*

INTRODUÇÃO

O céu sempre fascinou o ser humano ao longo da história, despertando interesse em diversas civilizações. Os movimentos dos corpos celestes foram observados para medir o tempo, orientação e determinar as épocas de plantio e de colheita.

A observação do Sol levou à divisão do tempo em dia e noite, e do ano em estações. Do nascer até o pôr do Sol, o Sol varia sua posição, durante sua trajetória aparente de acordo com as estações do ano, sendo nos equinócios em 20 de março e 22 de setembro quando nasce exatamente no leste e se põe no oeste.

Antigas civilizações desenvolveram técnicas para observar e registrar fenômenos celestes, construindo templos e observatórios. Os incas, por exemplo, construíram o Intihuatana em Machu Picchu e outros locais do Peru, que servia como observatório astronômico e relógio de Sol.

Compreender o movimento da Terra e a importância do Sol, em projetos integrados nas escolas, pode estimular o interesse dos estudantes pelas Ciências e Matemática, como na construção de um relógio solar.

MERIDIANO E LATITUDE LOCAL

Propomos muitos questionamentos sobre os movimentos dos corpos celestes e as posições diárias do Sol no céu.

Veremos que o segmento de reta formado pela sombra mínima de um gnômon num dia ensolarado está contido no meridiano local, indicando a direção N-S (norte-sul) e assim construímos a Rosa dos Ventos. Traçando uma perpendicular a essa linha, obtemos a direção leste-oeste verdadeira. Outro modo de determinar a direção N-S é a bissetriz das sombras de um gnômon pela manhã e à tarde,

[235]E. E. Santa Lúcia
[236]DM-UFSCar
[237]E. E. Poços de Caldas

quando elas possuem o mesmo tamanho. Isso nos permite determinar a linha meridiana local e os pontos cardeais do local.

Experimentos como esse proporcionam discussões sobre conceitos matemáticos como perpendicularismo e nos permitem questionar como operários e engenheiros utilizam ferramentas, como o fio de prumo para as construções e também orientar o telhado para otimizar a energia recebida do Sol durante o dia, especialmente para instalação de módulos solares.

A latitude de um lugar é a medida do ângulo do meridiano do local, quando se vai do equador até ao paralelo do lugar, ângulo esse, igual a altura do polo celeste elevado.

Nos equinócios, em que o Sol ao meio-dia está na vertical do equador a latitude é o complemento do ângulo que o Sol faz com o horizonte.

Geometricamente, conhecendo-se a linha meridiana local e a latitude do local podemos instalar um relógio solar, com o gnômon apontando para o polo elevado, que no nosso caso é o polo Sul.

RELÓGIOS DE SOL

O relógio de Sol é um dos mais antigos e simples instrumentos para marcar intervalos de tempo fracionados do dia, usado por muitas civilizações antigas que dominavam alguns conhecimentos matemáticos e astronômicos.

O gnômon, haste fincada verticalmente na superfície terrestre, é um relógio de Sol vertical, muito usado pelas primeiras civilizações. A observação do tamanho e da direção da sombra do gnômon nas várias épocas do ano, ainda é utilizada por tribos indígenas brasileiras para orientação de suas aldeias e marcação do tempo. Apresentamos a seguir ideias de como construir um relógios de Sol.

Relógio de Sol com montagem equatorial

Um Relógio de Sol com mostrador equatorial é obtido pela projeção da sombra de um gnômon na direção do polo celeste elevado do local, como se fosse o eixo do mundo projetada num semicírculo, conforme Figura 81 a seguir.

Considerando o movimento de rotação da terra de 360° durante as $24\,h$ uniforme durante o dia, graduamos a extremidade de um semicírculo das 6 às 18 horas, de hora em hora, com intervalos igualmente espaçados de 15°, pois a cada rotação aparente da esfera celeste de 15° corresponde a 1 hora.

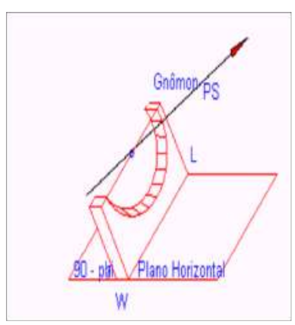


Fig. 81: Modelo de Relógio de Sol com montagem equatorial

Relógio de Sol com montagem horizontal

Para construir um relógio solar com mostrador horizontal, que projeta a sombra das horas numa superfície horizontal plana, também usamos um gnômon com ângulo de inclinação igual ao da latitude local ϕ com o plano do horizonte do observador e apontando para o pólo celeste elevado. No nosso hemisfério o polo Sul.

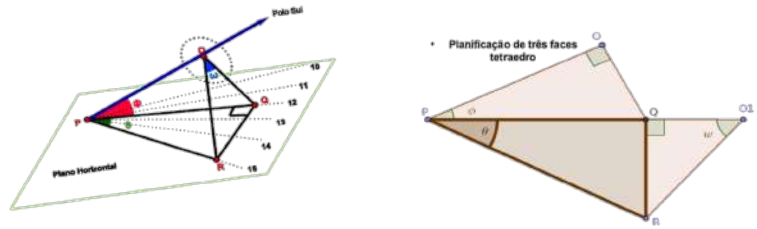


Fig. 82: Montagem horizontal com o tetraedro e projeção dos triângulos auxiliares

Para determinar os ângulos horizontais das horas inteiras usamos uma figura geométrica auxiliar constituída do tetraedro POQR, com três ângulos retos como na Figura 82, e observamos as relações trigonométricas em suas faces constituídas de triângulos retângulos $\triangle POQ$, $\triangle PQR$ e $\triangle OQR$ e as comparamos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Deulofeu, J. **Relojes, medidas y calendarios: un sinfín de historias matemáticas.** Geodisa, Barcelona, Espanha, 2018.

[2] Mayall, R. N. and Mayall M. W. **Sundials: Their Construction and Use**, Dover, 2012.

[3] Oliveira, L. **Geometria da observação dos movimentos aparentes do Sol e aplicações**. https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4431

[4] Salvador, J. A. Ciências e matemática do sol e do gnômon, **Brazilian Electronic Journal of Mathematics**, v.1 - n.2, jul/dez, 2020. ISSN: 2675-1313.

Métodos da álgebra matricial para o estudo dos números de Lucas e de Fibonacci

Caritá, Lucas A.[238] e Quirino, Maria Eduarda S. C.[239]

Resumo: *Neste minicurso, exploraremos as relações entre os números de Lucas e Fibonacci usando matrizes. Analisaremos as sequências de Fibonacci* (F_n) *e de Lucas* (L_n) *sob a ótica das* $Q-$*matrizes de Fibonacci e de Lucas, representadas por* $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$*, uma vez que através da potenciação dessas matrizes, obtemos os termos das sequências mencionadas. Com o auxílio da álgebra matricial, demonstraremos conexões fascinantes entre os termos das sequências* (F_n) *e* (L_n)*, além das relações com o número de ouro. O minicurso será dividido em três aulas: (1) Fundamentos de álgebra matricial, (2) Introdução às sequências e algumas identidades, e (3) Demonstração de várias conexões usando álgebra matricial. Os interessados devem estar familiarizados com técnicas de demonstração, principalmente indução finita. Noções básicas sobre Teoria dos Números são desejáveis, mas não obrigatórias.*

Palavras-chave: *Números de Lucas, números de Fibonacci, álgebra linear, matrizes.*

AULA 01: MATRIZES QUADRADAS DE ORDEM 2

Na primeira aula, abordaremos conceitos básicos de álgebra matricial, com foco no conjunto $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes 2x2 com entradas reais, explorando-o como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Discutiremos operações, propriedades e determinantes. Observaremos que o polinômio característico de uma matriz A em $M_2(\mathbb{R})$ é dado por $det(A - xI)$, onde I indica a matriz identidade, e a equação característica é $det(A - xI) = 0$. Mostraremos que esta última pode ser expressa como $x^2 - (tr(A))x + det(A) = 0$, onde $tr(A)$ é a soma dos elementos da diagonal principal de A. As raízes dessa equação são os autovalores da matriz. Por fim, apresentaremos uma demonstração do teorema de Hamilton-Cayley para matrizes 2x2, que afirma que toda matriz em $M_2(\mathbb{R})$ verifica sua própria equação característica.

[238]Instituto Federal de São Paulo - IFSP
[239]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP

AULA 02: NÚMEROS DE FIBONACCI E DE LUCAS

Leonardo Pisano (Fibonacci) enunciou um problema sobre o crescimento de uma suposta população de coelhos em sua obra *Liber Abaci*, a sucessão de números inteiros que auxilia na resolução deste problema ficou conhecida como sequência de Fibonacci, graças ao matemático francês Édouard Lucas [1]. Denotada como (F_n), essa sequência é definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$, sendo cada termo também chamado de número de Fibonacci. No minicurso, serão exploradas relações conhecidas sobre esses números, incluindo a identidade de Cassini, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ para $n \geq 1$.

Outras sequências podem ser geradas usando a mesma lei de recorrência de (F_n), variando os dois primeiros inteiros. Por exemplo, ao iniciar com 2 e 1, cria-se a sequência (L_n), conhecida como sequência de Lucas, em homenagem a Édouard Lucas. Definida por $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 2$, cada termo dessa sequência é chamado de número de Lucas.

Um resultado notável sobre os números de Fibonacci e Lucas são as fórmulas de Binet, que expressam seus termos, que são inteiros, como potências de números irracionais específicos. O enunciado de Binet, cuja demonstração será abordada no minicurso, é:

Teorema 7.4 (Binet) *Para $n \geq 0$ inteiro, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, os n-ésimos números de Fibonacci e de Lucas são dados, respectivamente, por $F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$ e $L_n = \phi^n + \phi_2^n$.*

Há diversas relações entre os números de Lucas e os de Fibonacci, algumas das quais podem ser obtidas usando as fórmulas de Binet. Vamos explorar várias delas neste minicurso, tais como, considerando $n \geq 1$: (1) $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$, (2) $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$, (3) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, (4) $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$ e (5) $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$.

AULA 03: CONEXÕES ENTRE MATRIZES E NÚMEROS DE FIBONACCI E DE LUCAS

Um método para estudar a sequência de Fibonacci é uso da Q-matriz de Fibonacci, $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Por indução, é possível verificar que $Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, para $n \geq 1$ natural [1]. O polinômio característico de Q_F é $det(Q_F - xI) = x^2 - x - 1$. Os autovalores de Q_F são $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, os mesmos irracionais que figuram nas fórmulas de Binet, conhecidos como número de ouro e seu conjugado, respectivamente.

A partir da matriz Q_F, pode-se estabelecer diversas identidades que envolvem os números de Fibonacci, por exemplo, a identidade de Cassini pode ser facilmente demonstrada a partir do uso de $det(Q_F^n)$. Faremos esta e outras provas na aula.

Na mesma linha, podemos investigar a equação característica de Q_F^n. Neste caso, $det(Q_F^n - xI) = x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)$. Todavia, sabemos que $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$ e que $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$. Dessa forma, a equação característica resulta em $x^2 - L_n x + (-1)^n = 0$. Calculando suas raízes, obtemos $x = \frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2}$ e, por meio da identidade $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$, concluímos que os auto-valores de Q_F^n são $\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}$. Usando as fórmulas de Binet, se verifica que $\phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2^n = \frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}$, em outras palavras, os auto-valores da matriz Q_F^n são as n-ésimas potências dos auto-valores de Q_F.

Para estudar a sequência de Lucas, podemos usar a Q-matriz de Lucas, $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Por indução, é possível verificar que $Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$, para $n \geq 1$ natural [2]. Para a matriz Q_L, o polinômio característico é dado por $det(Q_L^n - xI) = x^2 - 5x + 5$. Nesse contexto, se percebe que os auto-valores da matriz Q_L são $\varphi = \sqrt{5}\phi$ e $\varphi_2 = \sqrt{5}\phi_2$. Dessa forma, podemos também observar a relação entre o número de ouro e os números de Lucas.

Investiguemos a equação característica de Q_L^n. Quando n é par, $det(Q_L^n - xI) = 5^n(x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + (F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2)) = 5^n(x^2 - L_n x + (-1)^n) = 0$. Encontraremos as mesmas raízes da equação característica de Q_F^n. Assim, concluímos que os auto-valores de Q_L^n, para n par, são as n-ésimas potências dos auto-valores de Q_F, ϕ^n e ϕ_2^n. Quando n é ímpar, $det(Q_L^n - xI) = 5^{n-1}(x^2 - (L_{n+1} + L_{n-1})x + (L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2))$. Todavia, sabemos que $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$ e $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$. Dessa forma, a equação característica resulta em $5^{n-1}(x^2 - 5F_n x - 5(-1)^n) = 0$. Calculando suas raízes, obtemos $x = \frac{5F_n \pm \sqrt{25F_n^2 - 4(-5)(-1)^n}}{2}$ e, por meio da identidade $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2$, concluímos que os auto-valores de Q_L^n são $\frac{5F_n + L_n\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{5F_n - L_n\sqrt{5}}{2}$, ou ainda, $\phi^n\sqrt{5}$ e $-\phi_2^n\sqrt{5}$.

Neste ponto o leitor deve ter notado que inúmeras investigações podem ser feitas sobre as sequências de Fibonacci e de Lucas utilizando álgebra matricial. Durante o curso, apresentaremos, em detalhes, todas as conexões mencionadas neste texto e muitas outras.

BIBLIOGRAFIA

[1] HOGGATT, V. E. **Fibonacci and Lucas Numbers**. Boston: Houghton Mifflin Company, 1969.

[2] KÖKEN, F. BOZKURT, D. On Lucas Numbers by the Matrix Method. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, v. 39, n. 4, p. 471 – 475, 2010.

Apolônio e Arquimedes vistos por Pappus

Um resgate de suas obras no século IV

Amorim, Marcela[240]

Resumo: *Pappus de Alexandria, matemático grego do século IV, tenta resgatar os nove séculos de conhecimento na área, desde Pitágoras de Samos até Theon de Alexandria, um de seus contemporâneos. Os mais citados por Pappus, em sua obra Coleção Matemática, são Euclides, Apolônio e Arquimedes. Esse minicurso propõe mostrar a organização da obra de Pappus, além de todos os trabalhos de Apolônio e Arquimedes citados por ele, quais sobreviveram e o que se sabe das obras que se perderam, mas foram citadas, comentadas e até complementadas na Coleção.*

Palavras-chave: *Apolônio, Arquimedes, Pappus, matemática grega.*

INTRODUÇÃO

A hegemonia da civilização mediterrânea na Matemática durou nove séculos, começando com Pitágoras, passando por nomes como Arquimedes, Apolônio, Theon, Ptolomeu e tantos outros, e finalizando com Pappus, sendo conhecido como o último geômetra grego. O mais brilhante e reconhecido é Euclides de Alexandria (*Εὐκλείδης ὁ Ἀλεξσνδρεύς*), mencionado na maioria dos trabalhos da antiguidade e tendo sua obra mais famosa conhecida como *Os Elementos* (*Στοχεια*), considerada a bíblia da matemática até a história recente.

Pappus (*Πάπποσ ὁ Ἀλεξσνδρεύς*), sete séculos depois de Euclides produz a obra conhecida como *Coleção Matemática* ou simplesmente *Coleção* (*Συναγωγή*). Tal trabalho que, originalmente era composta por 12 livros, sobrevivendo 6,5 livros, inclui o trabalho de 52 estudiosos da antiguidade, incluindo diversos temas, muito além da Geometria, como já foi visto anteriormente. Dentre os mais citados estão Apolônio, Arquimedes e Euclides – três matemáticos da considerada 'Era de Ouro da Matemática' – sendo que o último tem mais citações que o dobro de qualquer outro. Alguns desses 52 estudiosos nunca mais foram mencionados em nenhuma outra obra e muito pouco sabemos a respeito.

PAPUS E SUA COLEÇÃO MATEMÁTICA

A organização dos livros da *Coleção* parece ter sido alterada de acordo com as versões. Além disso, resulta de um trabalho longo, de vários momentos diferentes de estudo, compilado em livros da *Coleção*. Pappus não apenas compila obras antigas, ele amplia os trabalhos anteriores, aumentando o número de lemas para esclarecer demonstrações e estende casos particulares oferecendo novas provas. Originalmente, a *Coleção Matemática* consistia em oito a doze livros sendo que o primeiro e as treze primeiras proposições do segundo

[240]Universidade Federal do Rio de Janeiro, Doutoranda em História da Matemática, PEMAT, Rio de Janeiro, RJ

se perderam, além do fim do oitavo e a partir dele. A tabela a seguir mostra o número de proposições e os principais assuntos contidos em cada um deles.

LIVRO	PROPOSIÇÕES	PREFÁCIO	ASSUNTOS
I	perdido	--------	------------
II	14 a 26	Não	Aritmética – sistema de numeração grego
III	1 a 59	Sim	Médias, desigualdades no triângulo e sólidos inscritos
IV	1 a 44	Não	Três problemas clássicos
V	1 a 57	Sim	Isoperimetria
VI	1 a 68	Sim	Astronomia
VII	1 a 238	Sim	Teoria da Análise – demonstrações (problema/teorema)
VIII	1 a 32	Sim	Mecânica

ARQUIMEDES E SUA GENIALIDADE CONHECIDA POR PAPPUS

O livro III da *Coleção* de Pappus pode ser dividido em quatro partes. A primeira lida com o problema de encontrar duas médias proporcionais entre duas linhas retas dadas. Nesse instante Pappus já cita *Sobre a esfera e o cilindro*, obra de Arquimedes.

O livro IV contém cinco seções. A primeira seção é uma série de proposições não relacionadas, preparando para as demais seções desse livro e incluindo a generalização do teorema de Pitágoras já visto na Introdução dessa tese e cita o *Livro dos Lemas* de Arquimedes. A segunda seção lida com o estudo de círculos inscritos, trabalho esse atribuído a Arquimedes, na obra *As espirais*. Na terceira seção, Pappus se volta para a quadratura do círculo, mencionando Arquimedes e Nicomedes. A quarta seção é dedicada a outro famoso problema clássico, a trisseção de um ângulo. A quinta e última parte trata da duplicação do cubo.

Pappus menciona, além das citadas acima, as seguintes obras de Arquimedes: Sobre os cones e esferoides; Sobre a medida do círculo; Sobre o equilíbrio das figuras planas, Sobre o método dos teoremas mecânicos (conhecida como "O método"); Sobre os corpos flutuantes; Sobre a quadratura da parábola; Sobre as balanças; O contador de areia.

Esse minicurso termina o primeiro dia de encontro mostrando dessas obras arquimedianas quais sobreviveram, em que livros foram citadas na Coleção de Pappus e quais os assuntos que se pode afirmar que elas contêm.

APOLÔNIO - SUAS OBRAS SOBREVIVENTES E PERDIDAS

"*Celebrai, ó nove musas, o poder supremo de Ártemis*". Essa frase pode ser considerada uma possível tradução da frase em grego: *Ἀρτέμιδος κλειτε κράτος ἐξοχός ἐννέα κοῦραι* que Apolônio utiliza para fazer uma multiplicação de 38 números representados pelas letras dessa frase mencionada por Pappus no fragmento do livro II da Coleção.

O Livro VII é o mais fascinante e mais importante de toda a *Coleção*, não apenas por seu interesse intrínseco e pelo que preserva de escritores anteriores, mas pela herança que deixa para a história mais recente da matemática. O prefácio desse Livro começa já considerando Apolônio como um dos pais da Matemática. Ele dá um relato dos seguintes livros no chamado Tesouro de Análise, composto de 33 livros sobreviventes ou não, sendo 20 livros de Apolônio. Esse minicurso pretende trazer um relato de Pappus sobre Apolônio e suas obras, e, quais dessas só conhecemos graças a Pappus.

CONCLUSÕES

Esse minicurso se propõe apresentar a obra mais importante de Pappus – Coleção Matemática – que resgata, complementa e organiza 900 anos de Matemática Grega. No 1º dia mostrar o assunto de cada um dos livros, seus prefácios e os estudiosos mencionados. Ainda no 1º dia, resgatar toda a genialidade do mestre de Siracusa, Arquimedes, suas obras que sobreviveram e as perdidas, seus ensinamentos e toda a herança que Papus teve acesso.

No 2º dia, propõe-se mostrar todo o trabalho de Apolônio visto por Pappus, desde o sistema de numeração até a justificativa dele ser, junto com Euclides e Aristeu, considerado um dos mestres da Análise, conteúdo do livro mais marcante da Coleção. No último instante, esse minicurso oferece uma visita à inspiração de um para outro desses dois gênios da humanidade e como Pappus resgatou tal relação em sua *Coleção Matemática*.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brehier, E.; **A propos de deux livres récents sur la science grecque**.. In: Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 3, n°3, 1950. pp. 201-209;

[2] Commandino, F.; **Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones**. Roma, 1589

[3] Dieudonné, J.; **L'évolution de la pensée mathématique dans la Grèce Ancienne**. In: Bulletin de l'Association Guillaume Budé,n°2, juin 1951. pp. 6-18.

[4] Eecke, P. V.; **Pappus d'Alexandrie la collection mathématique**. Paris, 1933

[5] Gillispie, C.C.; **Dictionary of Scientific Biography. Princeton University, Editor Scriber**. New York, 1981.

[6] Heath, T.; **A History of Greek Mathematics**. Oxford University, Oxford, 1921.

[7] Hultsch, F. O.; **Collectionis**. Berolini, 1878.

[8] Knorr, W. R.; **Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry**. Editor Birkhauser. Boston, 1989.

[9] Mugler, C.; **La pensée mathématique des Grecs**. In: Revue des Études Grecques, tome 65, fascicule 304-305, Janvier-juin 1952. pp. 203-213.

[10] Netz, R.; **The Shaping of Deduction in Greek Mathematics**. Cambridge University Press. New York, 2004.

[11] Thomas, I.; **Selections Illustrating the History of Greek Mathematics**. Harvard University Press. Massachusetts, 1941.

Princípios da teoria topológica de coincidências

Fenille, Marcio Colombo[241]

Resumo: *Este minicurso é uma introdução à teoria topológica de pontos fixos, raízes e coincidências, em que, de forma intuitiva e com forte apelo geométrico, apresentaremos alguns dos mais notáveis teoremas da área e algumas de suas emblemáticas aplicações.*

Palavras-chave: *Pontos fixos, raízes, coincidências.*

INTRODUÇÃO

A teoria topológica de coincidências teve seu início na segunda década do século XIX, mas seu maior desenvolvimento e consolidação ocorreram na primeira metade do século XX. Podemos citar três matemáticos como os precursores da teoria, os três com sobrenomes que, por coincidência, iniciam com a letra B.

O primeiro é o padre católico, matemático, teólogo e filósofo da antiga Boémia, atual República Checa, Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano. Aquele que data de 1812 e que hoje chamamos Teorema do Anulamento de Bolzano é o primeiro teorema topológico de coincidências de que se tem notícia; na terminologia usual, um teorema de raízes.

O segundo é o matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer, autor de um dos mais célebres resultados de toda a matemática, não apenas da topologia: o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, cuja versão geral é de 1912.

O terceiro é Karol Borsuk, matemático polonês que provou, em 1933, o resultado pouco antes formulado por Stanislaw Ulam que passou a ser chamado o Teorema de Borsuk-Ulam, inaugurando uma nova linha de pensamento que atravessou o século XX e segue firme nos nossos dias.

Ao passo que o Teorema do Anulamento de Bolzano consta do programa de todo bom curso inicial de Cálculo, os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Borsuk-Ulam raramente comparecem nos currículos de graduação; com sorte nos currículos de mestrado. De fato, as versões mais gerais desses dois teoremas são assuntos da Topologia Algébrica, disciplina a que estudantes de Matemática normalmente têm acesso apenas num curso de doutorado ou como optativa no mestrado.

Não obstante, os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Borsuk-Ulam possuem versões em dimensões baixas que podem ser compreendidas por meio de construções e provas de forte apelo geométrico e de pleno alcance à cognição de estudantes de graduação. A isto se propõe este minicurso: apresentar de forma intuitiva e acessível esses notáveis teoremas e algumas de suas aplicações, como o teorema do cafezinho, o teorema das panquecas, o teorema do sanduíche de presunto e o teorema da meteorologia.

[241]Instituto de Matemática e Estatística – Universidade Federal de Uberlândia

PROGRAMA DAS AULAS

Propõe-se que o minicurso tenha carga horária de 6 horas, dividida em três aulas.

Aula 1. Serão assuntos da primeira aula:

– Os conceitos de raízes, pontos fixos e coincidências.

– O Teorema do Anulamento de Bolzano.

– Os Teoremas do Ponto Fixo de Brouwer e de Borsuk-Ulam em dimensão um.

Aula 2. Serão assuntos da segunda aula:

– Número de enrolamento de uma curva fechada ao redor de um ponto.

– Versão do Teorema do Anulamento em dimensão dois.

– O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer em dimensão dois.

Aula 3. Serão assuntos da terceira aula:

– O Teorema de Borsuk-Ulam em dimensão dois.

– Aplicações: o teorema do cafezinho; o teorema das panquecas; o teorema do sanduíche de presunto; o teorema da meteorologia.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHINN, W. G; STEENROD, N. E. **First concepts of topology:** the geometry of mappings of segments, curves, circles and disks. New York: Random House, 1966.

[2] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[3] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1993.

[4] MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Bases numéricas e a conjectura de Collatz

Moraes, Fabíolo Amaral e Santos, Olinto de Oliveira[242]

Resumo: *Este trabalho mostra que mudando as bases numéricas de números inteiros é possível resolver problemas tradicionais e inéditos que envolvem somas de potências inteiras de mesma base, com aplicação em áreas tais como: Funções Exponenciais, Analise Combinatória e Teoria dos Números. O curso concluirá demostrando como ao mudar a base de 10 par 2, foi possível fazer uma série de descobertas sobre a Conjectura de Collatz.*

Palavras-chave: *Bases numéricas, conjectura de Collatz, equações diofantinas.*

JUSTIFICATIVA

Em uma entrevista publicada na Revista Calculo de março de 2014, a pesquisadora em Educação Matemática LIPING[1] (Obs:Na China o Sobrenome vem antes do Nome), defende que o ensino da Aritmética contribuí muito para uma melhor compreensão da matemática, por isso é vantajoso utilizar métodos de Teoria dos Números para solução de problemas do Ensino Médio, como mais uma ferramenta a disposição do aluno.

O ensino da Aritmética na educação básica também é proposta da Sociedade Brasileira de Matemática SBM[2] , em 2015 esta proposta foi formalizada em um documento que propõe conteúdos a serem ensinados no Ensino Médio.

Em seus trabalhos SANTOS [4] [5], mostra que manipular a base de números inteiros pode levar a solução de problemas que envolvem somas de potencias inteiras de mesma base.

A Conjectura de Collatz, segundo OSONE [6] é um dos problemas em aberto mais popular do momento. Ela afirmar que tomando um número natural, se for par divide por 2, se for ímpar multiplica por 3 e acrescenta 1, repetindo estas operações teremos um sequência que sempre chega ao número 1 como no exemplo:

a) {16, 8, 4, 2, 1}

b) {13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

SANTOS [7] descobriu que mudando a base dos números para binário, era possível observar muitas características inéditas da Conjectura de Collatz, o que pode possibilitar a demonstração da Conjectura.

OBJETIVO GERAL

O principal objetivo deste trabalho é criar recursos que incentive alunos da educação básica, cursos de Graduação em Matemática e outros cursos universitários onde a Matemática discreta é tratada, a estudar Teoria dos Números, e com isso melhorar a compreensão da Matemática como um todo, seguindo as ideais de LIPING [1], SANTOS [4] [5] e HEFEZ [8].

---

[242]CETEP

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Mostrar como a manipulação de bases numéricas pode resolver problemas tradicionais ou inéditos da Matemática básica e superior que envolvem somas de potências inteiras de mesma base, nos seguintes ramos da Matemática: Função Exponencial, Analise Combinatória, Teoria de Conjuntos, Progressões Geométricas e outros. SANTOS [4] [5]
- Mostra que mudando a base dos números de decimal para binário, foi possível fazer uma serie de descobertas sobre a Conjectura de Collatz, e o potencial desta estratégia para solução de problemas em abertos. SANTOS [7].

CONTEÚDOS ABORDADOS

- Teoria dos Números e Bases Numéricas.
- Equações Diofantinas.
- Conjectura de Collatz.

METODOLOGIA

- Aula expositiva com demonstração rigorosa das ideias propostas.

ATIVIDADES PROPOSTAS

- Resolução de problemas tradicionais obtidos em livros em livros com propostas para o Ensino Médio como PAIVA [8] e LIMA [9], com metodologias propostas por RIBEIRO [11].
- Resolução de problemas relacionados ao programa de mestrado profissional PROFMAT obtidos no livro de HEFEZ [7] (utilizado no programa) ou em provas anteriores de ingresso e qualificação.
- Resolução de problemas inéditos propostos por SANTOS [4].
- Discussão sobre a Conjectura de Collatz com binário e de como novas propriedades podem ser descobertas com a mudança de base conforme proposta por SANTOS [7].

RECURSOS DIDÁTICOS E MATERIAIS

- Data Show
- Lousa
- Cópia do conteúdo a ser ministrado em PDF.

PÚBLICO ALVO

- Professores da Educação Básica.
- Professores do ensino Superior que trabalham com Matemática discreta e Álgebra.
- Estudantes do ensino superior de cursos de Matemática Discreta: Licenciatura em Matemática, Computação e outros.
- Alunos que participam de olímpiadas do conhecimento, OBM, OBMEP e outras.

CONCLUSÃO

O minicurso será concluído com um debate em que todos poderão expressar:

- Opinião sobre o minicurso.
- Sugestões de novos problemas e situações onde o conhecimento exposto seja útil.
- Sugestões de novas aplicações.
- Possíveis usos na educação Básica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Liping,M.; **Sem a Pele as Penas Caem**. Revista Calculo, p.16-19, Março de 2014. Editora Segmento. São Paulo.2014.

[2] SBM. **Diretrizes Curriculares para o Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM 2015

[3] Hefez, M.; **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro, SBM,2011, p. 43-2.

[4] Santos, O. O.; **Bases Numéricas Equações e Criptografia**. São Paulo. All Print Editora, 2016.

[5] Santos, O. O.; **How to Manipulate Numerical Bases to Solve Problems**. International Journal of Innovative Studies in Sciences and Engineering Technology (IJISSET). Volume: 6 Issue: 2 | 2020. Pag. 31-33.

[6] Osone, M.; **Problemão Disfarçado de Probleminha**. Revista Calculo, p.20-26, fevereiro de 2013. Editora Segmento. São Paulo.2013.

[7] Santos, O. O.; **Proving the Collatz Conjecture with Binary Numbers**. International Journal of Pure and Applied Mathematics. Volume 7, Issue 5, October 2018, Pages: 68-77

[8] Hefez, M.; **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro, SBM,2011, p. 43-2.

[9] Paiva, M.; **Matemática**. São Paulo: Editora Moderna 2013. Volume 1, p. 271.

[10] Lima, et all; **Matemática do Ensino Médio**, Volume 2. SBM, Rio de Janeiro, Pag. 1 2006.

[11] Ribeiro, R.; **Equações Diofantinas: Uma Abordagem para o Ensino Médio**. Brasília: Universidade de Brasília (UNB), 2014.

Construções impossíveis em régua e compasso na Grécia antiga

Montenegro, Pã[243]

Resumo: *Este minicurso pretende explorar três problemas emblemáticos da Matemática Grega: a Trissecção do Ângulo; a Quadratura do Círculo; e a Duplicação do Cubo. De maneira não exaustiva, iremos abordar algumas propostas de solução dentro da visão matemática grega, ou seja, sem transpô-los para uma visão algébrica contemporânea, assim como seus desdobramentos históricos, matemáticos, educacionais e filosóficos.*

Palavras-chave: *História da matemática, matemática grega, quadratura do círculo, trissecção do ângulo, duplicação do cubo.*

INTRODUÇÃO

O matemático grego Papo de Alexandria (c. 290 - 350 EC), em sua obra *Coleção Matemática*, classifica os problemas geométricos em três: problemas *planos*, os quais podem ser resolvidos traçando retas e círculos; problemas *sólidos*, quando a solução é obtida a partir de construções espaciais, como o uso das cônicas; e problemas *lineares*, que necessitam da construção de curvas superiores, envolvendo, por exemplo, o movimento.

Em especial, para solucionar problemas planos, bastaria o uso de régua e compasso. O uso dessas ferramentas encabeça uma forte expressão geométrica da Grécia, se apoiando na ideia de que a geometria compilada e sistematizada na obra *Elementos* de Euclides (fl. 300 AEC) daria conta de toda a geometria.

No entanto, ao menos três problemas chamaram a atenção dos pensadores gregos devido a sua não resolução: a *quadratura do círculo*, a *duplicação do cubo*, e a *trissecção de um ângulo*. Diversos pensadores de várias áreas e momentos se debruçaram em buscar entender as problemáticas levantadas por essas construções, povoando o imaginário grego como sinônimo de problemas impossíveis.

OS PROBLEMAS

Quadratura do círculo

A quadratura de um círculo consiste em, dado um círculo, encontrar um quadrado que possui a mesma área. Para discutir esse problema, iremos abordar as quadraturas propostas por Antifonte (c. 450 AEC) e Brison (c. 400 AEC), trazidas até nós pelos escritos de Aristóteles (384 - 322 AEC) como falácias lógicas. A quadratura de Antifonte trata de inscrever um polígono regular em um círculo e assim multiplicar o número de seus lados até que o polígono coincida com o círculo, ou seja, trata do raciocínio da exaustão. Já Brison não

[243]Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/IM - UFRJ)

teria propriamente se preocupado em obter uma quadratura mas, ao inscrever e circunscrever um quadrado em um círculo, busca mostrar que esse quadrado existe, através de um argumento do contínuo.

Por outro lado, Arquimedes afirma que quadrar o círculo é o mesmo que obter um triângulo retângulo cujos catetos medem o raio e a medida da circunferência, traçando assim uma relação entre a medida do diâmetro e da circunferência.

As três imagens que abordamos trazem tanto as discussões geométricas referentes aos argumentos e métodos utilizados, como as discussões filosóficas sobre a validade desses métodos. Estes exemplos se mostram interessantes também para o aspecto educacional, ao trabalhar o conceito de áreas de uma forma puramente geométrica.

Duplicação do cubo

A duplicação do cubo trata de encontrar um cubo com o dobro de volume que o original. Interessante notar que a duplicação do quadrado é fácil, como vemos no diálogo Mênon de Platão (c. 428 - c. 348 AEC), enquanto que a do cubo não. Isso nos lembra a questão da resolução geométrica de equações de 2º grau e de 3º grau, onde a complexidade da manipulação espacial de medidas dificulta o avanço dos estudos.

A questão da duplicação do cubo permeou o imaginário grego ao ponto de se contar uma lenda a partir de sua problemática, onde para acabar com a praga que assolava a cidade de Délio, os gregos deveriam construir um altar cúbico com o dobro de tamanho que o original, e assim encontrando grande perplexidade.

Arquitas (c. 428 - 347 AEC) e Eratóstenes (276 - 194 AEC) propõem, cada um, uma solução envolvendo o trabalho de manipular e encontrar duas meias proporcionais entre duas retas. Enquanto Arquitas utiliza-se de um cilindro para isso, Eratóstenes "simplifica" o traçado do problema envolvendo uma construção plana em conjunto com o movimento das figuras.

Essas soluções mostram como a discussão geométrica grega não se limita a expressão clássica de apenas usar régua e compasso para resolver suas questões.

Trisecção de um ângulo

Trata de dividir um ângulo em três partes iguais, o que é necessário para a construção de alguns polígonos regulares.

Arquimedes propõe uma solução a partir da qual constrói uma espiral (Espiral de Arquimedes) com a composição de movimentos. Dentro da perspectiva euclidiana, essa curva não é construtível, mas isso não impede sua validade geométrica, nem mesmo que resultados sejam tirados dela.

CONCLUSÕES

A partir desses exemplos que enumeramos acima, além da óbvia discussão geométrica dentro dos parâmetros gregos, ainda há a discussão histórica da matemática dentro de suas expressões, assim como filosóficas, a partir de seu contexto e uso por pensadores gregos na discussão sobre a verdade, e educacionais ao relacionar temáticas que podem ser exploradas de outras formas envolvendo conteúdos, não necessariamente como exemplos a serem dados dentro da sala de aula, mas que podem enriquecer o trabalho de certos raciocínios para o professor.

BIBLIOGRAFIA

[1] Heath, T. L.; **A History of Greek Mathematics**, v. 1. Nova Iorque: Dover Publications, Inc. 2018 [1924].

[2] Knorr, W. R.; **The ancient tradition of geometric problems**. Nova Iorque: Dover Publications, Inc. 1986.

[3] Papo de Alexandria; **Book 4 of the Collection**. Trad.: Heike Sefrin-Weis. Londres: Springer. 2010.

[4] Thomas, I. (ed.) **Greek Mathematical Works**. Volume I: Thales to Euclid. Trad.: Ivor Thomas. Loeb Classical Library, 335. Cambridge, MA: Harvard University Press. 1957 [1939].

Aritmética em domínios quadráticos

Resolvendo equações diofantinas não lineares via fatoração

Gondim, Rodrigo[244];

Resumo: *Nesse minicurso vamos apresentar um pouco da aritmética de alguns domínios de inteiros quadráticos, dando maior atenção aos que são domínio euclidianos. Lembramos que domínios euclidianos são domínios de ideais principais e portanto, domínios de fatoração única.*

Como queremos trabalhar com fatoração, estaremos particularmente interessados em entender os elementos inversiveis e os elementos irredutíveis, para isso usamos a norma e o traço definidos em domínios quadráticos.

Nosso objetivo final é aplicar a aritmética em tais domínios para tratar certas equações diofantinas não lineares. A ideia central é fatorar a equação em um domínio que seja de fatoração única e utilizar essa fatoração para resolver a equação, primeiramente no domínio e posteriormente nos inteiros.

Palavras-chave: *Equações diofantinas, domínios quadráticos, fatoração única.*

INTRODUÇÃO

Uma equação diofantina é, em sua versão mais clássica, uma equação polinomial com coeficientes inteiros, em pelo menos duas variáveis, para a qual buscamos encontrar soluções inteiras. As primeiras equações diofantinas estudadas foram as lineares, que estavam presentes textos ancestrais na Babilônia, China e India, aparecem no clássico *Arithmetica* de Diophantus e foram totalmente resolvidas por Euler. Estamos interessados em estudar certas classes de equações diofantinas não lineares, utilizando fatoração em domínios quadráticos.

As equações diofantinas não lineares são um objeto clássico em matemática, tendo sido um dos grandes motores para o desenvolvimento da álgebra. Vale lembrar que até mesmo para o último teorema de Fermat foi tentada uma abordagem via fatoração, o problema é que nem todos os anéis de inteiros ciclotômicos são de fatoração única. Gauss já estava interessado no problema de dicernir quando um domínio era fatorial, mas foi Dirichlet um dos que deu maiores contribuições.

A proposta do minicurso é traçar um caminho geodésico suave e elementar para apresentar classes de domínios quadráticos que são de fatoração única, a partir dos domínios euclidianos. Assim, seremos capazes de atacar duas classes de equações diofantinas não lineares com fatoração em tais domínios.

Dentre os problemas que estaremos interessados, destacamos alguns clássicos, como ternas pitagóricas e equações de Pell-Fermat, bem como vários problemas de competições matemáticas internacionais incluindo problemas da IMO.

Títulos e Subtítulos das Seções

1. Aritmética em domínios

    (a) Divisibilidade

[244]UFRPE

   (b) Domínios euclidianos
   (c) Domínios de ideais principais
   (d) Domínios de fatoração única
   (e) Dois lemas úteis em DFU

2. Domínios de inteiros quadráticos
   (a) Corpos quadráticos
   (b) Domínions de inteiros quadráticos
   (c) Domínios quadráticos euclidianos
   (d) Elementos inversíveis e as equações de Pell-Fermat
   (e) Elementos irredutíveis em domínios quadráticos fatoriais

3. Aplicações em certas classes equações diofantinas
   (a) Equações do tipo $N(w) = z^n$
   (b) Equações do tipo $ab = cd$
   (c) Problemas

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREESCU, Titu et al. An introduction to Diophantine equations: A problem-based approach. New York: Birkhäuser, 2010.

[2] DJUKIĆ, Dušan et al. The IMO Compendium: A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009 Second Edition. Springer New York, 2011.

[3] DUMMIT, Evan. Number theory, course notes

[4] FUJIWARA, Guilherme Camarinha. Inteiros de Gauss e Inteiros de Eisenstein. Eureka, v. 14, p. 23-31, 2002.

[5] IRELAND, Kenneth; ROSEN, Michael Ireland. A classical introduction to modern number theory. Springer Science and Business Media, 1990.

[6] STEWART, Ian; TALL, David Orme. Algebraic number theory. London: Chapman and Hall, 1979.

Noções de epistemologia bayesiana

Como o teorema de Bayes formaliza matematicamente nossos níveis de confiança em certos tipos de proposições

Reis, Saulo[245]

Resumo: *Far-se-á neste minicurso uma abordagem introdutória à epistemologia bayesiana enquanto ferramenta de avaliação de níveis de confiança em certos tipos de proposição.*

Palavras-chave: *Epistemologia bayesiana, probabilidade, teorema de Bayes, lógica proposicional, lógica predicativa.*

INTRODUÇÃO

Levando-se em consideração as discussões mais recentes sobre fake news, torna-se mais importante que os cidadãos do presente e do futuro estejam equipados com ferramentas que aumentem a capacidade de distinção entre informações verdadeiras e falsas. Nesse sentido, propõe-se a epistemologia bayesiana como metodologia de avaliação da racionalidade na confiança em algum conjunto de proposições. Este mini-curso objetiva expor as noções básicas dessa epistemologia, e como ela facilita a detecção de certos vieses de julgamento e percepção.

NOÇÕES DE LÓGICA PROPOSICIONAL E PREDICATIVA

Inicialmente, será feita uma breve introdução sobre lógica proposicional e lógica predicativa, estabelecendo um fundamento sólido sobre o qual o restante da epistemologia bayesiana será montado. O objetivo dessa introdução é trazer à lembrança noções e terminologia que serão úteis para o restante do mini-curso.

A seguir, será introduzida a ideia de "distribuição de nível de confiança", que é a ferramenta usada para representar os níveis de confiança de um agente nas proposições de uma linguagem proposicional $\mathcal{L}$. Com isso, se torna possível introduzir a noção de de "nível de confiança incondicionado", que nada mais é do que uma métrica (probabilidade) do quanto um agente confia numa certa proposição P ser verdadeira sem condicionamentos explícitos. Esse nível de confiança será designado por $p(P)$.

AXIOMAS DE KOLMOGOROV

Para um agente ser considerado racional, a condição necessária é que seu nível de confiança (com sua respectiva distribuição probabilística incondicionada) satisfaça às 5 principais regras da epistemologia bayesiana. As 3 primeiras dessas regras são os axiomas da probabilidade de Kolmogorov, que nada mais são do que restrições matemáticas a serem impostas sobre aquelas distribuições de probabilidade. São elas:

[245]Universidade Presbiteriana Mackenzie

1. Axioma da não negatividade: para qualquer proposição P da linguagem $\mathcal{L}$, o nível de confiança atribuída a ela é sempre maior ou igual a zero, isto é, $p(P) \geq 0$.
2. Normalidade: para qualquer proposição tautológica T da linguagem $\mathcal{L}$, o nível de confiança nela é sempre 1, isto é, $p(T) = 1$.
3. Aditividade finita: na linguagem $\mathcal{L}$, para quaisquer proposições P_1 e P_2 que sejam mutuamente excludentes, o nível de confiança na proposição disjuntiva $P_1 \vee P_2$ é a soma dos níveis de confiança nas proposições isoladas, isto é, $p(P_1 \vee P_2) = p(P_1) + p(P_2)$.

O mini-curso se propõe a detalhar a importância de cada um dos axiomas para a manutenção da racionalidade de uma distribuição de níveis de confiança.

Fórmula da razão, condicionalização e teorema de Bayes

A fórmula da razão e a condicionalização representam as duas outras regras da epistemologia bayesiana que precisam ser satisfeitas pelo nível de confiança (e sua distribuição probabilística) de um agente para que este seja considerado racional.

Com a fórmula da razão, um agente atualiza seu nível de confiança numa proposição hipotética H após tomar conhecimento sobre a verdade de outra proposição E. Esse novo valor do nível de confiança é dado por $p(H|E) = \dfrac{p(H \cap E)}{p(E)}$. Já com a condicionalização, o nível de confiança em H que o agente possui no instante t_j, após ter aprendido sobre E e, portanto, posterior ao instante t_i, é representado por $p_j(H) = p_i(H|E)$.

Através dessas duas noções, mostra-se que o Teorema de Bayes é uma ferramenta crucial para atualizar níveis de confiança à medida que ocorram novas condicionalizações – ou seja, evidências novas surjam. Pretende-se, nesse ponto do mini-curso, exemplificar como o Teorema de Bayes serve para formalizar o aprendizado através de novas evidências.

Vieses de julgamento ou paradoxos

Através do Teorema de Bayes (e do formalismo epistemológico bayesiano), é possível evitar certos vieses de julgamento – como o viés da taxa-base, nos casos relatados por Gigerenzer, e também por Tversky e Kahneman – e também certos paradoxos quanto a posicionamentos epistemológicos – como no paradoxo da loteria. Este será o último tópico do mini-curso, explicitando como esse paradoxo acontece enquanto postura epistemológica, e também como evitar aqueles vieses de percepção ou julgamento.

Bibliografia

[1] Titelbaum, Michael G. **Fundamentals of Bayesian Epistemology 1: Introducing Credences**. Oxford University Press, 2022.

[2] Reis, Saulo Cavalcante dos. **Teorema de Bayes: uma proposta para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT) – Universidade Federal de São Paulo. Diadema, 2022.

Ferramentas para o desenvolvimento da resiliência matemática

Contribuições do Brasil e Reino Unido

Pará, T. S.[246], Carmo, J. S.[247] e Alves, K. L. F.[248]

Resumo: *Neste minicurso iremos caracterizar a Ansiedade Matemática, seu contexto e apresentar algumas ferramentas de enfrentamento da Ansiedade Matemática. Tais ferramentas visam o desenvolvimento de um novo construto chamado Resiliência Matemática e incluem autocontrole emocional, hábitos de estudo e modelos que visam o bem estar do aprendiz na sua jornada de aprendizagem da matemática.*

Palavras-chave: *Ansiedade matemática, resiliência matemática, autocontrole emocional.*

INTRODUÇÃO

A ansiedade matemática é frequentemente definida a partir de reações emocionais negativas à matemática. Embora enfatizar reações emocionais negativas seja bastante útel ao entendimento geral, uma definição mais precisa de ansiedade matemática se faz necessária, tendo em vista que o fenômeno "ansiedade" envolve não apenas reações emocionais, mas também comportamentos, pensamentos e sensações fisiológicas específicas. Carmo et al. [5] propõem uma definição de ansiedade matemática que contempla três dimensões: (i) o contexto específico em que ocorrem reações de ansiedade; (ii) as reações propriamente ditas; (iii) as consequências geradas por essas reações nos contextos específicos. Assim, o contexto específico, que funciona como gatilho disparador de reações de ansiedade, refere-se a situações ou estímulos (visuais, auditivos) que sinalizam a necessidade de apresentação de habilidades matemáticas. Os exemplos são diversos, como estar diante de uma operação matemática a ser solucionada, ser chamado ao quadro para resolver um problema de matemática, o dia da prova de matemática, as questões da prova de matemática etc. Diante de contextos como esses, surgem reações típicas de ansiedade que podem ser divididas em três tipos: reações fisiológicas desagradáveis (ex., pressão alta, aumento na frequência cardíaca, dificuldade de respirar); reações cognitivas (esquecimento, sensação de fracasso e incompetência, lembranças de regras como "matemática é difícil" ou autorregras como "sou péssimo em matemática"); e reações operantes (comportamentos de fuga ou de esquiva). Como consequências, podemos identificar um aumento na ocorrência de erros, seguidos de punição por parte do professor. Além disso, Carmo et al. [5] ressaltam que a essa definição operacional (composta pelos três elementos: contextos - reações - consequências), devemos acrescentar três parâmetros que auxiliam na identificação de ansiedade matemática: (i) frequência com que a tríade "contextos - reações - consequências" ocorrem na vida de um indivíduo; (ii) o quanto o indivíduo percebe essa tríade como altamente aversiva e incapacitante; (iii) a sensação de incontrolabilidade da situação aversiva. A definição operacional aqui descrita

[246] Fundação de Apoio à Escola Técnica - RJ. Este autor foi apoiado pelo CNPq e FAPERJ.

[247] Universidade Federal de São Carlos. Este autor foi apoiado pelo CNPq.

[248] Universidade Federal de São Carlos.Este autor foi apoiado pelo CNPq.

tem sido a base para intervenções que visam a redução de ansiedade matemática, e o desenvolvimento do que vem sendo chamado de Resiliência Matemática (RM).

O termo resiliência é originário da Física e foi trazido para o campo da saúde humana por Brandão et al. [3], e se refere a duas possibilidades de reação: resistir às pressões externas, mantendo-se saudável ou lidar de maneira adaptável e produtiva às situações opressoras que podem fragilizar indivíduo. A resiliência matemática pode ser definida como a capacidade de persistir na aprendizagem da matemática, apesar da vivência de experiências negativas e frustrantes anteriores na tentativa de aprender tal disciplina [11]. Os autores propõem quatro fatores preditivos para o sucesso em matemática: valor (importância atribuída à matemática); esforço; crescimento; resiliência. O minicurso explorará o que é estudar, que ações estão presentes no comportamento de estudar; as ações fundamentais do ato de estudar e o contexto em que elas ocorrem; e o papel dos pais e professores no reforço e manutenção de padrões que promovam a aprendizagem. Em particular, com relação ao papel dos pais, chamamos a atenção para iniciativas como o livro de Rosemary Russell [15], que está em vias de ser publicado no Brasil e que oferece orientações aos pais, que podem impactar positivamente o futuro de milhares de alunos brasileiros. Apresentaremos a seguir o Programa de Redução da Ansiedade Matemática (UFSCAR/Brasil) e Ferramentas MRT - *Mathematical Resilience Toolkit* (Reino Unido).

FERRAMENTAS PARA O DESENVOLVIMENTO DA RM

Programa de Redução da Ansiedade Matemática

Um programa de auxílio a estudantes com ansiedade matemática, com duração média de 08 semanas, foi desenvolvido por Carmo e seus estagiários de Psicologia Escolar da Universidade Federal de São Carlos e relatado em [13] e [6]. O programa consiste em fornecer ao estudante ferramentas que o ajudarão no: (i) autocontrole emocional diante de situações que envolvem matemática, (ii) desenvolvimento de hábitos de estudos adequados, e (iii) desenvolvimento de habilidades sociais em sala de aula. As etapas do programa são descritas a seguir.

Etapa 1. Identificação de graus alto ou extremo de ansiedade matemática, por meio da Escala de Ansiedade Matemática - EAM [4] e da técnica de brainstorming que consiste em solicitar ao estudante que escreva tudo o que lembra de imediato ao ler a palavra "matemática" escrita no centro de uma folha de papel entregue a este.

Etapa 2. Estudantes que apresentam alto ou extremo grau de ansiedade matemática são convidados a participarem de sessões individuais que consistem em: *Passo 1.* Responder a um inventário de hábitos de estudo em matemática , em sala de aula e em casa. Essas informações, juntamente com os dados da EAM e do brainstorming, são utilizadas para o planejamento do Passo 2; *Passo 2.* Treino de respiração diafragmática, que é uma técnica comprovadamente eficaz no controle de ansiedade em geral [10]. Treino de relaxamento muscular progressivo de Jacobson, amplamente utilizada para ensinar o indivíduo a relaxar cada grupo muscular diante de situações que geram ansiedade [2]. Treino de hábitos adequados de estudo em sala de aula e em casa [7]; *Passo 3.* Reaplicação da EAM, brainstorming e inventário de hábitos de estudos em matemática. Essa reaplicação auxilia na identificação dos progressos realizados pelo estudante após o Passo 2 e quando comparada aos resultados iniciais; *Passo 4.* Follow-up ou reaplicação do Passo 3 passados cerca de 30 dias, de modo a constatar se o que o estudante aprendeu em termos de autocontrole emocional e hábitos de estudo se mantém com o passar do tempo, bem como se a redução de ansiedade matemática permanece.

Ferramentas MRT - Mathematical Resilience Toolkit

Modelo Manual do Cérebro e Resposta de Relaxamento. Dowker et al.[8] apresentam um o Estado da Arte sobre a Ansiedade Matemática. O artigo revisa estudos anteriores e destaca importantes descobertas como, por exemplo, o que acontece no sistema nervoso central, mais especificamente no cérebro, durante o fenômeno da AM. Indivíduos com alta AM tendem a mostrar menos atividade nas áreas do córtex frontal e sulco intraparietal esquerdo na antecipação e realização de tarefas matemáticas do que indivíduos com menor grau de AM [12] . Young et al. [17] também encontraram atividade reduzida na região do córtex pré-frontal em crianças de 7 a 9 anos que apresentavam AM. Além disso, também identificaram que a AM está relacionada a altos níveis de atividade nas regiões da amígdala que está relacionada ao processamento de emoções negativas como o medo. Hoje sabemos que a amígdala, localizada na região límbica do cérebro, é peça fundamental para nossa sobrevivência. Quando expostos a estímulos que ameaçam a nossa segurança como um predador ou perigo iminente, a amígdala é ativada desencadeando uma sequência de respostas fisiológicas como a liberação dos hormônios adrenalina e cortisol, dilatação de vasos sanguíneos, aumento da frequência cardíaca e da respiração, preparando o corpo para lutar ou fugir. Essa resposta é chamada de "resposta de luta ou fuga" (do inglês *fight or flight response*). Esta resposta fisiológica pode ser emitida por indivíduos que apresentam AM e que se sentem ameaçados diante de estímulos que envolvem a matemática. Neste sentido, a rede de Resiliência Matemática propõe a utilização do modelo *Hand Model of the brain* (HMB, conhecido no Brasil por Modelo Manual do Cérebro) elaborado por Siegel[16] em 2010. Este modelo consiste em uma forma didática de explicar o que acontece no cérebro quando uma pessoa se percebe diante de uma ameaça (Figura 1(a)).

Modelo de Zona de Crescimento. O Modelo da Zona de Crescimento (do inglês *Growth Zone Model (GZM)*) consiste em um diagrama (ver Figura 1 (b)), onde temos um primeiro círculo verde, representando a zona de conforto onde o aluno se sente seguro. Este é rodeado por um anel laranja, representando a zona de crescimento, onde o aluno enfrenta desafios. A área mais externa é vermelha, representando a zona de ameaça, onde o aluno experimenta perigo (consciente ou inconscientemente). As zonas verde e laranja correspondem à mão fechada no Modelo Manual do Cérebro, e a zona vermelha corresponde à mão aberta. Este modelo fornece uma estrutura para os alunos distinguirem entre desafio percebido e ameaça, permitindo nomear e comunicar seus sentimentos atuais. Os alunos podem ser apresentados ao modelo em uma breve seção de aula e incentivados a usar suas próprias palavras para descrever os sentimentos que experimentaram quando confrontados com situações percebidas como confortável, desafiadoras ou ameaçadoras, relacionado ou não à matemática [14]. O diagrama ilustra muito bem a diferença entre estar na "zona de conforto" (protegido, mas sem possibilidade de crescimento pessoal) e estar na "zona de crescimento" (espaço dinâmico em que há oportunidade de crescimento, de enfrentamento eficiente da situação adversa) e a necessidade de evitar a opressora "zona de ansiedade". A resiliência matemática manifesta-se nessa passagem da zona de conforto para a zona de crescimento, prosperando nessa zona, podendo sair da zona de ansiedade quando esta surge.

(a) (b)

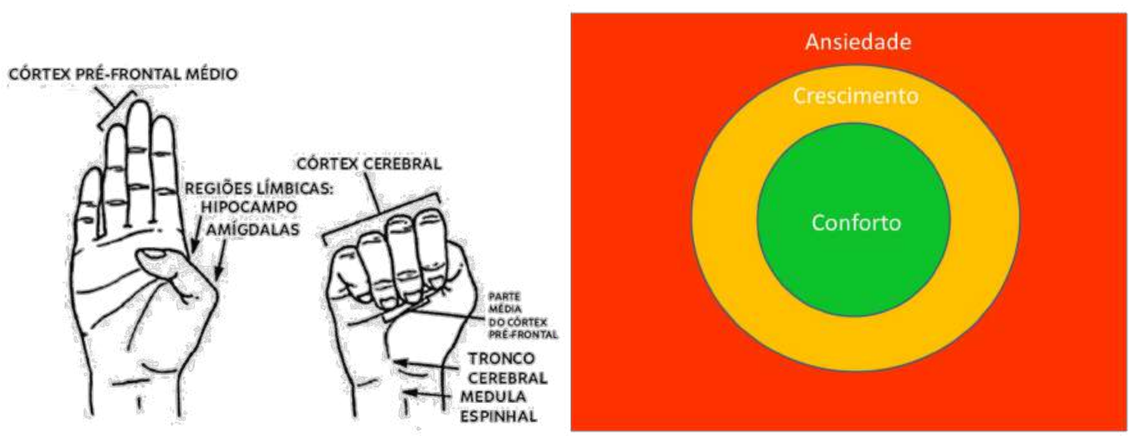


Fig. 83: (a) Modelo manual do cérebro, adaptado de Siegel (2010) e (b) Diagrama representativo da zona de crescimento, baseado em Lee e Johnston-Wilder (2017)

METODOLOGIA DO MINICURSO E PERSPECTIVAS FUTURAS

O minicurso adotará a metodologia de aulas expositivas e dialogadas e trará momentos de prática das técnicas de autocontrole emocional utilizadas para desenvolvimento da RM. Recursos como slides em powerpoint/canvas e vídeos serão utilizados.

Há ainda muito a se aprender sobre ansiedade matemática, assim como sobre o desenvolvimento da resiliência matemática. No Brasil, o foco tem sido o entendimento da questão das micro agressões (vivências negativas) como uma das raízes da ansiedade matemática. A busca por uma matemática inclusiva, ou seja, de que todos podem aprender matemática e todos precisam saber utilizá-la nos diversos contextos sociais é um esforço que vem sendo empreendido por diversos países, inclusive o Brasil. Parte desse esforço vem se materializando através da criação da Rede de Resiliência Matemática (Mathematical Resilience Network) sob coordenação do Reino Unido, como forma de compartilhar conhecimento e práticas em busca de uma matemática mais inclusiva.

BIBLIOGRAFIA

[1] BENSON, H. The relaxation response: its subjective and objective historical precedents and physiology. **Trends in Neurosciences**, v. 6, p. 281-284, 1983.

[2] BORGES, E.; FERREIRA, T. Relaxamento: Estratégia de intervenção no stress. **Revista Portuguesa de Enfermagem de Saúde Mental** (10), p. 37-42, 2013.

[3] BRANDÃO, J. M.; MAHFOUD, M.; GIANORDOLI-NASCIMENTO, I. F. A construção do conceito de resiliência em psicologia: discutindo as origens. **Paidéia**. Ribeirão Preto, v. 21, n. 49, p. 263-271, 2002.

[4] CARMO, J.S.; CUNHA, L. O.; ARAÚJO, P. V. S. Analise comportamental da ansiedade à matemática: conceituação e estratégias de intervenção [Behavioral analysis of anxiety in mathematics: Conceptualization and intervention strategies]. In W. C. M. P. Silva (Ed.), **Sobre comportamento e cognição: análise comportamental aplicada**, p. 185–195, Santo André, Brazil:ESETec, 2008.

[5] CARMO, J. S.; GRIS, G.; PALOMBARINI, L.S. Mathematics Anxiety: Definition, Prevention, Reversal Strategies and School Setting Inclusion. In: Kollosche, D., Marcone, R., Knigge, M., Penteado, M.G., Skovsmose, O. (eds) **Inclusive Mathematics Education**. Springer, Cham., 2019. `https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-024`

[6] CARMO, J. S.; HENKLAIN, M. H. O. . Ansiedade à matemática: uma leitura analítico-comportamental. In: Aline Beckmann de Castro Menezes. (Org.). **Ensinar e aprender: Desafios para educação do séc. XXI**. 1ed.Curitiba: ABPMC, v. , p. 98-118, 2022.

[7] CORTEGOSO, A. L.; CHRISTOVAM, A. C. C.; COSER, D. S. **Aprendendo e ensinando crianças a estudar: manual autoinstrutivo para famílias e professores**. São Carlos, SP: Edufscar, 2019.

[8] DOWKER, A.; SARKAR, A.; LOOI, C. Y. Mathematics Anxiety: What Have We Learned in 60 Years? **Frontiers in Psychology**, 7, Article 508, 2016. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.00508

[9] JOHNSTON-WILDER, S.; LEE, C. Developing Mathematical Resilience. In: BERA Annual Conference 2010, Sep 2010, Coventry:University of Warwick, 2010.

[10] KHNG, K.H. A better state-of-mind: deep breathing reduces state anxiety and enhances test performance through regulating test cognitions in children, **Cognition and Emotion**, 31(7), p. 1502-1510, 2017.

[11] KOOREN, J.; WELSH, M.; McCOACH, D. B.; JOHNSTON-WILDER, S.; LEE, C. Mathematical resilience: An application and exploration of motivational constructs related to resilience in the study of mathematics. In: American Educational Research Association (AERA) 2013 Annual Meeting: Education and Poverty: Theory, Research, Policy and Praxis, San Francisco, CA, USA, 2013.

[12] LYONS, I. M.; BEILOCK, S. L. . When math hurts: math anxiety predicts pain network activation in anticipation of doing math. **PloS one**, 7(10), e48076, 2012.

[13] MENDES, A. C.; CARMO, J. S.; MUNIZ, M. Aplicação de um programa de auxílio a uma estudante com ansiedade à matemática. In UTSUMI, Miriam C. (Org.), **Pesquisas em psicologia da educação matemática: Avanços e atualidades**. São Carlos, SP: Pedro e João, pp. 161-1881, 2020.

[14] PARÁ, T.; JOHNSTON-WILDER, S. Addressing Mathematics Anxiety: A Case Study in a High School in Brazil. **Creative Education**, v. 14, n. 2, p. 377-399, 2023.

[15] RUSSELL, R. **Help your child do maths, even if you don't: 10 things that anyone can do to help their child with maths**. AR & RR Education, 2020.

[16] SIEGEL, D. (2010). **Mindsight: Transform Your Brain with the New Science of Kindness**. Oneworld Publications.

[17] YOUNG, C. B.; WU, S. S.; MENON, V. The neurodevelopmental basis of math anxiety. **Psychol. Sci.** 23, p.492–501, 2012. doi: 10.1177/0956797611429134

Oficinas

Mosaicos de Escher

Um encontro entre a arte e a matemática

Aquino, Andréia Araújo de Farias[249]; Tsuchiya, Luciana Yoshie[250] e Silva, Thiago Vieira[251]

Resumo: *Neste trabalho, propomos uma oficina em que os participantes irão utilizar algumas técnicas do artista holandês Maurits Cornelis Escher para compor obras de artes visuais. Para que as técnicas possam ser compreendidas e aplicadas, serão abordados os conceitos matemáticos de polígonos regulares e suas propriedades e de isometrias no plano. O uso das cores para criar contrastes e sensação de profundidade também serão trabalhados. A oficina tem por objetivos oportunizar os participantes a compreenderem melhor os conceitos matemáticos abordados por meio das atividades práticas, atribuindo-lhes significado e vislumbrar possibilidades de interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática.*

Palavras-chave: *Arte, matemática, isometrias, Escher.*

INTRODUÇÃO

A arte e a matemática, desde os seus primórdios, sempre mantiveram uma estreita relação. Dentre os diversos artistas que fizeram uso de conceitos matemáticos para criar suas obras, destaca-se o artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972). Segundo Siqueira et al (2016) as obras de Escher "são conhecidas mundialmente por representar construções impossíveis, preencher regularmente o plano, explorar o infinito e as metamorfoses". Escher ficou muito famoso entre os matemáticos de sua época pelo fato de sua obra utilizar conceitos geométricos de transformações no plano, as chamadas de isometrias, de uma maneira inovadora.

Nesta oficina, intitulada "Mosaicos de Escher: um encontro entre a Arte e a Matemática", propomos a realização de atividades práticas em que os participantes, utilizando algumas técnicas de Escher para a confecção de mosaicos, criem suas próprias obras. Para isto, serão abordados os conceitos matemáticos de isometria no plano (reflexão, rotação e translação) e polígonos regulares, além de conceitos artísticos que ajudarão na composição das obras, como o uso de cores e contrastes.

Os objetivos da oficina são relacionar a arte e a matemática, mostrando aos participantes as influências mútuas das duas áreas; compreender e aplicar a rotação, translação e reflexão de figuras para preencher o plano; utilizar conhecimentos matemáticos e artísticos para compor uma obra, evidenciando a interdisciplinaridade entre as duas áreas.

[249]Instituto Federal do Paraná, Campus Paranavaí
[250]Instituto Federal do Paraná, Campus Paranavaí
[251]Instituto Federal do Paraná, Campus Paranavaí

MOSAICOS - A ARTE DO PREENCHIMENTO DO PLANO

De acordo com a Wikipedia mosaico é um aglomerado de pequenas peças (tesselas), que formam um determinado desenho, de forma que o objetivo do desenho é preencher o plano, de modo que não haja nem espaços vazios e nem sobreposição de peças. Os seres humanos criam mosaicos há mais de 5500 anos, sendo o mais antigo dos mosaicos datado de 3500 a.C. na cidade de Ur, na Mesopotâmia.

Ao longo da história, diversos povos criaram técnicas para a confecção de mosaicos, dando-se destaque aos árabes, que criaram belíssimos mosaicos utilizando apenas padrões geométricos. Uma visita de Escher, em 1922 a Alambra, Espanha, o teria inspirado a trabalhar com a pavimentação do plano, desenvolvendo técnicas para a criação de suas obras.

Uma das técnicas desenvolvidas por Escher, consiste em "retirar uma parte de um lado de um polígono regular e fixar de outro lado, repetindo-se esta operação seguindo sempre o mesmo processo, até que se obtenha a figura desejada" (Alves, 2014). Nesta técnica, parte-se do triângulo equilátero, do quadrado ou do hexágono regular, que são os únicos polígonos regulares que preenchem o plano utilizando-se apenas um tipo de figura. Em seguida, aplica-se sobre a figura criada a rotação, a translação e/ou a reflexão, para que o plano seja preenchido sem sobreposições ou espaços vazios. Após dar destaque às formas, por meio da pintura, obtém-se um mosaico.

IMPLEMENTAÇÃO DA OFICINA "MOSAICOS DE ESCHER: UM ENCONTRO ENTRE A ARTE E A MATEMÁTICA"

Para a execução desta oficina serão necessários polígonos regulares em EVA e papel, cartolina americana, papel para aquarela, tinta aquarela, projetor, lápis, borracha, régua, cola branca, pincel e tesoura.

Primeiramente, os participantes separados em pequenos grupos, irão manusear polígonos regulares (triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos e octógonos) para determinar com quais deles é possível preencher um plano, utilizando apenas um tipo de polígono de cada vez. Com as conclusões dos grupos, as ministrantes irão explorar os conceitos matemáticos que definem se um polígono regular pode ou não ser utilizado para preencher um plano, a saber, o ângulo interno deve ser um divisor de 360°. Na sequência, será apresentada a definição de mosaico e um pequeno histórico dos mosaicos, dando destaque aos mosaicos geométricos e ao trabalho e obra de Escher. Neste momento, também serão abordados os aspectos artísticos da composição dos mosaicos, como o uso das cores, sombreamentos e contornos.

Após a introdução do tema, os participantes passarão a produzir mosaicos utilizando duas técnicas de Escher, com o auxílio das ministrantes. Na primeira técnica, os participantes partirão de um quadrado de papel e formarão uma nova figura por meio de recortes e colagens. A nova figura servirá de base para o preenchimento do plano, no caso, uma folha de papel próprio para aquarela, por meio de sua translação. O conceito de translação será tratado no decorrer da própria atividade. Em seguida, os participantes deverão aquarelar sua composição, formando um mosaico. Na segunda técnica, os participantes partirão de um triângulo equilátero ou de um hexágono regular de papel, e formarão uma nova figura por meio de recortes e colagens de forma similar à primeira técnica, com a diferença de que utilizarão a rotação e a translação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A oficina "Mosaicos de Escher: um encontro entre a Arte e a Matemática" pretende proporcionar aos participantes uma experiência interdisciplinar de conceitos geométricos. Visto que os conceitos matemáticos apresentados na oficina podem perpassar por diversos níveis de ensino, é possível aplicar a oficina para diferentes públicos, fazendo-se as adaptações necessárias. Acreditamos que a abordagem dos conceitos de polígonos regulares e isometrias no plano contemplando a aplicação destes conceitos conferirá aos mesmos maior significado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Alves, C. M. F.; **O estudo da simetria através da Arte de Maurits Cornelis Escher.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Rio de Janeiro, 2014.

[2] Siqueira, V. L; Santos, V. C.; Lorenzoni, C. A. C. A; Souza, M. G.; Viana, W. S.; Majani, H. S.; **O "mundo mágico de Escher": explorando isometrias no ensino fundamental.** In: Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 13 a 16 julho de 2016.

Matemática em Python

Uma introdução ao ecossistema científico de Python.

Milanés Barrientos, Aniura[252]

Resumo: *O ecossistema científico de Python é cada vez mais utilizado como apoio a atividade matemática e também ao seu ensino e aprendizagem. Esta oficina traz uma pequena mostra das possibilidades desses recursos através de notebooks Jupyter estruturadas na forma de tutoriais. Com isto, visamos estimular os participantes a continuar aprofundando no tema de acordo com seus interesses e particularmente a considerar o uso de Python nas aulas de matemática no Ensino Médio.*

Palavras-chave: *Recursos computacionais, ensino de matemática, ecossistema científico de Python.*

INTRODUÇÃO

Entre todas as linguagens mais usadas nas áreas de ciências exatas e nas engenharias, Python, tem várias vantagens. Além de possuir uma sintaxe muito simples e consistente, Python dispõe de uma grande quantidade de bibliotecas padrão e de uma grande comunidade de usuários e desenvolvedores. Além disso, tem um bom suporte para usar código escrito em outras linguagens e é disponibilizado de forma gratuita.

Uma das maneiras de executar código escrito em Python é usando notebooks Jupyter. Uma notebook Jupyter é um ambiente computacional web para criação de documentos para a plataforma Jupyter. Esses documentos são estruturados num formato de lista ordenada de células de entrada/saída que podem conter, por exemplo, código, texto, símbolos matemáticos e gráficos. A versatilidade das notebooks Jupyter faz com que esse tipo de documentos seja muito usado com fins didáticos.

A OFICINA

Embora Python seja uma linguagem de propósito geral, ela conta com várias bibliotecas que, combinadas, formam o chamado *ecossistema científico de Python*. Nesta oficina mostramos como utilizar várias dessas bibliotecas para explorar e ilustrar diferentes conceitos matemáticos.

Todas as noções utilizadas são compreensíveis para um público com conhecimentos de Ensino Médio. Assim, esta oficina também constitui uma proposta de uso de recursos computacionais no ensino e a aprendizagem de matemática nesse nível. Os materiais foram todos organizados como notebooks Jupyter. A versatilidade dessa plataforma enriquece muito a exposição e favorece a autonomia dos participantes.

A oficina foi dividida em dois encontros.

Encontro 1:

1. Introdução a ferramentas básicas de Python.

[252]Departamento de Matemática, UFMG

2. A segunda parte do encontro começa com a exibição das imagens abaixo.

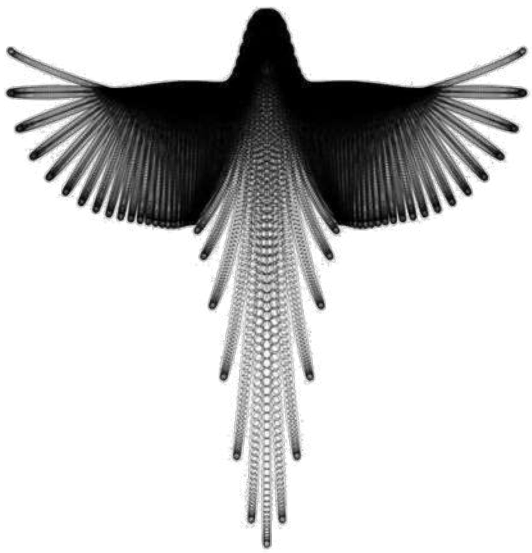


Fig. 84: Figura original

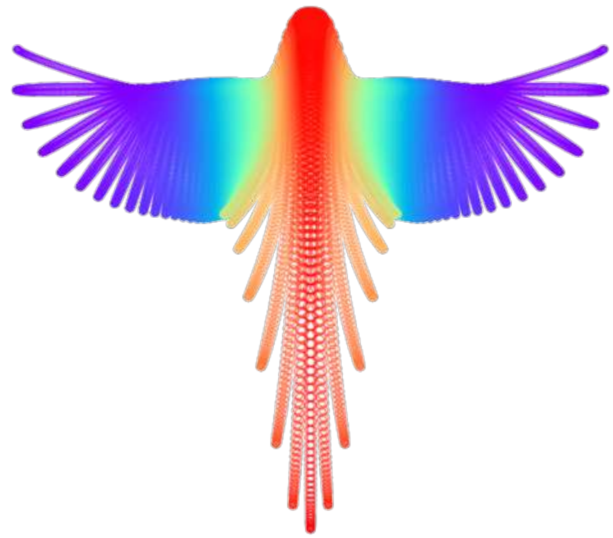


Fig. 85: Versão colorida

A figura 84 foi publicada pelo artista/matemático iraniano Hamid Naderi Yeganeh neste site. Ela é construída como uma união de circunferências. Usando Python e as fórmulas que o autor publicou, criamos a variação colorida mostrada na figura 85.

A proposta para esta parte do primeiro encontro consiste em construir o conhecimento que permitirá se não criar, ao menos compreender o código que produziu a imagem 85. Para isto, na nootebook correspondente, apresentamos diferentes tópicos relacionados com a representação gráfica de pontos, funções e curvas usando as bibliotecas NumPy e Matplotlib.

Encontro 2:

1. Introdução ao trabalho com matrizes usando as bibliotecas NumPy e Matplotlib.
2. A imagem abaixo foi construída em Python, usando rotações e contrações no plano.

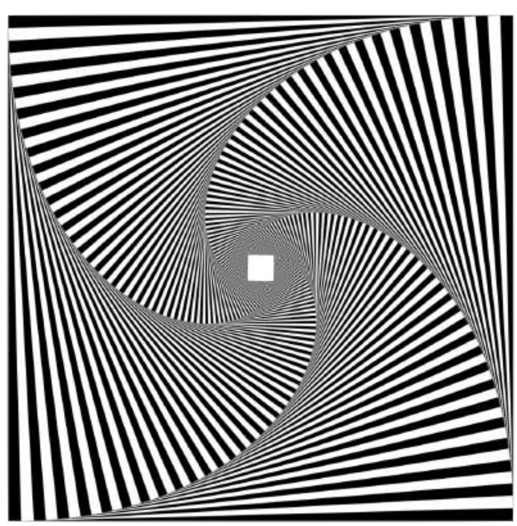


Fig. 86: Rotações e contrações de um quadrado

> Com esta imagem pretendemos iniciar a segunda parte deste encontro. A partir daí apresentaremos vários comandos e noções (rotação e contração no plano) estruturadas de forma a facilitar a compreensão ou mesmo a construção do código que produziu essa imagem.

Além disso, como parte da oficina também são propostos exercícios computacionais com os que se pretende sistematizar os tópicos apresentados e ilustrar o uso do Python como ferramenta de resolução de problemas matemáticos e de experimentação na investigação de conjecturas.

Todos os materiais da oficina podem ser acessados neste repositório de GitHub.

BIBLIOGRAFIA

[1] LANGTANGEN, H. P. **A Primer on Scientific Programming with Python**, Quinta Edição. Springer, 2016.

[2] **Sítio web de Matplotlib**. Disponível em `https://matplotlib.org/`. Acesso em: 18 fev. 2024.

[3] **Sítio web de NumPy**. Disponível em `https://numpy.org/`. Acesso em: 18 fev. 2024.

[4] **Repositório no Github** Disponível em `https://github.com/aniura/Matematica_em_Python/`. Acesso em: 18 fev. 2024.

Matemágica: "na matemática tem mágica?"

Lira, Anna Lethycia de Almeida[253]; Nascimento, Carolini Carvalho[254]; Mateus, Débora de Brito[255]; Leite, Flávia de Melo[256]; Santos, Jeniffer Francisca dos[257]; Gomes, Lucas Barreto[258]; Silva, Mônica Oliveira da[259]; Rocha, Anne Ellen Fernandes[260]; Santos, Gilberto Rodrigues dos[261] e Tamarozzi, Antonio Carlos[262]

Resumo: *A utilização de materiais lúdicos para o ensino da Matemática tem uma boa aceitação por parte dos estudantes e professores como complemento às aulas, em particular as atividades conhecidas como "matemágica". Baseados em truques, macetes e desafios com cálculos atraentes ou rápidos, podem se tornar um veículo motivador para o processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, na maioria dos casos, o raciocínio lógico envolvido não é completamente explorado, deixando um potencial importante de relevância matemática escondida. O grupo PET Matemática (PETMAT), vinculado ao curso de Matemática do Campus de Três Lagoas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS/CPTL), têm explorado estas ideias aplicando-as em atividades de ensino, apresentadas nesta oficina.*

Palavras-chave: *Matemática, ensino básico, ensino-aprendizagem, mágica.*

DESCRIÇÃO

O PETMAT sendo um grupo integrante ao Programa de Educação Tutorial (Sesu/MEC), desenvolve atividades de ensino e extensão intimamente ligadas a formação e capacitação do professor de Matemática, seja através de minicursos e oficinas destinadas aos graduandos, como ações em colaboração aos professores já formados e que atuam no Ensino Básico. Nestas duas vertentes, o ambiente do Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é amplamente utilizado com os materiais e jogos adquiridos ou produzidos pelos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UFMS/CPTL.

[253]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, annalethyciaa@gmail.com
[254]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, carolini.acad@gmail.com
[255]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, debora.brito.mateus11@gmail.com
[256]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, flavia.uabitapevi.adm4@gmail.com
[257]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, jeniffersantos2001tl@gmail.com
[258]Petiano do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, lucasbgomes72@gmail.com
[259]Petiana do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, monicaoliveira.5casagrande@gmail.com
[260]Aluna do Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), UFMS, campus Três Lagoas, anne.ellen19@gmail.com
[261]Tutor do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas, gilberto.rodrigues@ufms.br
[262]Tutor egresso do grupo PET Matemática, UFMS, campus Três Lagoas , antonio.tamarozzi@ufms.br

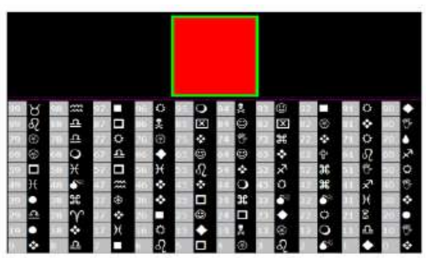
Dentre as atividades, destacamos apresentações com truques e mágicas que, muitos denominam de Matemágicas. Nesse contexto, esta oficina tem como objetivo utilizar esse recurso didático e metodológico para o ensino de Álgebra, um dos campos mais desafiadores da Matemática, devido a abstração presente nos conteúdos, com o intuito de quebrar paradigmas em relação ao ensino e aprendizagem da disciplina. A ideia é utilizar mágicas como uma alternativa didática para o ensino de Matemática, uma vez que elas introduzem o aluno a uma função ativa de encontrar soluções matemáticas pelo estímulo do desafio e da competição dos jogos. Por outro lado, não podem constituir tão somente recursos para aulas mais divertidas, e neste caso, exploramos os conteúdos matemáticos que explicam o funcionamento de cada uma delas bem como incentivamos a busca de generalizações de conceitos. A oficina foi programada com uma carga horária de 4 horas com apresentações descritas a seguir e que contemplam conceitos básicos da Matemática, como: expressões algébricas, expansão decimal, progressões e paridade.

Um truque com expansão decimal

O mágico Kardini divulga seus trabalhos na Internet (http://kardini.com.br/telepatiav.htm), sendo um deles bastante intrigante: solicita ao usuário escolher um número de dois dígitos e efetuar operações simples com os mesmos. Em seguida, exibe uma tabela misteriosa com símbolos acompanhados de números e pede que o usuário procure o símbolo correspondente ao número encontrado. E o mágico sempre acerta o símbolo. A apresentação fica interessante pela interatividade e também pelo fato de que, em cada ativação do site, nova tabela e símbolos são gerados causando ainda mais mistério. Esta atividade utiliza um truque de mágica para mostrar como detectar padrões e pode ser utilizada para introduzir o conceito de expansão decimal aos alunos. Os materiais necessários para realizá-la são: um projetor, acesso a internet e lousa.

Para iniciar o truque, os palestrantes pedirão voluntários para participar da mágica. Os voluntários realizarão mentalmente os passos descritos no site. Espera-se que o público perceba o padrão das respostas: os cálculos sempre resultam em números múltiplos de 9, por isso o símbolo sempre será o da diagonal secundária que tem números divisíveis por 9. A apresentação é concluída revelando o funcionamento matemático envolvido na brincadeira.

Figura 1



Fonte: arquivos do Grupo PET Matemática da UFMS/CPTL

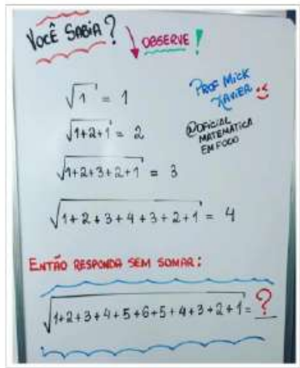
Matemática dos CPF's

Nesta atividade será abordada a matemática por trás do Cadastro de Pessoas Físicas (CPF), com o objetivo de descobrir os dois últimos dígitos. Para a realização, faz-se necessário papel, caneta, lousa e giz. Todas as pessoas que cadastram-se recebem um número na forma ABC.DEF.GHI-JK, em que A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K são números naturais. Os primeiros oito dígitos são definidos pela base da Receita Federal, o dígito I representa a Região Fiscal responsável pela inscrição, enquanto os dígitos J e K representam os dígitos verificadores do CPF. O apresentador solicitará um voluntário para determinar os dígitos verificadores de seu CPF. O voluntário por sua vez deverá informar os nove primeiros dígitos, que serão multiplicados por uma sequência (10,9,8,7,6,5,4,3 e 2) e em seguida somados, assim, efetua-se a divisão desta soma por 11 e observa-se o resto dessa divisão, se o resto for 0 ou 1, então o primeiro dígito verificador é 0, caso contrário, o dígito verificador procurado (d_1, d_2) é dado por $d_1 = 11 - r$, em que r é o resto dessa divisão por 11, analogamente, calcula-se o segundo dígito verificador, tendo em vista que, a multiplicação começa a partir do segundo algarismo do CPF. Portanto, ao realizar esses cálculos, o apresentador é capaz de identificar os últimos dígitos do CPF do voluntário.

Raiz quadrada mágica

A figura seguinte mostra uma sequência de raízes quadradas que despertam a atenção pela simetria dos radicandos e dos resultados coincidentes com os valores centrais da soma.

Figura 2



Fonte: arquivos do Grupo PET Matemática da UFMS/CPTL

A apresentação objetiva responder ao questionamento da figura, bem como instigar o público a respeito da generalização: será verdade que cada raiz quadrada deste formato é exata? E o resultado da raiz sempre coincide com o valor central da soma presente no radicando? A resposta positiva segue da soma finita de números consecutivos, conteúdo que, convenientemente, pode preceder o estudo de progressões aritméticas.

Truque da paridade

Nesta atividade, aplica-se um truque de adivinhação que aborda o conceito de paridade. O intuito dessa atividade é estimular cálculos mentais na soma de números naturais. Os materiais necessários para realizar essa mágica são: cartões coloridos, baralho ou moedas. O truque requer uma pilha de cartas idênticas de dois lados.

Ao iniciar o truque, primeiramente, o apresentador pedirá para um ou dois voluntários organizarem as cartas em um formato retangular, qualquer tamanho de retângulo é adequado, e eles poderão escolher aleatoriamente as posições das cartas. O truque funciona com qualquer número de cartas. Logo após, o apresentador irá adicionar outra linha e coluna ao retângulo e outro voluntário será selecionado para cobrir os olhos do mediador e virar uma carta. Em seguida, ao abrir os olhos e estudar as cartas, o mediador será capaz de identificar a carta virada.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Superior. **Manual de Orientações Básicas: Programa de Educação Tutorial**. Brasília: MEC, SESU, 2006. Disponível em: `https://docs.google.com/document/d/1F4AT1wDuZIWEsquiLBPTO-0BdIGqHog7p-McJffQKI0/edit` . Acesso: 30, abril 2024.

[2] Lima, L. X. ;**Códigos de Barras, CPF e Criptografia RSA: Conceitos Matemáticos Envolvidos**. 2019. 41 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Itapetininga, Itapetininga, 2019.

[3] Schroeder, E. S.; **Códigos Binários e Truques de Mágica. 2017**. 75 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Dourados-MS, 2017.

[4] Telepácia Virtual <`https://kardini.com.br/telepatiav.htm`> Acessado em: 30, abril 2024.

Fractais, desenhe seus próprios!

Um convite para experimentar e criar a complexidade do nosso mundo através das lentes dos fractais.

Figliaggi, Bella[263] e Maekawa, Lucas Hideo[264]

Resumo: *Fractais, caracterizados por sua geometria complexa e apelo artístico, serão apresentados de forma acessível, via Sistema de Funções Iteradas de contrações lineares e translações na reta e no plano. Com softwares os estudantes poderão desenhar e gerar suas próprias imagens fractais.*

Palavras-chave: *Fractais, sistemas de funções iteradas, contrações, álgebra linear.*

INTRODUÇÃO

As nuvens, as montanhas e os vasos sanguíneos são exemplos de elementos presentes no cotidiano os quais não são facilmente descritos pela geometria clássica. Figuras geométricas caracterizada por suas rugosidades e por terem auto-similaridade, isto é, mudanças de escalas não alteram a figura, foram denominadas de Fractais, termo criado pelo matemático Benoît Mandelbrot em 1975.

Os fractais de interesse da oficina são aqueles gerados por Sistemas de Funções Iteradas (SFI), isto é, uma coleção de funções que podem ser infinitamente compostas umas com as outras. Contrações lineares e afins atuando na reta e no plano são fontes ricas de exemplos de fractais. Desse modo, o entendimento entre a relação da lei da transformação com as mudanças geométricas feitas pela mesma em uma determinada região do espaço, por exemplo, se expande, contraí, translada e entre outras é importante para a visualização do fractal que essa está construindo.

OBJETIVO

Apresentar os conceitos básicos para o desenvolvimento da teoria de Sistema de Função Iteradas com o objetivo de geração de fractais. Para isso, serão apresentados exemplos, propostas de atividades e por fim a utilização de softwares.

METODOLOGIA

Imagens e intuição

Nessa oficina, os Fractais abordados serão aqueles gerados por um sistema de funções iteradas. Alguns das figuras possíveis de construir com essa abordagem são: Conjunto de Cantor, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch e Samambaia de Barnsley. Desse modo, essa abordagem é uma importante ferramenta na construção e entendimento de fractais.

[263]ICMC-USP. Esta autora foi apoiada pela FAPESP 2023/06566-8.
[264]ICMC-USP.

Um simples sistema de funções iteradas de contrações

Um sistema de funções iteradas consiste em uma coleção de funções que podem ser compostas uma com as outras infinitamente. Para definir um sistema de funções iteradas é necessário um espaço métrico e uma coleção de funções definidos nesse espaço.

O estudo do SFI exige a compreensão das mudanças geométricas feitas por uma transformação em algum espaço. Desse modo, o conceito de expansão, contração, translação e rotação é de interesse do estudo. As transformações afins apresentam uma importante classe de funções que permitem a investigação desses conceitos e a geração de fractais.

Exemplo 8.1 (Um simples sistema de funções iteradas) *Considere na reta real o conjunto* $[0,1]$*, ou seja,* $[0,1]$ *é o espaço de interesse. Sejam* $f_i : [0,1] \to [0,1]$ *com* $i = 1,2$ *definidas por* $f_1(x) = \dfrac{x}{3}$ *e* $f_2(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{2}{3}$.

As mudanças que esse sistema faz no intervalo $[0,1]$ podem ser vista na Figura 87.

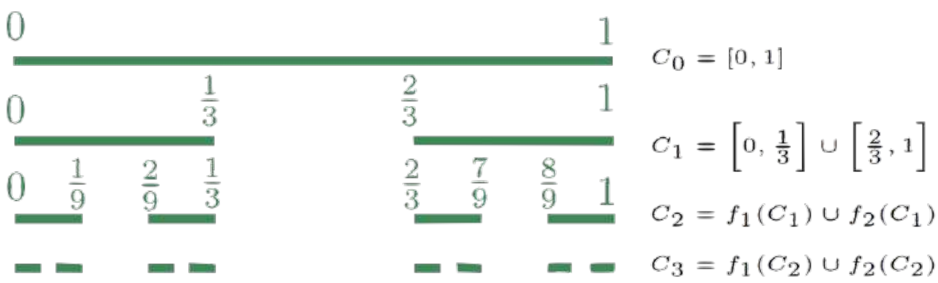


Fig. 87: Fonte: Autoria própria

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $C_n = f_1(C_{n-1}) \cup f_2(C_{n-1})$, conforme ilustrado na Figura 87. O objetivo é entender o que ocorre quando tomado n tendendo para infinito. O resultado desse processo é o Fractal chamado Conjunto de Cantor.

Contração. Tanto f_1 e f_2 possuem uma importante característica: diminuem as distâncias entre os pontos em uma proporção menor que um. Considere por exemplo f_1 e dois pontos quaisquer $x, y \in [0,1]$, f_1 diminuí a distância desses pontos em $\dfrac{1}{3}$

$$|f_1(x) - f_1(y)| = \left|\frac{x}{3} - \frac{y}{3}\right| = \frac{1}{3}|x - y|.$$

Com esse comportamento, é possível prever a órbita, ou seja, a trajetória de qualquer ponto sobre várias composições de f_1. Assim, seja $x \in [0,1]$, temos

$$0 \le f_1(x) \le \frac{1}{3}, \quad 0 \le f_1^2(x) \le \frac{1}{9}, \quad 0 \le f_1^3(x) \le \frac{1}{27}, \quad 0 \le f_1^4(x) \le \frac{1}{81},$$

então $0 \le f_1^n(x) \le \dfrac{1}{3^n}$.

Convergência. Considerando n cada vez maior, obtemos que $f_1^n(x)$ se aproxima de zero e denotamos $f_1^n(x) \to 0$.

Ponto fixo e atrator. O ponto zero possuí a propriedade de ser um ponto fixo para f_1, isto é, $f_1(0) = 0$. Com a conta $f_1^n(x) \to 0$ conseguimos que o ponto zero está atraindo as trajetórias de todos os pontos $x \in [0,1]$ para próximo dele.

Todas as funções que diminuem distâncias possuem ponto fixo? O ponto fixo dessas funções é único? São alguns dos questionamentos que o Exemplo 8.1 deixa. Essas perguntas são respondidas no Teorema de ponto fixo de Banach. Para isso, é necessário alguns formalizações vista no Exemplo 8.1.

Definição 8.1 *Seja (M, d) um espaço métrico e $f : M \to M$ uma função. Se existir uma constante $\lambda \in [0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ então f é uma contração.*

No Exemplo 8.1 a distância em $[0, 1]$ é a função módulo, ou seja, $d(x, y) = |x - y|$ e foi visto que $|f_1(x) - f_1(y)| = \dfrac{1}{3}|x - y|$, ou seja, f_1 é uma contração.

Teorema 8.1 (Teorema de ponto fixo de Banach) *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $f : M \to M$ uma contração. Então existe um único ponto fixo $p \in M$.*

Com isso, o Teorema estabelece o resultado que foi visto acontecer com a função f_1 no Exemplo 8.1. O termo completo no Teorema exige que toda sequência do espaço em questão que seus termos se aproximam convirja para algum ponto. Como será trabalhado principalmente com o espaço $\mathbb{R}^n$ ou compactos desse espaço, essa condição sempre estará satisfeita.

Considerando (M, d) um espaço métrico e N contrações $f_i : M \to M$, defina-se $B(A) = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(A)$, em que A é um conjunto compacto de M. O fractal é obtido a partir do limite $B^n(A)$ quando tomado n tendendo para infinito, sendo A um conjunto compacto qualquer de M. Observe-se que B será uma contração e com isso é possível aplicar o Teorema anterior, garantindo que esse limite exista.

No Exemplo 8.1 como f_1 e f_2 são contrações, o operador B visualiza como as funções f_1 e f_2 agem no conjunto todo, ao invés de atuar nos pontos, ele age no que é chamado de espaço das figuras contraindo as distâncias entre esses e pelo resultado anterior é atraído para um ponto fixo, que nesse caso é o Conjunto de Cantor.

Vetores no plano, transformações lineares e afins

Considere dois vetores $v = (a, b)$ e $u = (x, y)$ no plano e um número real α, defina-se as operações:

- **Multiplicação por escalar**: $\alpha v = (\alpha a, \alpha b)$. Ou seja, o vetor v é aumentado ou diminuído em uma proporção α, podendo também mudar o sentido caso $\alpha < 0$.
- **Adição de vetores**: $v + u = (a + x, b + y)$.

Uma **transformação linear** definida em algum espaço Euclidiano são as funções $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que $L(\alpha x + y) = \alpha L(x) + L(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Toda transformação linear no espaço euclidiano pode ser vista como multiplicação de uma matriz quadrada de dimensão igual ao do espaço por uma matriz coluna que representa o vetor que a transformação está atuando. Em particular, no plano uma transformação linear é dada na forma $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, ou ainda,

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

Observe que qualquer transformação linear possuí o zero como ponto fixo, visto que $L(0) = L(0x) = 0L(x) = 0$.

A **translação** é uma operação que move uma figura de um ponto a outro, mantendo sua forma, orientação e tamanho. Dado vetor v de translação, todo vetor u é transformado do mesmo jeito $u \mapsto v + u$.

Por fim, uma **transformação afim** no plano é a composição de uma transformação linear com uma translação, ou seja, T é uma transformação afim se $T(x, y) = L(x, y) + (e, f)$, onde $L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ é uma transformação linear, assim

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{Transformação Linear}} + \underbrace{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}}_{\text{Translação}} = \begin{pmatrix} ax + by + e \\ cx + dy + f \end{pmatrix},$$

ou seja, uma transformação afim é a aplicação de uma transformação linear com uma translação no plano.

Desse modo, trabalhar com SFI no plano considerando transformação afins é equivalente a trabalhar com matrizes, sendo assim, é necessário o estudo de multiplicação de matrizes afim de compreender as interadas de T.

Exemplo 8.2 *Considere as transformações afins em* $\mathbb{R}^2$ *dadas por*

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix};\ f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix};\ f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Observe que cada f_i *diminuem os vetores pela metade, com respeita a distância usual em* $\mathbb{R}^2$ *definida por* $d((x,y),(a,b))=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.

Considere o triângulo A com vértices $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ *e* $(0,0)$, *com isso* $f_1(A)\cup f_2(A)\cup f_3(A)$ *resulta na união dos triângulos representado na Figura 88.*

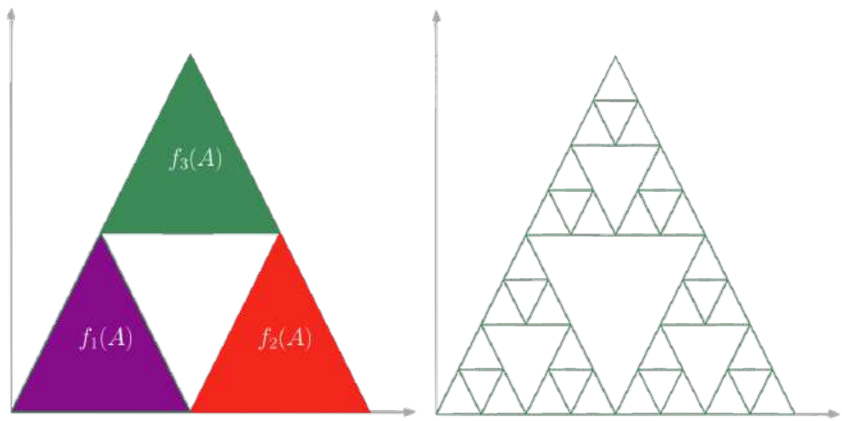


Fig. 88: Autoria própria

Por fim, considere $B(A)=\bigcup_{i=1}^{3}f_i(A)$, *sobre um processo iterativo de aplicações de B temos que* $B^n(A)$ *converge para o Triangulo de Sierpinski.*

Proposta das Atividades

A oficina será separada em dois momentos. Inicialmente serão apresentados os principais conceitos matemáticos a serem abordados durante a oficina; juntos iremos investigar dois exemplos de sistemas de funções iteradas. No segundo momento, os participantes poderão utilizar softwares, e.g. `https://github.com/gongzhang/ifs-fractal-playground.git`, para gerar os fractais de acordo com seus próprios designs, utilizando o conhecimento e as técnicas do primeiro momento.

CONCLUSÕES

Fractal desperta o interesse tanto pelo seu aparecimento em objetos do cotidiano, quanto pelo seu caráter artísticos. A utilização do Sistema de Funções Iteradas para geração dessas geometrias é uma forma dinâmica e acessível ao público, desde alunos do ensino superior a do ensino médio.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARNSLEY, M.; **Fractal everywhere**. Academic Press, 1988.

[2] GHARAEI, M.; **Iterated Function Systems of Interval Maps**. [Thesis, fully internal Universiteit van Amsterdam], 2017.

[3] MANDELBROT, B.; **The fractal geometry of nature**. W.H Freeman and Company, 1982.

Desenvolvendo o conhecimento especializado no âmbito da representação de quantidades e escrevendo textos instrucionais[265]

Reche, Brenda[266]; Silva, Caroline[267] e Ribeiro, Miguel[268]

Resumo: *Enquanto professores que pretendemos que os nossos alunos entendam, necessitamos de um conhecimento especializado para essa prática profissional. O Mathematics Teachers' Specialized Knowledge tem vindo a assumir cada vez mais, no contexto internacional, esse lugar de especialização. Já o discurso matemático compreende a aprendizagem matemática como a aquisição de uma forma específica de discurso de forma oral ou escrita. Por sabermos que tanto a formação inicial como a continuada não exploram a produção textual já que não é uma rotina das aulas de matemática, esta oficina, a partir de uma Tarefa para Formação, busca desenvolver um conhecimento especializado no contexto dos procedimentos, registros de representação e conexões do tópico decomposição de números naturais, bem como as potencialidades (e limitações) do uso de recursos (ábaco) para o ensino de matemática, por meio da produção de textos instrucionais. Os participantes irão desenvolver esse conhecimento especializado e vivenciar um contexto formativo para que, posteriormente, apliquem a mesma tarefa com seus alunos de forma pedagogicamente emocionante e matematicamente inovadora.*

Palavras-chave: *Conhecimento especializado, discurso matemático, tarefa para formação, produção de textos instrucionais, decomposição dos números naturais.*

INTRODUÇÃO

Para promover a aprendizagem dos alunos de forma significativa é necessário que o professor detenha um conhecimento específico e especializado sobre os tópicos matemáticos a serem ensinados (Carrillo *et al.*, 2018), já que o conhecimento dos professores é um fator determinante para essa aprendizagem (Nye; Konstantopulos; Hedges, 2004). Esse conhecimento especializado é entendido na perspectiva do do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK, dividido em dois domínios do conhecimento, o *Mathematical Knowledge* –

[265] O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

[266] Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), brenda.reche@gmail.com
[267] Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), caroldesouza86@gmail.com
[268] Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), cmribas78@gmail.com

MK e o *Pedagogical Content Knowledge* – PCK. O MK diz respeito ao conhecimento do professor no âmbito da matemática e está situado em sua prática profissional. Já o PCK, refere-se ao conhecimento do professor sobre os processos de ensino e aprendizagem dos tópicos matemáticos que serão trabalhados em cada etapa escolar (Carrillo *et al.*, 2018).

Uma outra perspectiva de pesquisa que tem sido desenvolvida assume a matemática como uma forma de discurso, tendo o neologismo *commogniton* (Sfard, 2008), cunhado a partir das palavras communication e cognition, para destacar a ideia de que a divisão tradicional entre pensamento e comunicação se torna insustentável. Portanto, Pensar Matematicamente significa participar de um discurso historicamente desenvolvido conhecido como matemático. Como o discurso é um tipo de comunicação (Sfard, 2008), a aprendizagem matemática ocorre quando o sujeito é inserido no discurso matemático e desenvolve aptidão para conversar de e sobre matemática (de forma oral ou escrita) a partir de comunicações interpessoais e intrapessoais. O discurso matemático possui 4 categorias: uso de palavras, mediadores visuais, narrativas e suas rotinas próprias.

Pelo fato de o professor ter pouco contato com a escrita, tanto em sua formação inicial, quanto em formações continuadas (Freitas; Fiorentini, 2008), já que o foco dessas formações está em melhorar a performance das rotinas consideradas comuns nas aulas de matemática, destacamos a importância de ser inserir a escrita de textos matemáticos como uma rotina que deve ser incorporada na prática profissional do professor de matemática. Para tanto, elaboramos uma Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) com foco de discussão na decomposição dos números naturais, tópico que os alunos possuem diversas dificuldades. A TpF aborda, também, um tipo de texto muito comum em aulas de matemáticas: as instruções.

MARCO TEÓRICO

No MTSK, os procedimentos pertencentes a um determinado tópico matemático, referem-se ao conhecimento do professor sobre o que é feito, como é feito, o porquê é feito e quando se pode, ou não, empregar esses procedimentos (Carrillo *et al.*, 2018). Já o discurso matemático (Sfard, 2008), reconhece os procedimentos com uma narrativa endossada, já que se trata de sequências verbais utilizadas para descrever objetos matemáticos e foram rotuladas pela comunidade de matemáticos como verdadeiras. Em relação ao tópico decomposição dos números naturais uma narrativa endossada acerca dos procedimentos envolve conhecer que existe uma relação conceitual entre adição e multiplicação para a decomposição de um número, sendo que este número pode ser reescrito de diferentes formas, inclusive, além da tradicional multiplicação por múltiplos de 10 (Cebola, 2002; Ribeiro, 2022).

Utilizar os procedimentos de um tópico é uma rotina das aulas de matemática, já que ao responder uma tarefa, por exemplo, esse conhecimento, geralmente, é mobilizado. Recursos didáticos também integram as rotinas de uma aula de matemática, pois são levados para os alunos pelo professor que lhes ensina como manusear. No MTSK, o uso de tais recursos faz parte do domínio pedagógico do conteúdo, que dentre outras coisas, abrange uma avaliação crítica de como podemos melhorar a aprendizagem de um determinado tópico (Carrillo *et al.*, 2018). No âmbito da decomposição dos números naturais podemos considerar o ábaco como um recurso didático ritualístico, mas que muitas vezes não se torna tão potente para o aprendizado devido a forma como é utilizado. Portanto, é importante que não se tenha predefinido nenhuma das ordens do número, pois essa definição limita o entendimento matemático já que é difícil entender o significado das ordens na escrita do Sistema de Numeração Decimal, e isso dificulta o uso que se pode fazer do ábaco (Ribeiro, 2022).

Para que seja possível potencializar a utilização do ábaco e ensinar os procedimentos pertencentes ao tópico da decomposição dos números naturais um texto instrucional pode ser utilizado, já que consiste em uma lista de regras que orienta a execução de uma determinada tarefa. Nesse texto, deverão estar inclusos os procedimentos acerca da decomposição de um número e uma discussão sobre alguns pontos importantes que irão potencializar o ensino do tópico utilizando esse recurso, sendo eles: as cores não definem as ordens do número, como também, não se deve utilizar o ábaco com as marcações definidas das unidades, dezenas, centenas e, assim, sucessivamente.

PROPOSTA DA OFICINA

A oficina terá duração de 4h e será implementada e discutida uma TpF no âmbito da decomposição dos números naturais com o intuito de que os participantes possam, a *posteriori*, utilizá-la em suas aulas. Essa TpF é composta por uma Parte Preliminar (para os professores), tarefa do aluno e questões destinadas ao professor (Parte I – A), como também, a Parte I – B destinada, exclusivamente, ao professor.

A Parte Preliminar busca situar o professor na discussão que ocorrerá nas outras partes, desenvolver o conhecimento especializado do professor relacionado aos procedimentos do tópico específico em discussão, que nesse caso, é a decomposição dos números naturais, bem como, conhecer o que o professor sabe acerca do ábaco. Além disso, é feita uma breve introdução sobre o texto instrucional. A Parte I – A é integrada com uma tarefa para os alunos e questões destinadas para o professor associadas à tarefa para o aluno e como ela pode ser implementada. Assim, a tarefa para os alunos trará uma discussão acerca da representação de um mesmo número de diferentes formas, como também, maneiras potentes de se utilizar o ábaco. Quanto às questões para o professor, incluem as maiores dificuldades matemáticas que os alunos podem ter ao resolver a tarefa, o objetivo que se persegue ao implementá-la em sala de aula, além de solicitar que eles resolvam a tarefa para o aluno sem considerar um contexto de ensino. Na Parte I – B é apresentado um texto que instrui a registrar um número utilizando o ábaco e mais um conjunto de questões a serem respondidas pelo professor.

Cada parte da TpF será implementada em momentos diferentes e discutida coletivamente posteriormente. A discussão da Parte Preliminar em 40 minutos e a Parte I – A em 1 hora, sendo ambas feitas no primeiro dia de oficina. No segundo dia será implementado a Parte I – B em 1 hora, e após isso, ocorrerá uma discussão em grande grupo da TpF como um todo, além das conclusões finais.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Espera-se possibilitar aos participantes o desenvolvimento de formas potentes de se trabalhar com ábaco, bem como, um conhecimento relativo ao tópico decomposição dos números naturais, para que, posteriormente, eles possam implementar com seus alunos essa mesma tarefa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carrillo, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Ribeito, M.; Muñoz-Catalán, M. C.; **The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model.** Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[2] Cebola, G.; **Do número ao sentido do número. Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores.** Lisboa: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 223-239, 2002.

[3] Freitas, M. T. M.; Fiorentini, D.; **Desafios e potencialidades da escrita na formação docente em Matemática.** Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, v. 13, n. 37, p. 138-149, 2008.

[4] Nye, B.; Konstantopoulos, S.; Hedges, L.; **How large are teacher effects? Educational evaluation and policy analysis.** Educational Evaluation and Policy Analysis, v. 26, n. 3, p. 237–257, 2004.

[5] , M.; **Pensar Matematicamente envolvendo diferentes formas de ver e de contar e as conexões com o Pensamento Algébrico.** Campinas, SP: Cognoscere, 2021, v. 4, p. 60.

[6] Ribeiro, M.; Recursos para entender os números e as operações: material dourado, ábaco e Quadro de Valor Posicional. Campinas, SP: Cognoscere, 2022, v. 3, p.93.

[7] Ribeiro, M.; Almeida, A. R. DE; Mellone, M.; **Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1–32, 2021.

[8] Sfard, A.; **Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing.** Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

Modelagem matemática 3D com Tinkercad

Mathias, Carmen Vieira[269]; Wrzesinski, Andressa Paula[270]; Larangeira, Quendra Silva Cartier[271] e Cardoso, João Ygor Dias[272]

Resumo: *A matemática, em geral, é reconhecida por sua natureza teórica e abstrata. No entanto, ao lidar com conceitos de Cálculo de várias variáveis ou de Geometria Espacial, é comum que tanto alunos quanto professores representem as superfícies e as formas geométricas espaciais no plano, seguindo a abordagem tradicional. Alguns docentes, no entanto, optam por auxiliar na visualização de alguns conceitos, utilizando materiais manipulativos ou modelos matemáticos disponíveis em softwares de matemática dinâmica. Considerando o avanço das tecnologias, a impressão 3D tem ganhado destaque na pesquisa científica e no desenvolvimento tecnológico. Nesse contexto, a proposta desta oficina orientar o processo de construção de modelos a serem impressos em 3D utilizando o aplicativo Tinkercad. Durante a oficina, pretende-se discutir a matemática envolvida na impressão 3D, construir modelos e imprimi-los.*

Palavras-chave: *Geometria, tecnologias, impressão 3D.*

INTRODUÇÃO

A visualização sempre foi um ingrediente importante para a comunicação da matemática. As figuras e modelos têm sido instrumentos na expressão de ideias, mesmo antes que a linguagem matemática formal fosse capaz de descrever as estruturas. Desde registros numéricos em ossos, as pinturas dos números em pedras até as exibições em telas de computador, a representação visual tem desempenhado um papel crucial na ampliação da linguagem matemática.

Em particular, a visualização desempenha um papel importante na ampliação do conhecimento geométrico [3], embora para a maioria dos matemáticos as imagens não substituam as demonstrações, porém elas podem fornecer provas sem palavras [1, 5], que auxiliam na transmitir intuição sobre resultados e ideias. De fato, alguns matemáticos derivam ideias criativas e intuição diretamente das imagens, embora essas abordagens muitas vezes não sejam evidentes em artigos ou livros didáticos. Apesar do surgimento de diversas tecnologias que permitem a visualização de objetos geométricos espaciais, como conteúdos dinâmicos, a capacidade de manipular um objeto com as próprias mãos ainda é incomparável. E, as impressoras 3D, podem proporcionar essa experiência com relativamente pouco esforço. Nesse sentido, a tecnologia de impressão 3D, também

[269] UFSM.
[270] UFSM. Este autor foi apoiado pelo projeto Probic/Fapergs
[271] UFSM. Este autor foi apoiado pelo projeto PIBIC/Cpnq
[272] UFSM. Este autor foi apoiado pelo projeto FIPE/UFSM

conhecida como Tecnologia de Manufatura Aditiva (TMA), apresenta diversas aplicações em várias áreas do conhecimento e engloba uma série de etapas.

Assim, o objetivo da oficina proposta é orientar o processo de construção de modelos a serem impressos em 3D utilizando o aplicativo Tinkercad. Observa-se a ideia é construir modelos matemáticos, com diferentes níveis de dificuldade e imprimi-los. Também pretende-se apresentar exemplos de materiais impressos em 3D que podem auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos.

SOBRE O PROCESSO DE IMPRESSÃO

A TMA produz objetos físicos a partir de uma representação geométrica mediante a adição progressiva de materiais. Esse processo abrange diversas fases, desde a criação da peça em softwares, até o fatiamento em um software específico e, por fim, a impressão da peça física resultante [4].

Fig. 89: Fatiamento

A primeira etapa envolve o design do objeto, exigindo a posse ou a criação de uma versão virtual do objeto a ser impresso. Esse modelo pode ser adquirido de um repositório existente ou ser gerado por meio de softwares ou aplicativos de modelagem 3D. Após a concepção ou seleção do modelo, é necessário exportá-lo para o formato .STL. Este tipo de arquivo descreve apenas a geometria superficial do objeto, excluindo outras propriedades. No entanto, os dados contidos no arquivo .STL permitem a comunicação entre o software de modelagem 3D e a impressora 3D [4].

Para incluir outras propriedades, como quantidade de material e tempo de impressão, é preciso abrir o arquivo .STL em um software fatiador, conhecido como slicer. O slicer converte o arquivo para a linguagem da impressora (G-code) e divide o modelo em camadas. Assim, o arquivo G-code contém a sequência de movimentos necessários, codificados como coordenadas cartesianas, para que a impressora deposite o material de maneira adequada e obtenha o objeto físico desejado.

Em seguida, o arquivo fatiado deve ser transferido para a máquina. Essa transferência pode ser feita de várias maneiras, sendo a utilização de cartões de memória a forma mais comum. A próxima etapa envolve a impressão propriamente dita da peça. Mesmo para usuários experientes, os princípios matemáticos que viabilizaram a impressão 3D podem ser desconhecidos. Esse fato nos leva a refletir sobre como foi possível projetar uma impressora capaz de derreter materiais plásticos e, em seguida, fundir camadas do material derretido para criar um objeto sólido. Salienta-se que todo esse processo só se tornou viável graças ao trabalho do matemático italiano Guido Fubini (1879-1943), que fez contribuições significativas em diversas áreas da matemática, incluindo análise, cálculo de variações e teoria de grupos [2].

SOBRE AS ATIVIDADES DA OFICINA

O Tinkercad

O aplicativo Tinkercad será o foco desta oficina, em que pretende-se explorar a construção de peças para impressão 3D. De acordo com informações disponíveis em seu site, ele é uma ferramenta gratuita e de fácil utilização para desenvolver projetos 3D, componentes eletrônicos e codificação. Ao contrário de softwares de modelagem 3D tradicionais, o Tinkercad é exclusivamente baseado na web, eliminando a necessidade de instalação em um computador.

A oficina será dividida em três partes: a primeira será dedicada à geometria da impressão 3d, a segunda à familiarização com o aplicativo, enquanto a terceira focará na construção de sólidos geométricos não convexos, superficies e fractais. Como mencionado anteriormente, o Tinkercad é um aplicativo baseado na web, o que significa que pode ser acessado através de um navegador e para começar a utilizá-lo, basta acessar o site e clicar em "Inscrever-se". Caso o participante já tenha uma conta no Tinkercad ou na Autodesk, basta clicar em "Fazer Login". Após o login, ele pode acessar seus projetos e selecionar a opção "Criar"para começar um novo projeto 3D. Isso dará acesso ao aplicativo, que inclui um espaço de trabalho, formas básicas, um menu de funcionalidades e um menu de movimentação.

É importante observar que a interface do Tinkercad difere dos softwares tradicionalmente utilizados no ensino de Matemática, como o GeoGebra, por exemplo. Por isso, é necessário realizar uma apresentação detalhada das ferramentas disponíveis no Tinkercad. A seguir, são descritas brevemente as atividades a serem realizadas durante a oficina.

As atividades

A geometria da impressão 3D: nessa etapa pretende-se apresentar os diferentes conceitos matemáticos presentes no processo de impressão 3D.

Apresentar as ferramentas do Tinkercad: inicialmente, os participantes serão introduzidos às diversas ferramentas disponíveis no Tinkercad, incluindo formas básicas, operações de união e subtração, alinhamento e posicionamento (figura abaixo).

Fig. 90: Tinkercad

Construção de sólidos e superfícies: essa parte da oficina consistirá na construção de sólidos geométricos não convexos e superfícies. A ideia é explorar a aba geradores de formas, desafiando os participantes a explorar as capacidades do Tinkercad para criar formas mais complexas.

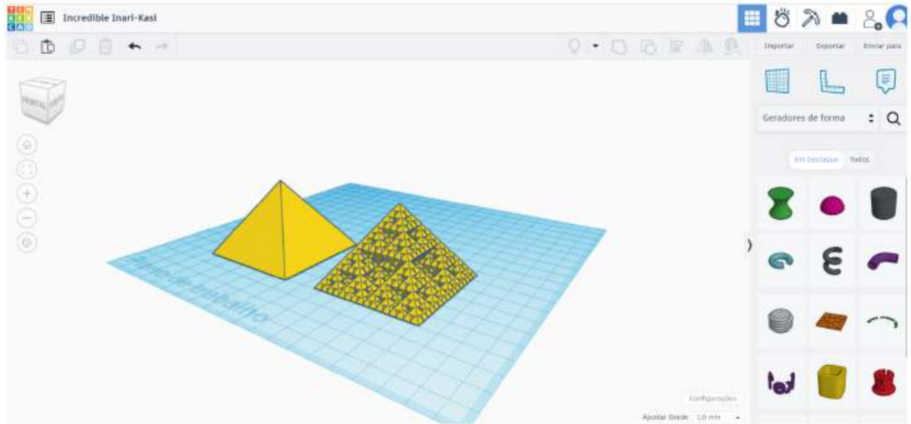


Fig. 91: Construção de objetos

Processo de fatiamento e impressão: observa-se que ao salvar os objetos construídos deve-se exportá-los no formato .STL, que é o formato editável. Para que seja possível a impressão, deve-se fatiar a peça, utilizando o software Cura e transformando-a para G-code. Após, utiliza-se a impressão 3D para a fabricação da peças,como ilustra a figura abaixo.

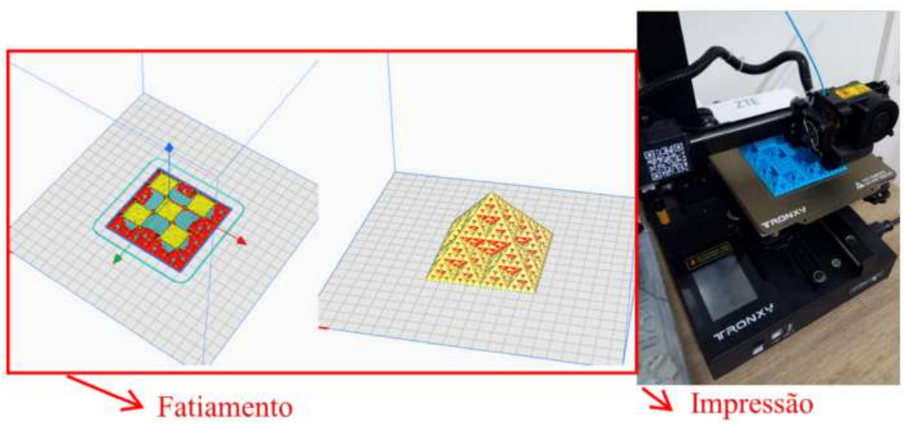


Fig. 92: Fatiamento

Observa-se que durante todo o processo, serão incentivadas discussões sobre a relação entre as formas criadas e conceitos matemáticos, bem como a aplicação prática desses conceitos. Ao seguir essas etapas, os participantes terão a oportunidade de imprimir as peças produzidas. Dessa forma, indica-se que para o bom desenvolvimento da oficina será necessário que cada participante disponha de um computador com acesso à internet. Ademais, acredita-se que o número ideal de participantes seja 20, uma vez que esses irão necessitar de auxílio durante as construções e, assim, os ministrantes poderão atender a todos. Além disso, espera-se que após a atividade, os participantes sejam capazes de produzir as peças que desejarem, partindo das ferramentas disponibilizadas pelo referido software. Caso seja viável, seria interessante que a oficina seja realizada em um espaço em que exista uma mesa para colocar a impressora 3D, isso é importante para que seja possível imprimir algumas construções realizadas pelos participantes.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALENCAR, H., CÂNDIDO, L., GARCIA, R., MATHIAS, C. O GeoGebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em Geometria. **Revista Professor de Matemática On-line** [S. l.], v. 10, n. 33, 2022.

[2] ANASTASIOU, A., TSIRMPAS, C., ROMPAS, A., GIOKAS, K., KOUTSOURIS, D. 3D printing: Basic concepts mathematics and technologies. In: **13th IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering** . IEEE, p. 1-4. 2013.

[3] GIAQUINTO, M.**Visual thinking in mathematics**. Oxford University Press, 2007.

[4] GIBSON, I., ROSEN, D. W., STUCKER, B., KHORASANI, M., ROSEN, D., STUCKER, B., KHORASANI, M. **Additive manufacturing technologies**, v. 15, p. 160-186, Cham, Switzerland: Springer 2021.

[5] MATHIAS, C. V.; DA SILVA, H. A.; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 62-77, 2019.

Rotacionando cartas: uma tarefa interpretativa especializante[273]

Silva, Caroline[274]; Reche, Brenda[275] e Ribeiro, Miguel[276]

Resumo: *O Conhecimento Interpretativo fundamenta a prática profissional do professor de matemática relacionada a interpretar, atribuir significado e propor feedback às produções dos alunos, mesmo aquelas que são incorretas ou não usuais, mas para isso é requerido do professor um conhecimento matemático especializado. Esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula, pelo que se torna necessário um contexto formativo com esse feito, sendo que se considera que a formação tem de oportunizar aos (futuros) professores vivenciarem situações baseadas na prática, por meio da implementação e discussão de tarefas. Denominamos essas tarefas para a formação de Tarefas Interpretativas, pois possibilitam o desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo. Nesta oficina, a partir de uma tarefa para os alunos no âmbito da transformação geométrica isométrica rotação, iremos desenvolver o conhecimento interpretativo dos participantes e discutir as formas de implementação da tarefa que potenciam a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos.*

Palavras-chave: *Conhecimento interpretativo, conhecimento especializado, tarefa interpretativa, rotação.*

INTRODUÇÃO

Para ultrapassar as dificuldades dos alunos nos mais variados tópicos matemáticos, é imprescindível que o professor detenha de conhecimento especializado para possibilitar que os alunos entendam o que fazem e o porquê fazem a cada momento e, ainda, para atribuir significado aos raciocínios e formas de Pensar expressos nas produções dos alunos (JAKOBSEN; RIBEIRO; MELLONE, 2014). Assumimos essa especialização do conhecimento do professor de acordo com as conceitualizações do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al.*, 2018) e do Conhecimento Interpretativo (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014).

Como o conhecimento especializado não se desenvolve na prática de sala de aula, ao longo da experiência do professor (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014), se fazem essenciais contextos formativos cuja intencionalidade seja desenvolvê-lo. Diante do trabalho que temos efetuado no grupo de Pesquisa e Formação

[273]O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

[274]Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), `caroldesouza86@gmail.com`
[275]Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), `brenda.reche@gmail.com`
[276]Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), `cmribas78@gmail.com`

CIEspMat[277] (Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de e que ensina Matemática), um recurso utilizado que tem se mostrado propício para esse fito são as denominadas Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al.*, 2020), considerando sua conceitualização (estrutura e conteúdo) e por assumir como gênese para as discussões uma tarefa para os alunos no âmbito de um tópico problemático, permite situar o professor no contexto de sua prática profissional (futura) ao ter de interpretar produções de alunos e propor soluções educacionais a partir delas.

Nesta oficina considerando algumas das maiores dificuldades dos alunos – e professores – (Küchemann, 1981), focamos no tópico rotação. As discussões possibilitarão que os participantes vivenciem uma prática formativa pedagogicamente emocionante e matematicamente inovadora (Ribeiro; Silva, 2024), que se espera ser transposta para suas aulas.

MARCO TEÓRICO

A rotação é a transformação geométrica isométrica considerada a mais difícil pelos alunos (SHAH, 1969), e as maiores dificuldades referem-se a efetuá-la, quando o centro de rotação é externo à figura (Küchemann, 1981), bem como identificar a rotação e seus elementos constituintes (Turgut; Yenilmez; Anapa, 2014).

Para possibilitar que os alunos ultrapassem essas dificuldades, o professor necessita deter um conhecimento especializado (Carrillo,*et al.*, 2018) que envolve conhecer de modo amplo e profundo o tópico, inclusive, deter de conhecimento matemático para efetuar conexões com outros tópicos e conceitos matemáticos e para validar a matemática presente nas produções dos alunos. No âmbito da rotação, por exemplo, envolve conhecer a fenomenologia do tópico, ou seja, que a rotação é uma transformação geométrica isométrica, que se relaciona ao movimento de giro, trata-se de uma operação na figura a partir de um centro (ponto) ou eixo (reta), que ocorre conforme amplitude e sentido do ângulo de rotação. Envolve, também, conhecer que, tal como em qualquer outro tópico matemático, existem muitas definições matematicamente válidas e adequadas para rotação, sendo uma possível definição de rotação:

Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\widehat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho\colon \Pi \to \Pi$ assim definida $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d(X,O) = d(X',O)$, $X\widehat{O}X = \alpha$ e o "sentido de rotação" de A para B é o mesmo de X para X' (Lima, 1996, p. 21 e 22).

Além disso, inclui conhecer, por exemplo, a conexão entre rotação e sólidos de revolução, uma vez que a rotação de uma linha simples (geratriz) em torno do eixo de rotação no espaço gera superfícies de revolução.

O conhecimento matemático especializado que sustenta o professor desenvolver sua prática interpretativa, denomina-se Conhecimento Interpretativo - CI (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2014) e envolve entender e interpretar os raciocínios e formas de Pensar expressões nas produções dos alunos, inclusive, as que são incorretas ou não usuais, ou seja, matematicamente corretas, mas inesperadas ao professor, para, posteriormente, tomar as melhores decisões pedagógicas e propor um *feedback* que seja, de fato, construtivo e que não impõe seu jeito de proceder, mas auxilia o aluno a rever sua produção, repensar estratégias e reformular seu raciocínio.

Todavia, como é um conhecimento que não desenvolve, por si, na prática de sala de aula, desenvolver o CI necessita ser uma intencionalidade em contextos formativos. As Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al.*, 2020) são recursos conceitualizados para desenvolver esse CI a partir de tópicos problemáticos, como é a transformação geométrica isométrica rotação, assumindo as dificuldades dos alunos e professores, bem como os erros associados, como oportunidades formativas para as discussões com foco no desenvolvimento do CI.

PROPOSTA DA OFICINA

A oficina durará 4h, onde será implementada e discutida uma Tarefa Interpretativa no âmbito da rotação e que se espera que os participantes possam, posteriormente, implementá-la em suas salas de aula. As TI são

[277] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio, `www.ciespmat.com.br`.

um recurso para desenvolver o CI, conceitualizadas com foco em um tópico problemático e estruturadas em três partes.

A Parte Preliminar busca aceder e desenvolver o conhecimento especializado do professor relacionado ao tópico específico em discussão, tendo aqui por foco a fenomenologia e definição matemática de rotação.

A Parte I contém uma tarefa para os alunos e um conjunto de questões para o professor associadas à tarefa para o aluno. Assim, a tarefa para os alunos promoverá uma discussão centrada no entendimento da rotação, nos procedimentos para identificá-la, nas principais propriedades e fundamentos, além de como podemos diferenciá-la das demais transformações isométricas, e essa discussão ocorrerá, em contexto formativo, situado em um contexto de prática profissional do professor. Para além da questão que busca que o professor resolva a tarefa para os alunos, discutem-se, ainda, questões associadas às principais dificuldades dos alunos em rotação e o que estes necessitam conhecer para realizar a tarefa de forma matematicamente adequada.

Na Parte II são apresentadas produções dos alunos, interessantes do ponto de vista matemático, para o professor interpretar e atribuir significado, situando-o em um contexto da prática interpretativa.

De um modo geral, cada uma das partes da TI será implementada em momentos diferentes e discutida toda a tarefa no final, coletivamente, implementando uma parte da abordagem metodológica ICI (Pacelli *et al.*, 2020). A discussão da Parte Preliminar está associada a entender o tópico rotação; a Parte I focando aspectos do conhecimento matemático e pedagógico especializado e a Parte II terá como foco a interpretação das produções dos alunos e o *feedback* proposto. A discussão em grande grupo focará nas produções dos participantes, nas maiores dificuldades dos alunos no tópico e nas formas de promover argumentações matematicamente válidas e conexões matemáticas que permitam aos participantes (e aos seus alunos) entender mais e melhor as transformações geométricas isométricas para realizar sua prática interpretativa.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Espera-se possibilitar aos participantes a mesma experiência que podem replicar com seus alunos em salas de aula, de modo a que esses possam entender a rotação e, no processo, efetuar generalizações e desenvolver formas de pensar matematicamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] Carrillo, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Ribeito, M.; Muñoz-Catalán, M. C.; **The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model.** Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[2] Jakobsen, A. R. N. E.; Ribeiro, C. M.; Mellone, M.; **Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task.** Nordic Studies in Mathematics Education, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

[3] Küchemann, D.; **Reflections and rotations.** Childrens understanding of mathematics, p. 11-16, 1981.

[4] Lima , E. L.; **Isometrias.** SBM, 1996.

[5] Mellone, M.; Ribeiro, M.; Jakobsen, A.; Carotenudo, G.; Romano, P.; Pacelli, T.; **Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning.** Research in Mathematics Education, v. 22, n. 2, p. 154–167, 2020.

[6] Pacelli, T.; Mellone, M.; Ribeiro, M.; Jakobsen, A.; **Collective discussions for the development of interpretative knowledge in mathematics teacher education.** ICMI STUDY 25. Lisboa, p. 388-395, 2020.

[7] Ribeiro, M.; Silva, C.; **Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras.** Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 18, n. 00, ELOCATION, 2024. (aceite).

[8] Shah, S. A.; **Focus on research: Selected geometric concepts taught to children ages seven to eleven.** The Arithmetic Teacher, v. 16, n. 2, p. 119-128, 1969.

[9] Turgut, M.; Yenilmez, K.; Anapa, P.; **Symmetry and rotation skills of prospective elementary mathematics teachers.** Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 28, p. 383-402, 2014.

Gamificação e cálculo algébrico
Jogos para o ENSINO FUNDAMENTAL

Tavares, Cristina Ferreira de Sá[278]

Resumo: *Essa oficina apresenta uma abordagem prática de uso da gamificação para o ensino da álgebra, no ensino fundamental. Além do engajamento do estudante em atividades do cálculo algébrico, a gamificação possibilitou outras duas grandes contribuições para o processo de ensino e aprendizagem: um diálogo sobre as relações de convivência durante os jogos e o reconhecimento de habilidades que não são avaliadas pelos testes tradicionais, revelando e valorizando diversas potencialidades entre os estudantes.*

Palavras-chave: *Álgebra, gamificação, jogos, engajamento, convivência.*

DESCRIÇÃO

Apresento uma proposta de oficina para professores e estudantes do ensino fundamental, anos finais, de duração de duas horas, explorando de forma prática dois jogos que foram criados para o ensino do cálculo algébrico.

Gamificação e Cálculo Algébrico

Essa oficina apresenta possibilidades para o ensino das estruturas do cálculo algébrico alinhadas às ações propostas pela Base Nacional Curricular Comum ao *"conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os alunos nas aprendizagens."* (BRASIL, 2017). Com esse propósito, surgiu a ideia de criar um ambiente colaborativo de aprendizagem de cálculo algébrico, principalmente para os produtos notáveis, por meio de jogos.

A gamificação surgiu como uma possibilidade de diversificar estratégias, contemplando a abordagem teórica e prática, para além das repetições propostas em listas de exercícios de cálculo algébrico. Em ambos os jogos apresentados a seguir, além do objetivo de envolver e de motivar os alunos a se engajarem em suas próprias aprendizagens, é importante destacar a convivência entre pares como um objetivo que possibilita identificar *"aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com ele."* (BNCC, 2017).

A primeira proposta foi criada adaptando jogos populares cujo objetivo é formar quartetos de cartas distribuídas aleatoriamente entre quatro participantes. Na sua vez, o jogador escolhia uma de suas cartas para ser repassada ao jogador seguinte. A dinâmica se repetia até que um dos jogadores completasse o seu quarteto, sendo considerado o vencedor. Entre as cartas do jogo, havia uma única carta que não pertencia a nenhum dos quartetos e que tinha uma regra especial, não podendo ser repassada imediatamente ao próximo jogador logo após ser recebida.

No contexto de álgebra, os jogadores precisavam completar um quarteto de cartas identificando e associando as três formas fatoradas $(x+a)(x+b)$ que correspondiam ao conjunto de trinômios $x^2+(a+b)x+ab$, como mostra a figura a seguir:

[278]Colégio Santo Agostinho – BH - MG, cfstavares@gmail.com

Fig. 93: Exemplo de um quarteto de cartas vencedor

$(x+2)(x+4)$	$(x-2)(x+4)$	$(x+2)(x-4)$	x^2+6x+8 x^2+2x-8 x^2-2x-8

Além de aplicar o cálculo mental e o cálculo algébrico na busca pela solução, ou seja, identificar e formar o quarteto corretamente, os estudantes se divertem e se mantem engajados sem apresentar conflitos entre os jogadores.

A segunda proposta, similar a uma disputa de par ou ímpar entre dois jogadores, requer agilidade de cálculo mental e reconhecimento de padrão algébrico como fatores preponderantes para a vitória.

A dinâmica é simples. Cada jogador da dupla apresenta simultaneamente um valor numérico, utilizando os dedos de apenas uma das mãos e vence o integrante que falar primeiro a expressão algébrica para o produto de Stevin que será obtido para os números indicados, permitindo variações de números positivos e negativos, a partir da posição das mãos. A palma da mão para baixo, indicaria um valor numérico positivo e a palma da mão virada para cima, por sua vez, indicaria um valor numérico negativo.

Além de dominar o cálculo mental executando com agilidade as operações fundamentais de adição e multiplicação envolvendo números inteiros e aplicar ao padrão do cálculo algébrico, o clima de disputa, proporciona o surgimento de conflitos, discordâncias em relação ao cumprimento das regras do jogo, a frustração da derrota e o sentimento de reconhecimento de habilidades mediante as vitórias conquistadas. Interessante destacar que muitos alunos não demonstram interesse em participar de competições, enquanto outros se mostram confiantes e desafiados, revelando talentos e habilidades pouco exploradas durante as aulas de matemática.

Os conflitos durante os jogos contribuíram para um diálogo sobre a convivência entre os pares e as habilidades emocionais envolvidas durante a atividade, bem como a necessidade de regras bem definidas para o bom funcionamento de um jogo.

CONCLUSÕES

O aprendizado do cálculo algébrico requer estratégias diversificadas para que os procedimentos sejam familiarizados pelos alunos e executados de forma cada vez mais ágil ao longo do desenvolvimento dessa habilidade.

A gamificação apresenta aspectos positivos ao proporcionar mudanças na organização da estrutura da sala de aula convencional, contribuindo para a ampliação do repertório de boas práticas do educador matemático.

Nessa perspectiva, a gamificação, quando prioriza aspectos cooperativos, se configura como uma estratégia com grande potencial para envolver os estudantes em situações de aprendizagem que promovem o desenvolvimento de habilidades comportamentais paralelamente ao desenvolvimento de habilidades específicas previstas para cada componente curricular dos programas de ensino, reconhecendo e valorizando a pluralidade de formas de aprender dos estudantes e contribuindo para uma ação transformadora da educação, que por meio da convivência escolar, do afeto e do diálogo, que aproxima e potencializa as pessoas, cultivando a fraternidade e a paz.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília, DF: MEC, 2017.

Interlocução da construção formal dos inteiros com o ábaco dos inteiros, concreto e virtual, e com os tijolos táteis

Ripoll, Cydara Cavedon[279]; Wermann, Franciele Marciane Meinerz[280] Blumberg, Vanessa Pacheco[281] e Doering, Luisa Rodriguez[282]

Resumo: *Nesta oficina serão apresentadas as ferramentas Ábaco (físico) dos Números Inteiros, Ábaco Virtual dos Números Inteiros, que servem de recurso para convidar estudantes a refletir sobre números inteiros e a criar conjecturas sobre suas operações, por exemplo descobrindo e deduzindo as regras de sinais. A seguir, com o mesmo potencial, será apresentada a ferramenta Tijolos Táteis, material tátil que se revela acessível também a estudantes com deficiência visual em uma sala de aula comum, possibilitando, assim, uma efetiva inclusão. Pretende-se discutir com os participantes propostas que oportunizem desafios com esses materiais. Além disso, será apresentada e discutida a estreita relação entre a construção formal do conjunto dos números inteiros e cada uma dessas ferramentas, enaltecendo-as como ferramentas com a potencialidade de ressaltar aspectos elementares dessa construção, bem como as propriedades das operações com números inteiros. Essa estreita relação evidencia um elo entre a matemática abordada na formação inicial do professor e a matemática ensinada na escola. Este minicurso é apoiado no ebook [7] e na dissertação de Mestrado [1].*

Palavras-chave: *Operações com números inteiros, ábaco (virtual) dos números inteiros, tijolos táteis, inclusão, deficiência visual.*

INTRODUÇÃO

Ensinar números inteiros e suas operações no Ensino Fundamental é um desafio para todo professor de Matemática [8]. Resultados fáceis de serem enunciados, como subtrair um número negativo é o mesmo que somar o seu oposto e o produto de dois números negativos é um número positivo, impõem dificuldades ao estudante e desafios ao professor [4]. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, (PCN), o Ábaco dos Inteiros é mencionado nas orientações para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental (hoje segundo segmento do Ensino Fundamental), e lá é esclarecido que ele "consiste em duas varetas fixadas num bloco, nas quais se indica a que vai receber as quantidades positivas e a que vai receber as quantidades negativas, utilizando argolas de cores diferentes para marcar pontos. (...) ao manipular as argolas nas varetas os alunos

[279] Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática - UFRGS

[280] Colégio Província de São Pedro e EMEF Heitor Villa Lobos

[281] Colégio La Salle Canoas e SESI Gravataí

[282] Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática - UFRGS

poderão construir regras para o cálculo com números inteiros” ([3], p.99). Já na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é salientado que “recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.” ([2], p.276).

Buscando ferramentas que auxiliem tanto o professor como os alunos em sala de aula, apresentamos, nesta oficina, materiais que podem ser usados tanto em aulas presenciais, como em aulas remotas incluindo estudantes com deficiência visual. Apresentamos inicialmente o Ábaco (físico) dos Números Inteiros; a seguir, o Ábaco Virtual dos Números Inteiros, criado pela primeira autora e a ferramenta inspirada no Ábaco dos Números Inteiros chamada Tijolos Táteis, cuja construção é relatada em [1]. Essas ferramentas possibilitam ressaltar as infinitas representações para cada número inteiro, bem como abordar com estudantes as operações de adição, subtração e multiplicação de números inteiros, de forma a promover a compreensão. Elas também têm o potencial de evidenciar um estreito elo entre a matemática estudada na escola e a construção formal do Conjunto dos Números Inteiros, pois ressaltam aspectos elementares dessa construção. Cabe ressaltar que os Tijolos Táteis também podem ser utilizados na abordagem de equações lineares com uma incógnita, proporcionando a construção do processo de resolução via propriedades da igualdade (Princípios Aditivo e Multiplicativo).

Desse modo, os objetivos para a oficina são: i) apresentar aos participantes as três ferramentas Ábaco físico, Ábaco Virtual e os Tijolos Táteis; ii) ressaltar a efetiva inclusão que a ferramenta Tijolos Táteis proporciona para deficientes visuais; iii) propor atividades adequadas aos anos finais do Ensino Fundamental, desafiando os participantes a resolvê-las fazendo uso dessas ferramentas; iv) discutir a potencialidade de tais atividades para um público de estudantes com e sem acuidade visual; v) ressaltar o Ábaco e os Tijolos Táteis como ferramentas que podem auxiliar na reflexão, na criação de conjecturas e na descoberta e dedução das chamadas regras de sinais; vi) ressaltar que essas ferramentas traduzem aspectos elementares, da construção do conjunto dos números inteiros e de suas propriedades.

DESCRIÇÃO DA PROPOSTA

As 4 horas de oficina serão divididas em dois encontros. No primeiro encontro serão apresentados os Ábaco físico dos números inteiros (exemplares, feitos de sucata, serão disponibilizados pelas ministrantes), bem como o Ábaco virtual dos números inteiros (disponível em `www.mundojogos.com.br/abaco` e acessível por celular). Serão explicitados os pré-requisitos para o uso de ambos, a sua inserção na BNCC e destacadas as diferenças entre eles. A seguir, será apresentado o material Tijolos Táteis (exemplares também serão disponibilizados pelas ministrantes), observando suas semelhanças e particularidades em relação aos Ábacos. Ainda no primeiro encontro serão propostas atividades que oportunizem, a partir da manipulação dos materiais, as infinitas representações de um número inteiro e as operações com inteiros, bem como a descoberta e a dedução das chamadas regras de sinais para as operações de adição e subtração no conjunto dos números inteiros.

No segundo encontro serão realizadas atividades que promovem a descoberta e a dedução das regras de sinais para a operação de multiplicação no conjunto dos números inteiros. A seguir os participantes serão convidados a refletir sobre a estreita relação entre a construção formal dos números inteiros e os materiais manipuláveis aqui apresentados, enaltecendo os Ábacos e os Tijolos Táteis como ferramentas com a potencialidade de ressaltar aspectos elementares dessa construção. Cabe esclarecer que estamos aqui denominando “construção formal dos inteiros” a construção matemática do universo numérico $\mathbb{Z}$ estudada em disciplinas de alguns cursos de Licenciaturas e/ou Bacharelados em Matemática ver, por exemplo, [6], e que a ênfase do significado de uma construção dita formal não é na simbologia matemática, mas sim na consistência da construção matemática (evidenciando, por exemplo, que não são geradas contradições).

BIBLIOGRAFIA

[1] BLUMBERG, V.S.P. Conceitos Aritméticos e Algébricos para estudantes com e sem acuidade visual: Construção de um material acessível. A aparecer em https://lume.ufrgs.br, 2024.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, DF. 2018.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de educação fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] DIRKS, M. K.The integer abacus. **Arithmetic Teacher**, Vol.31(7), p.50-54, 1984.

[5] FERREIRA, E. S. O Ábaco de Silvester II. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Vol. 8 n. 15 p.43-55, 2008.

[6] FERREIRA, J. **A Construção dos Números** . Textos Universitários , SBM, 2010.

[7] MEINERZ, F.; DOERING, L.R.; RIPOLL, C.C. O Ábaco Virtual dos Números Inteiros: um recurso para o ensino presencial e remoto (2022). Disponível em: `https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2022/10/ebook_Franciele_Luisa_Cydara-18-10-2022-final.pdf` Acesso em: 25 abr. 2024.

[8] SILVA, E.G.I.; CONTI, K.C. O ábaco dos inteiros: auxílio aos estudantes na compreensão dos números negativos e suas operações. **Revemat**. V.11, n. 1. Florianópolis, p. 74-83, 2016.

Matemática maker com *Genius Square* - do jogar ao fazer: uma prática para fomentar o desenvolvimento do pensamento combinatório e geométrico-espacial

Lieban, Diego[283]

Resumo: *Nesta oficina, apresentaremos e jogaremos o jogo GENIUS SQUARE e discutiremos algumas possibilidades didáticas para seu uso, sob os vieses da Análise Combinatória e Geometria Espacial. Após o momento inicial da apresentação e aplicação do jogo, seguido por discussões metodológicas a partir de seu usopedagógico, mostraremos como os materiais podem ser modelados a partir de recursos digitais (Tinkercad, GeoGebra e outros) a fim de obter o modelo do jogo no formato para ser impresso em* 3*D, cortado na cortadora laser ou mesmo produzido com material de baixo-custo.*

Palavras-chave: *Genius Square, Cultura Maker, Modelagem, Tinkercad, GeoGebra*

DESCRIÇÃO

Genius Square é um jogo de estratégia, composto por um tabuleiro em forma de quadrado, 9 peças (como peças TETRIS) de cores diferentes, e 7 cilindros pretos, que servem para bloquear alguns espaços definidos por coordenadas (A1 a F6), conforme mostrado na Figura 1, abaixo. No jogo original, as "casas" bloqueadas são definidas por dados.

Na versão que apresentamos, o sorteio é realizado por dados virtuais (`https://www.geogebra.org/m/gvnghz8v`), abrindo uma possibilidade de exploração da criação do jogo, na perspectiva da Cultura Maker, sob o viés do Pensamento Computacional.

Fig. 94: Versões do Genius square reproduzidos no PIPA IFmakeRS do IFRS

283 Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia IFRS - Campus Bento Gonçalves, `diego.lieban@bento.ifrs.edu.br`

BIBLIOGRAFIA

[1] Harari, Y. N.; **21 lições para o século 21.** Companhia das Letras, 2018.

[2] Nussbaum, B.; **Creative Intelligence: Harnessing the Power to Create, Connect, and Inspire.** Harper Collins Publishers, 2013.

[3] Resnick, M.; **Jardim da Infância para Vida Toda: Por uma Aprendizagem Criativa, Mão na Massa e Relevante para Todos.** Penso, 2020.

Prova interativa de teoremas em Lean 4

Aspectos teóricos e práticos

Lima, Éricles[284]

Resumo: *Este minicurso é voltado à introdução do Lean 4 como uma ferramenta para uso no dia-a-dia do matemático. São apresentadas as bases e uma fundamentação teórica e histórica do campo de prova automática de teoremas, seguidamente das bases para a programação em Lean em particular. Por fim são mostrados projetos matemáticos de sucesso que usam Lean, e seram passadas ideias de como utilizar o Lean 4 para provas automáticas de teoremas no seu dia-a-dia e como isso pode auxiliar o matemático (puro ou aplicado) praticante.*

Palavras-chave: *prova automática de teoremas, prova iterativa de teoremas, Lean 4*

DESCRIÇÃO

Esta oficina visa introduzir o matemático praticante ao mundo da "prova iterativa de teorema" ("prova iterativa" que quer ser "automática"), por meio da linguagem de programação Lean 4.

Para tanto, serão usados conteúdos e ferramentas livremente disponíveis para introduzir à área de prova interativa de teoremas e suas diversas abordagens, sucessos e pontos de melhoria.

A linguagem de programação Lean 4 é então introduzida como parte desse contexto. Serão brevemente apresentadas outras ferramentas muito utilizadas para prova interativa de teoremas (como CoQ e Isabelle), e suas diferenças e os motivos pelos quais Lean 4 tem sido cada vez mais adotado por diversos pesquisadores e estudantes.

Assim, a oficina será composta pelas seguintes partes:

1. Introdução geral, momento em que serão definidos alguns dos conceitos-chave e será feito um panorama da área;
2. Introdução à base teórica do Lean (notadamente, teoria dos tipos dependentes e um pouco de teoria de categoria);
3. Como interagir com o Lean por meio de diversas ferramentas (notadamente, Visual Studio);
4. Introdução à biblioteca matemática do Lean e a comunidade que a mantém;
5. Principais locais na Internet onde procurar informações e ajuda;
6. Projeto prático - serão dadas sugestões de teoremas a serem trabalhados em diferentes temas (topologia, álgebra, teoria dos números, etc.), e o participante será convidado a selecionar uma área e trabalhar em formalizar um teorema de sua escolha, com ajuda do apresentador.

[284]Unicamp. Este autor foi apoiado pela CAPES

CONCLUSÕES

É esperado que os participantes saiam da oficina sabendo:

- O que é prova interativa de teorema e quando e porquê isso pode ser útil;
- O que é a linguagem de programação Lean, e onde ela se coloca no cenário mais amplo de tecnologias para prova interativa ou automática de teoremas;
- Quais as bases teóricas sobre as quais a linguagem Lean funciona (que são as mesmas para diversas outras linguagens também) e porquê elas são adequadas para a formalização de matemática;
- Saber onde achar informações de suporte para a linguagem, incluindo como instalar, manuais da linguagem, tutoriais e canais da comunidade;
- Formalizar um teorema simples de uma área da sua escolha.

BIBLIOGRAFIA

[1] Mimram, Samuel. **Program= Proof**. 2020.

[2] Moura, Leonardo de, and Sebastian Ullrich. "The lean 4 theorem prover and programming language."**Automated Deduction–CADE 28**: 28th International Conference on Automated Deduction, Virtual Event, July 12–15, 2021, Proceedings 28. Springer International Publishing, 2021.

[3] Carneiro, M. **The type theory of lean**. preparation https://github.com/digama0/lean-type-theory/releases, 2019.

[4] Harrison, J.; Urban, J.; Wiedijk, F. **History of interactive theorem proving**. In: Computational Logic. [S.l.: s.n.], 2014. v. 9, p. 135–214.

[5] Moura, L. D.; Passmore, G. O. **The strategy challenge in smt solving**. Automated Reasoning and Mathematics: Essays in Memory of William W. McCune, Springer, p. 15–44, 2013.

[6] Scholze, P. Liquid tensor experiment. Experimental Mathematics, Taylor & Francis, p. 1–6, 2021.

[7] Polu, S.; Sutskever, I. **Generative language modeling for automated theorem proving**. CoRR, abs/2009.03393, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2009.03393.

Vetores na formação matemática de estudantes da educação básica:

possibilidades nas temáticas de localização e movimentação no espaço

Cotrim, Fabiana Santos[285] e Borges, Júlia Silva Silveira[286]

Resumo: *Esta oficina tem como objetivo ampliar e ressignificar a compreensão de como os conceitos de direção, sentido e intensidade estão presentes no trabalho que o professor desenvolve em diferentes etapas da Educação Básica, especificamente nas temáticas de localização e movimentação, por meio da exploração e discussão de atividades usando modelos concretos, que podem ser trabalhadas com estudantes.*

Palavras-chave: *Vetores, geometria, localização, movimentação.*

INTRODUÇÃO

Para compreender, descrever e representar o mundo em que se vive, na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), é indicado como fundamental saber localizar-se no espaço e movimentar-se nele. A partir desta perspectiva, é possível observar objetos de conhecimento e habilidades relacionados aos temas de localização e movimentação, na Unidade Temática de Geometria da BNCC em quase todos os anos do Ensino Fundamental e a consideração do par Movimento e Posição, como um dos pares de ideias fundamentais apresentados na BNCC no que compete ao Ensino Médio.

Neste contexto, dentro das temáticas de localização e movimentação, observa-se que conceitos como direção, sentido, distância, ponto de referência e referencial são fundamentais para o desenvolvimento destas temáticas, pois, enquanto objetos de conhecimento, são conceitos que permitem descrever o estar e mover-se no espaço, ou seja, descrever as relações entre pessoas/objetos e o espaço, possibilitando resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

Portanto, com esta visão, neste resumo apresentamos uma proposta de oficina para ser desenvolvida no âmbito da programação do XI Bienal da Matemática que acontecerá em São Carlos, nos dias que vão de 29 de julho e 02 de agosto na Universidade Federal de São Carlos – UFSCar e que tem como objetivo ampliar e ressignificar a compreensão de como os conceitos de direção, sentido e intensidade estão presentes no trabalho que o professor desenvolve em diferentes etapas da Educação Básica, especificamente dentro da temática de localização e movimentação, por meio da exploração e discussão de atividades usando modelos concretos que podem ser trabalhadas com estudantes.

[285] CCN/UFSCar Lagoa do Sino. fabianasc@ufscar.br
[286] CCN/UFSCar Lagoa do Sino. juliaborges@ufscar.br

DESCRIÇÃO DA OFICINA

Inicialmente cabe destacar que para a proposição desta oficina, assumimos como referencial teórico o modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* – MTSK (CARRILLO *et al.*, 2018) que reconhece a natureza especializada do conhecimento do professor para o ensino de matemática e que ocorre pela forma como este professor conhece um conteúdo matemático, que é diferente de qualquer outro profissional que também utilize a matemática, pois se trata de um conhecimento ligado ao ensino e aprendizagem deste conteúdo. Em vista disso, o modelo considera dois grandes domínios de conhecimento do professor de matemática: o Conhecimento Matemático (MK) e o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) e, em cada um deles assumem-se três subdomínios, todos envoltos pelas crenças e concepções que também existem sobre estes domínios de conhecimento.

O conhecimento matemático refere-se à compreensão profunda dos conceitos matemáticos em si. Isso não se limita apenas ao conhecimento superficial dos tópicos, mas envolve uma compreensão robusta das estruturas subjacentes e das relações entre os conceitos. Além disso, inclui uma familiaridade com as diferentes representações e abordagem para ensinar esses conceitos. Por outro lado, o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo concentra-se na compreensão de como ensinar de forma eficaz esses conceitos matemáticos aos alunos. Isso inclui estratégias de instrução específicas, compreensão das dificuldades comuns dos alunos ao aprender matemática e capacidade de adaptação do ensino para atender as necessidades individuais ou coletivas dos estudantes.

Desta forma, para efetivamente alcançar o objetivo proposto, nesta oficina será proposto uma dinâmica envolvendo uma tarefa específica para professores (RIBEIRO; ALMEIDA; MELLONE, 2021) destinadas a discutir e promover um conhecimento matemático para o ensino, pautado na prática do professor e trabalhando simultaneamente diferentes domínios do conhecimento especializado do professor na perspectiva do modelo MTSK (CARRILLO *et al.*, 2018).

A tarefa proposta será constituída de três atividades, usando modelos no concreto, que podem serem desenvolvidas com estudantes de diferentes etapas da Educação Básica e que a partir delas seja possível conhecer como os participantes compreendem, comunicam e representam conceitos fundamentais relacionados às temáticas de localização e movimentação e por conseguinte, problematizar e discutir com os participantes as possibilidades de como o conceito de vetor está presente nestas atividades e pode ser trabalhado com estudantes da Educação Básica.

A dinâmica proposta para a oficina será a de que os participantes, organizados em grupos, discutam e respondam a tarefa proposta e posteriormente, socializem as respostas em grande grupo que será intermediado pelas proponentes desta oficina, que promoverão reflexões a fim de que o objetivo seja alcançado.

Neste sentido, propõe-se que seja uma oficina para até 30 participantes e que tenha duas horas de duração, assim distribuídas: 40 min para que os participantes, organizados em grupo, respondam a tarefa e 1h20min para que ocorra a socialização e reflexões do grande grupo. O espaço ideal para a sua realização é um espaço que acomode o número total de participantes, todos sentados e se possível, também com mesas para serem compartilhadas entre os membros de cada grupo (alternativamente, cadeiras universitárias para cada participante). O espaço deve conter um projetor, uma lousa, giz e apagador.

Os materiais concretos relacionados às três atividades, serão providenciados pelas proponentes, assim como as tarefas impressas e folhas sulfite para as respostas que serão dadas às tarefas.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília-DF: Ministério da Educação, 2018.

[2] CARRILLO, J. Y. *et al.*. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model*. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236–253, 2018.

[3] RIBEIRO, M.; ALMEIDA, A.; MELLONE, M. Conceitualizando Tarefas Formativas para Desenvolver as Especificidades do Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 35, p. 1-32, 3 ago. 2021.

Explorando as construções geométricas através da história da razão áurea

Albuquerque-Lima, Islanita Cecília Alcantara de[287]

Resumo: *Este estudo surge a partir de um olhar histórico para as construções geométricas relacionadas a razão áurea, assim podemos refletir como as construções do triângulo áureo utilizando régua e compasso podem proporcionar um novo caminho para o ensino de geometria, que aliada à história da matemática irá auxiliar na compreensão de conteúdos matemáticos. Desse modo, iremos mostrar como sucedeu o surgimento da razão áurea, apresentamos a definição de um segmento áureo, além de exibir como as construções geométricas estão associadas a razão áurea. Trazemos como resultado uma alternativa para o desenvolvimento das construções geométricas a partir de aspectos da história da matemática que estão associados ao triângulo áureo utilizando régua e compasso. Tal iniciativa poderá permitir que professores e estudantes de licenciaturas em matemática ampliem suas expectativas em realizar trabalhos extras em sala de aula.*

Palavras-chave: *Razão áurea, matemática, construções geométricas.*

DESCRIÇÃO

Quando falamos em Razão Áurea não podemos explicitar quem foi o primeiro estudioso à falar sobre o tema, apesar que, desde a antiguidade, muitos estudiosos acreditam reger o universo. De acordo com o livro Geometria Sagrada de Lawlor (1982, p. 44), tudo indica que o primeiro matemático à falar no assunto foi Pitágoras, quando estudava as relações matemáticas contidas na figura do Pentagrama onde percebeu que existia uma razão interessante entre seus segmentos. Anos mais tarde, em 325-256 a.C, Euclides, conhecido como ''Pai da Geometria", definiu geometricamente este conceito, ''para que um segmento seja dividido em Seção Áurea, a razão entre o segmento e a parte maior deve ser igual a razão entre a parte maior e a parte menor", como nos mostra a obra Os Elementos, traduzido por (IRINEU, 2009). Esta razão também tem uma característica especial, ela sempre resulta em uma constante, que foi o primeiro número irracional real descoberto pelo pitagórico Hipaso de Metaponto, representada pela letra grega phi e chamada de Número de Ouro. Esta constante foi utilizada para muitos estudos como, por exemplo, Fibonacci (1170-1250 a.C) em sua sequência e na construção de figuras geométricas. Portanto, nosso propósito nesta oficina é além de retratar através dos registros históricos contidos nos livros trazer as construções geométricas presentes na construções áureas e mostrar como podem ocorrer essas relações com o intuito de construir o passo a passo do triângulo áureo, do retângulo áureo e da espiral áurea junto com os participantes fazendo as construções de maneira prática. Sendo assim para o primeiro momento buscamos apresentar para os participantes o marco histórico da razão áurea e suas influências nos dias atuais, buscando assim apresentar mais detalhadamente

[287]Universidade de Pernambuco, Campus Mata Norte.

esse tema tão vasto. No segundo momento será apresentado as construções geométricas e as relações com a razão áurea, em um terceiro momento os participantes irão construir com auxílio de compasso e régua o Triângulo Áureo e do Retângulo Áureo, no qual será encontrado a Espiral Áurea. Exibiremos algumas destas construções geométricas hoje usadas em várias áreas, como a odontologia, design e propagandas. Desse modo, nossa finalidade é mostrar algumas curiosidades dessa Razão Áurea, como ela é encontrada nos dias atuais e a construção do Triângulo e Retângulo Áureo, abrindo um leque de informação para contribuir com a investigação dessa também conhecida como Divina Proporção.

OBJETIVOS

1− Mostrar a história da razão áurea a partir de seu desenvolvimento e quais matemáticos a estudaram relacionando-a com a natureza, arquitetura e artes;

2− Entender como os matemáticos fizeram para chegar a razão áurea utilizando conceitos algébricos e geométricos;

3− Fazer as construções geométricas do Triângulo Áureo e do Retângulo Áureo, a partir disso será encontrado a Espiral Áurea, utilizando régua e compasso.

4− Destacar como a matemática relaciona-se como as atividades humanas na sociedade em que vivemos, enfocando com o estudo principal a razão áurea.

Materiais

Utilizaremos papel A3 para realização das figuras a serem construídas; Régua; Compasso; Par de Esquadros.

CONCLUSÕES

Ao final da atividade proposta esperamos que os participantes tenham tido o contato prático na construção de segmento de reta, perpendicular, mediatriz, ponto médio, triângulo, retângulo, dentre outros. Neste aspecto, é possível não somente apresentar construções geométricas aos participantes com o objetivo de construir o segmento áurea, retângulo áureo, triângulo áureo, espiral áureo, como também de poder ofertar aos presentes, estudantes de licenciatura em matemática e professores que ensinam matemática, mais uma possibilidade de realizar atividades extras junto aos estudantes da educação básica.

BIBLIOGRAFIA

[1] CYRINO, H.; **Matemática & gregos**. São Paulo, Átomo, 2006

[2] HUNTLEY, H. E.; **A divina proporção**. Trad de Luis Carlos Antônio Nunes. Brasília. Editora Universidade de Brasília, 1985.

[3] BICUDO, I.; **Os Elementos de Euclides**. (tradução e introdução). São Paulo, Editora UNESP, 2009.

[4] TAHAN, M.; **As maravilhas da matemática**. Rio de Janeiro. 2ª edição. Editora Bloch S.A., 1973.

Atribuindo sentido à medida de uma distância como um fenômeno[288]

Cazita, Janaina[289]; Iwamoto, Helena[290]; Menezes, Sandra[291] e Ribeiro, Miguel[292]

Resumo: *A qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos é uma discussão antiga, que usualmente, está associada aos resultados obtidos nos testes nacionais e internacionais. No entanto, várias pesquisas têm mostrado que, para melhorar a qualidade dessas aprendizagens e, consequentemente, os resultados dos alunos, o professor e o seu conhecimento assumem um papel central, uma vez que, além de ensinar a fazer, é urgente que se discuta o como e o porquê de se fazer de determinada forma. Nesse sentido, um tópico matemático que precisamos repensar é o ensino da medida, buscando transcender a forma como aprendemos, em que a ênfase era encontrar o valor da medição, para compreender os procedimentos envolvidos no ato de medir, considerando os princípios que sustentam esse fenômeno. Em vista disso, cabe ao professor tomar decisões pedagógicas que possam expandir a compreensão do conceito de medida pelos alunos promovendo o entendimento dos procedimentos de medição propondo desde atividades para desenvolver conceitos como "mais longo", "mais curto" e "igual em comprimento", até chegar ao entendimento dos sentidos ligados a divisão. Tomando como base da prática do professor a implementação e a discussão de tarefas, esta oficina propõe uma Tarefa para a Formação tendo como ponto de partida uma tarefa para o aluno, que possibilitará aos participantes desenvolver o seu conhecimento especializado (na perspectiva do Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) que possibilita que também os alunos entendam a medida como um fenômeno, discutindo propostas para a sala de aula.*

Palavras-chave: *Medida de uma distância, mathematics teacher's specialized knowledge, tarefa para a formação*

DESCRIÇÃO

O ensino de medida, foco desta oficina, é explorado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (Brasil, 2018) desde a Educação Infantil e segue ao longo de toda a escolaridade. O tema medida considera várias grandezas, por exemplo, área, massa, volume e tempo, contudo, nos deteremos à medida de uma distância.

[288]O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

[289]UNICAMP, `janaina.cazita@gmail.come`

[290]UNICAMP, `helenaiwamoto@hotmail.com`

[291]UNICAMP, `sandra.smenezes@hotmail.com`

[292]UNICAMP, `cmribas78@gmail.com`

Esse tema deveria assumir um lugar de destaque no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois os alunos podem apresentar dificuldades, como por exemplo, efetuar uma medição deixando espaços ou sobrepondo as repetições da unidade de medida, denotando que não entendem a transformação de uma unidade de medida discreta em outra contínua.

Outras dificuldades enfrentadas pelos alunos incluem: escolher o instrumento de medida adequado para medir uma distância, já que não podemos nos valer de um instrumento de medida, por exemplo, de área, para medir uma distância; a utilização do instrumento de medida sem identificar corretamente a unidade de medida que se considera e, assim, associar erroneamente o valor de medida ao instrumento de medida e não com a unidade de medida, por exemplo, se utilizar o instrumento de medida "caneta" não dar como resposta que o comprimento de um objeto é "10 canetas" e sim "10 comprimentos de caneta" e determinar as próximas etapas, depois de ter escolhido o instrumento de medida, quando o valor da medida não cabe um número inteiro de vezes no todo a ser medido (Ribeiro; Torrezan, 2022).

Levando em conta que a base da prática do professor é a implementação e a discussão de tarefas (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), a Tarefa para a Formação que será implementada neste contexto formativo, focará tanto no conhecimento matemático quanto no conhecimento pedagógico com o objetivo de atribuir sentido à medida de uma distância como um fenômeno.

Esta oficina é destinada a professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais e terá um encontro com duração de 2 horas. A abordagem metodológica considera a implementação de uma Tarefa para a Formação (TpF) onde os participantes poderão experienciar o trabalho em grupo seguindo a implementação do ciclo pequeno grupo-coletivo-pequeno grupo (Jakobsen; Ribeiro; Mellone, 2022).

Pedimos aos participantes inscritos que portem material de escrita, tais como lápis, caneta, borracha, apontador, entre outros.

REFERENCIAL TEÓRICO

Medida de uma distância

Entender a medida é um dos fundamentos para compreender vários outros temas e tópicos matemáticos, tais como a divisão e as frações. Medir envolve comparar magnitudes de uma mesma natureza – de uma mesma grandeza – terminando com o quantificar a quantidade de vezes que é necessário repetir a magnitude da unidade de medida até se obter a magnitude do todo a ser medido (ver por exemplo, Clements Lements, Stephan, 2004; Ribeiro; Torrezan, 2022).

Envolve muito mais que indicar o valor dessa medida ou trabalhar com unidades convencionais ou não convencionais. Requer compreender a passagem de quantidades discretas – que podem ser determinadas numericamente por contagem – para quantidades contínuas – determinadas a partir de uma medição (Godino; Batanero; Roa, 2002) e entender a medida como um fenômeno. Esse fenômeno da medida de distância sustenta-se em um conjunto de seis princípios: partição do objeto, unidade de iteração, transitividade, conservação, acumulação de distância e relação da medida com o valor numérico (Clements; Stephan, 2004). Entender esses seis princípios possibilita, contribui e demanda clarificar a diferença entre unidade e instrumento de medida de uma distância, bem como da natureza linear da própria grandeza distância.

Mathematics Teacher's Specialized Knowledge – **MTSK**

Considerando as especificidades que envolvem o conceito de medida e os procedimentos de medição, bem como a relevância do tema na Educação Infantil e nos Anos Iniciais, considera-se essencial discutir, analisar e melhor entender o conhecimento especializado do professor sobre o tema e os aspectos que o tornam especializado (Carrillo *et al.*, 2018).

O *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) é uma conceitualização do conhecimento do professor de matemática, desenvolvida por Carrillo e colegas (2018), que se foca nas especificidades do conteúdo do conhecimento profissional. O MTSK é estruturado em três domínios: o *Mathematical Knowledge* (MK), o it Pedagogical Content Knowlegde (PCK) - e *Beliefs*. Tanto o MK como o PCK são estruturados em três subdomínios.

Esta oficina foca no domínio MK, subdomínio *Knowledge of Topics*. Tal subdomínio diz respeito ao conhecimento matemático do professor que vai além de um saber fazer, implicando um conhecimento matemático mais profundo e de seus significados. Como parte deste subdomínio cumpre-nos conhecer, entre outros: procedimentos; definições, propriedades e fundamentos; os vários possíveis registros de representação e os elementos constituintes da fenomenologia e aplicações.

No âmbito da oficina proposta - medida de uma distância - esse conhecimento envolve: conhecer que o todo a ser medido e a unidade de medida a utilizar têm de ser elementos de uma mesma grandeza – têm de possuir a mesma natureza –, pois só podemos medir uma distância com uma unidade de medida de distância; conhecer o que sustenta entender a distância como um fenômeno; conhecer os princípios que sustentam a medição (partição do objeto; unidade de iteração; transitividade; conservação; acumulação de distância; relação da medida com o valor numérico); conhecer que, depois de definirmos a unidade de medida, apenas podemos utilizar essa unidade ou seus (sub)múltiplos; conhecer que unidade de medida de distância e instrumento de medida de uma distância nunca coincidem; conhecer que a grandeza distância é linear, ou seja, há uma única dimensão; conhecer que o valor da medida de uma distância corresponde a verificar quantas vezes a unidade de medida selecionada foi iterada no todo a ser medido; conhecer que o resultado da medida de uma distância é sempre expresso por um valor numérico, seguido da unidade de medida empregada, – independentemente dessa unidade de medida ser convencional ou não (Ribeiro; Torrezan, 2022).

Tarefa para a Formação – TpF

A Tarefa para a Formação (TpF) busca aceder e desenvolver o conhecimento especializado do professor e contempla usualmente duas partes: Parte Preliminar e Parte I. A Parte Preliminar, busca estabelecer um ponto de partida, em termos do conhecimento especializado dos participantes, relativamente ao que é medir, buscando direcionar a atenção dos participantes para o espaço das discussões a ocorrer. A Parte I, cujo cerne é uma tarefa para o aluno, tem por objetivo o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado do professor sobre a distinção entre instrumento de medida e unidade de medida, bem como, sobre os procedimentos envolvidos no ato de medir e, ainda, sobre a utilização (ou não) de unidades de medidas convencionais e não convencionais. O conjunto de questões que será discutido foi elaborado a partir da revisão da literatura sobre os principais tópicos problemáticos para os alunos - e professores - e foi, intencionalmente pensado a partir do conteúdo do subdomínio do Conhecimento dos Tópicos do MTSK e tem por base as discussões efetuadas em um dos livros da Coleção CIEspMat Formação (Ribeiro, M.; Torrezan, E., 2022). Tanto o conhecimento matemático quanto o conhecimento pedagógico do professor serão desenvolvidos durante esta oficina, efetuando inclusive um paralelismo entre a vivência do professor neste contexto formativo e a sua futura prática na sala de aula.

ALGUNS COMENTÁRIOS

Partindo da premissa de que o conhecimento matemático do professor é de natureza especializada e, portanto, complementar ao conhecimento dos alunos, espera-se com essa oficina aceder, discutir e desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor no tópico medida de distância.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília- DF: Ministério da Educação, 2018.

[2] Carrillo, J.; Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-Gonzáles, A.; Ribeiro, M.; Muñoz-Catalãn, M. C.; **The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model**, Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[3] Clements, D. H.; Stephan, M.; **Measurement in pre-K to grade 2 mathematics.** Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education, p. 299-317, 2004.

[4] Godino, J. D.; Batanero, C.; Roa, R.; **Medida de magnitudes y su didáctica para maestros.** Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, 2002.

[5] Jakobsen, A.; Mellone, M.; Ribeiro, M.; **A methodological approach to the development of prospective teachers' interpretative knowledge.** In: CERME12. Bozen-Bolzano, Italy, 2022.

[6] Ribeiro, M; Almeirda, A.; Mellone, M.; **Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, p. 1-32, 2021.

[7] Ribeiro, M.; Torrezan, E.; **Conhecimento e prática matemática do professor para entender a medida de uma distância (Coleção Formação).** Campinas: Cognoscere, 2022, v. 9. p. 156.

Explorando as potencialidades da torre de Hanói

Alves Fonseca, Bianca[293] e Salvador, José Antonio[294]

Resumo: *O objetivo da oficina é desafiar os participantes a explorar a lenda histórica e as regras dos movimentos possíveis dos anéis (discos) nas três torres do jogo Torre de Hanoi, a construção geométrica e as relações matemáticas envolvidas. Eles serão incentivados a testar diferentes movimentos com um número específico de anéis para determinar o número mínimo necessário para resolver o desafio. O trabalho em equipe será promovido, permitindo que os participantes compreendam as regras, discutam estratégias e compartilhem ideias para resolver os problemas de forma eficiente. Para auxiliá-los, uma Torre de Hanói, física e/ou virtual, juntamente com uma ficha de atividades orientadora serão fornecidas contendo perguntas que os levarão a refletir sobre os possíveis movimentos dos anéis nas torres, as estratégias empregadas e a fórmula de recorrência que determina o número mínimo de movimentos, sempre respeitando as regras do desafio. Além disso, serão exploradas as conexões da Torre de Hanoi com a Teoria dos Grafos e o Triângulo de Sierpinski, ampliando o contexto e enriquecendo a compreensão dos participantes sobre o tema.*

Palavras-chave: *Torre de Hanói, história, construção geométrica, movimentos, grafos, Triângulo de Sierpinski.*

DESCRIÇÃO

Na oficina, os participantes serão encorajados a participar de uma série de atividades relacionadas ao famoso quebra-cabeça da Torre de Hanói, utilizando materiais que serão disponibilizados. Explorar a história por trás do quebra-cabeça, reconhecer os elementos geométricos que compõem a Torre de Hanói e considerar a possibilidade de construção sustentável levando em conta as medidas dos anéis, as distâncias convenientes entre as torres (hastes), o tamanho da base, entre outros elementos geométricos.

Os participantes serão convidados a realizar tentativas iniciais e a registrar os possíveis deslocamentos de cada anel, a fim de determinar o número mínimo de movimentos necessários para resolver o problema da Torre de Hanói com $n = 1, 2, 3, \ldots$ anéis. Proporemos desafios com diferentes quantidades de anéis para observar os movimentos possíveis, buscar estratégias e descobrir padrões.

Durante a atividade, cada participante será incentivado a explorar a Torre de Hanói individualmente e a registrar seus movimentos. Posteriormente, eles irão comparar seus resultados com os de outros participantes, discutindo as soluções encontradas e identificando padrões de como começar o deslocamento de uma torre com qualquer número de anéis.

[293]Colégio Ética São Carlos
[294]DM - UFSCar

Tab. 4: Quantidade de movimentos mínimo de cada anel

n (Número de anéis)	Número de deslocamentos de cada anel					
	A_1	A_2	A_3	$\dots$	A_n	Totais
1	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
3	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ficha de Atividades

P1: Na construção da sua Torre de Hanói de $n, n \geq 1$ anéis qual foi o diâmetro d do maior anel? Qual distância mínima entre os pinos de ser considerada?

P2: Quantos movimentos é possível fazer com cada um dos anéis ate'chegar a torre de destino? Elabore uma tabela como a Tab. 3 com linhas para cada jogada possível com $A_1, A_2, A_3, \dots$ aneis indicando os possíveis movimentos deles da torre T_0 de partida para a torre T_2 de chegada, usando a torre T_1 intermediária, de deslocamentos de uma para outra respeitando a regra dos anéis maiores não sobreporem os menores, usando o número mínimo de movimentos.

Tab. 3: Esplorando os movimentos dos anéis

n (Número de anéis)	Movimentos possíveis	Número mínimo de movimentos
1	$\dots$	$\dots$
2	$\dots$	$\dots$
3	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

P3: Qual(is) o(s) anel(is) que mais se movimenta(m) para obter o número mímimo de movimentos?

P4: Qual(is) o(s) anel(éis) que menos se movimenta(m) para obter o número mínimo de movimentos?

P5: Sem testar o desafio, é possível calcular o número mínimo de movimentos para, $6, 7, 8, 9$ ou 10 anéis? É possível obter uma fórmula geral para o desafio com $n, n \in \mathbb{N}$ anéis?

P6: Faça uma tabela e descubra a relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos. Escreva sobre o que observaram.

P7: Quantas vezes cada um dos $n, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ anéis se movimenta para alcançar o número mínimo de movimentos em cada jogada? Representar numa tabela como a Tab. 4.

P8: Faça um gráfico do número de anéis n pelo número o mínimo de movimentos e explore-o.

P9: Modele e resolva a equação discreta que representa o número mínimo de movimentos.

P10: Numa Torre de Hanói com 64 anéis qual é o número mínimo de movimentos? Uma pessoa poderia realizá-los em uma vida fazendo um movimento a cada segundo?

Ao final da oficina, os participantes terão uma compreensão mais profunda dos movimentos da Torre de Hanói e terão desenvolvido suas habilidades de observação, compreensão de regras, resolução de problemas, descobrimento de padrões, e calculando as medidas dos elementos geométricos para a construção do desafio com materiais sustentáveis e trabalho em equipe.

Discutiremos ainda sobre outras possibilidades de explorar o desafio, como se as hastes representassem vértices e os deslocamentos dos anéis como as arestas de um Grafo com uma disposição fractal do Triângulo de Sierpinski a fim de despertar o interesse dos participantes ampliar o horizonte de investigação.

CONCLUSÕES

A oficina foi testada com estudantes do ensino básico e com licenciandos em Matemática. Ela proporciona uma oportunidade para os participantes desenvolverem suas habilidades de resolução de problemas, pensamento crítico e trabalho em equipe. O desafio de encontrar o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói com diferentes quantidades de anéis, promove o desenvolvimento de habilidades matemáticas e de raciocínio lógico. Além disso, favorece a reflexão e destaca sua relevância nos dias de hoje, estimulando uma discussão enriquecedora sobre a importância dos desafios na educação e no desenvolvimento pessoal.

BIBLIOGRAFIA

[1] FONSECA, B. A. **Torre de Hanói e sua relação com grafos e triângulo de Sierspinski**. Trabalho de conclusão de Curso. Repositório da UFSCar, 2023.

[2] MACEDO, L. **Torre de Hanói e Construção do Conhecimento**. Psicol. USP, v.2, n.1-2. São Paulo, 1991.

Educação matemática inclusiva

O caderno quadriculado como dispositivo de inclusão nas aulas de Matemática

Santos, Karla Vanessa Gomes dos[295]; Moura, Ellen Michelle Barbosa de[296]; Marçal, Dulcimária Ferreira da Cunha[297]; Moreira, Geraldo Eustáquio[298] e Vieira, Lygianne Batista[299]

Resumo: *A oficina proposta tem como temática "O uso do caderno quadriculado como dispositivo de inclusão nas aulas de Matemática"e objetiva estabelecer relação entre as atividades matemáticas realizadas na escola e o registro delas no caderno quadriculado, visando aumentar as possibilidades de aprendizagem dos estudantes em relação à Matemática, nesse caso a multiplicação. Para isso, discute-se, por meio de atividades práticas, como introduzir, aprofundar e consolidar a multiplicação nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Imbricado a essas ações sugere o registro no caderno quadriculado como mais um meio intencional de diversificar materiais e incluir os estudantes de modos diversificados. Assim, argumentamos que o caderno quadriculado, torna-se um dispositivo de inclusão nas aulas de Matemática, pois sua abordagem visual estimula a criatividade e a resolução de problemas por meio da compreensão do sistema decimal e sua característica posicional, visto que seu layout favorece a construção de conceitos matemáticos e amplia as formas de registros. Como resultados espera-se que os docentes, participantes da oficina, dialoguem e sintam-se instigados a aprofundar os conhecimentos sobre o uso do caderno quadriculado e incluam ou ampliem sua utilização de modo intencional nas aulas de Matemática.*

Palavras-chave: *Caderno quadriculado, educação matemática inclusiva, inclusão, multiplicação, educação matemática.*

DESCRIÇÃO DA OFICINA

Duração: 1 encontro - 4 h

Objetivos

- Compreender como o caderno quadriculado se torna uma ferramenta de inclusão, no processo de desenvolvimento da organização de pensamento, bem como a estruturação dos processos mentais;
- Demonstrar de que maneira o caderno quadriculado é utilizado como uma ferramenta no processo de construção dos conceitos e sistematização da multiplicação.

[295]Universidade de Brasília (UnB) e Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF)
[296]Universidade de Brasília (UnB) e Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF)
[297]Universidade de Brasília (UnB) e Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF)
[298]Universidade de Brasília (UnB)
[299]Universidade de Brasília (UnB)

Materiais: malha quadriculada; lápis de cor; lápis de escrever; tampinha; lego; borracha; sacos de organza; feijão ou outros cacarecos; copo descartável; cédula de dinheiro; dado; chocolates ou imagens.

Desenvolvimento da oficina

Introdução - Diálogo para levantamento de conhecimento sobre o uso do caderno quadriculado em sala de aula na perspectiva inclusiva.
1º passo – Entendimento do conteúdo - Distribuir imagens de chocolates ou balas, roupinhas de bonecas, tampinhas e cédulas de dinheiro. Ditar quatro situações problemas para serem resolvidas com esses materiais. Depois de discutir a resolução, identificar as ideias relacionadas à multiplicação: soma de parcelas iguais, proporção, combinação, organização retangular.
2º passo – Construção do conceito: soma de parcelas iguais - Jogo do Feijão - Distribuir copinhos de café e feijão. O jogo será coletivo, o ministrante jogará o dado vermelho que indicará a quantidade de copinhos que serão utilizados nessa rodada e o dado verde quantos feijões serão colocados em cada copinho. Após quatro rodadas, com as mediações e intervenções dos oficineiros, fazer o registro do jogo no caderno quadriculado dialogando sobre as diferenciações de registro e o auxílio nas dificuldades apresentadas dentro das especificidades.
3º passo – Construindo combinações e proporções - Distribuir legos de cores diferentes e tamanhos pequenos, médios e grandes. Ditar comandos em seja necessário compor torres com tamanhos variados de peças, assim elaborar as proporções,"Quantas peças pequenas são necessárias para compor uma peça média" "E se desejarmos montar 3 ou 4?". No segundo passo, montar as peças em colunas e linhas construindo a disposição retangular. Registrar no caderno quadriculado e dialogar sobre as diversas formas em que isso pode auxiliar na busca por inclusão nas aulas de Matemática.
4º passo – Definindo intencionalidades nas atividades: Jogo dos dados - Representação de situações problemas com saquinhos de organza e feijão, mostrando que 3×4 é diferente de 4×3, o produto é igual, em termos de tabuada e automatização dos fatos fundamentais está correto, mas em resoluções problemas o relevante é a compreensão da situação apresentada. Registrar por meio da dobradura na folha quadriculada e colar no caderno.
5º passo - Algoritmo e tabuada - Montagem da multiplicação na malha com 1, 2 ou 3 algarismos no multiplicador.Montagem da tabuada na malha e posteriormente a tabuada de Pitágoras, já reforçando os quadrados perfeitos.

O potencial inclusivo do caderno quadriculado

O caderno quadriculado desempenha um papel fundamental nas aulas de Matemática, oferecendo um campo visualmente organizado que facilita a compreensão e a construção de conceitos matemáticos. Ao contrário dos cadernos convencionais, suas páginas são divididas em pequenos quadrados, que tem $1cm$ ou $0,5cm$, sendo que o de $1cm$ é mais apropriado para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Sua utilização cria uma estrutura que auxilia os estudantes na resolução de problemas, na visualização de padrões, na elaboração de gráficos e tabelas, organização de pensamento e percepção. Ele tem usos diversos, mas, nesta produção, vamos enfatizar suas possíveis contribuições na área da Educação Matemática, na qual este tipo de caderno pode ser utilizado como uma ferramenta para auxiliar no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos (Silva, 2018).

O potencial pedagógico do caderno quadriculado está relacionado à sua capacidade de tornar tangíveis os princípios abstratos da Matemática mediante visualização e experiência diferenciada, que estimula a criatividade e a resolução de problemas por meio da compreensão do sistema decimal e sua característica posicional. Diante disso, sugere-se que o uso do caderno quadriculado pelos/as professores/as que ensinam Matemática é mais um recurso na busca por estratégias que potencializam a aprendizagem dos conceitos matemáticos, desenvolvimento motor e espacial. (Lorenzato, 2009; Marçal *et al.*, 2023).

Os/As professores/as que utilizam o caderno quadriculado defendem que o seu potencial pedagógico na área da Educação Matemática é amplo. Ele pode ser usado para ensinar conceitos como contagem, tabuada, construção do conceito de número, estabelecimento de relação número quantidade, frações, geometria, entre outros (Marçal *et al.*, 2023), visto que facilita a visualização e organização das informações.

O uso do caderno quadriculado e as possibilidades de uso é uma discussão necessária na formação inicial e continuada de professores/as, nos sistemas de ensino, em congressos, seminários, e demais eventos que tenham como objetivo ampliar conhecimentos sobre Educação Matemática e Educação Inclusiva, considerando a aprendizagem Matemática mais agradável e acessível para todos os alunos (Boaler, 2018).

Destarte, o caderno quadriculado é um material manipulável de grande relevância nas situações de aprendizagem em Matemática e na estruturação dos processos mentais, por isso sua utilização precisa ser incentivada a fim de ampliar as possibilidades de aprendizagem dos estudantes diante dos diversos estilos cognitivos, favorecendo o processo de inclusão nas aulas de Matemática. Para isso, o docente precisa planejar, estruturar uma rotina e considerar o potencial inclusivo do caderno quadriculado a medida que este dispositivo pode auxiliar na visualização e organização do pensamento, como um recurso auxiliar para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos.

CONCLUSÕES

A realização da Oficina intitulada "O uso do caderno quadriculado como dispositivo de inclusão nas aulas de Matemática" tem como objetivo estabelecer relação entre o uso do caderno quadriculado e o aumento das possibilidades de inclusão dos estudantes no trabalho com o conteúdo da multiplicação. Ao final da vivência espera-se que os participantes compreendam que o caderno quadriculado é um material que disponibiliza aos estudantes dos anos iniciais a oportunidade de coadunar recursos visuais e práticos na construção dos conhecimentos sobre o conteúdo da multiplicação e suas ideias.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos ao Grupo de Pesquisa Dzeta Investigações em Educação Matemática (DIEM); à Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF, Edital 02/2024 - Programa FAPDF Learning); à Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF); aos Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília e ao Decanato de Pós-Graduação/UnB n. 05/2024.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boaler, J.; **Mentalidades matemáticas: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador**. Porto Alegre: Penso Editora, 2018.

[2] Silva, N. C. da.; **Geometria Analítica: ensino e aprendizagem de tópicos elementares com apoio de malha quadriculada, Geogebra e Geoplano**. Nilson Correia da Silva; orientador Rui Seimetz, Brasília, 165p, 2018.

[3] Lorenzato, S.; **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2009.

[4] Marçal, D. F. C.; MOURA, E. M. B.; SANTOS, K. V. G.; MOREIRA, G. E. ; VIEIRA, L. B.; **Caderno Quadriculado e suas potencialidades pedagógicas para o ensino da Matemática**. In: Congresso Internacional Movimentos Docentes, 2023, on-line. Caderno de Resumos do Congresso Internacional Movimentos Docentes: O futuro da formação, comunidades e rede de colaboração. Santo André SP: V&V Editora, p. 299-299, 2023.

Funções básicas do GeoGebra para análise de funções trigonométricas simples

Explorando ferramentas interativas para a compreensão prática da trigonometria

Charava, Leandro[300]

Resumo: *A trigonometria é uma área da matemática muito presente no currículo do ensino médio que muitas vezes a apresentação de seu conteúdo nessas turmas apresenta desafios de compreensão para os estudantes, desde a exploração do triângulo retângulo até suas relações com as funções trigonométricas, especialmente devido à sua natureza abstrata e à falta de aplicação prática, estando normalmente ligada a memorização de fórmulas, e com um ensino mecanizado e sem contextualização.*

Em paralelo compreender e abordar as dificuldades no ensino atual requer uma reflexão profunda sobre a atualização das práticas pedagógicas, e em um mundo cada vez mais impulsionado pela tecnologia, o uso das tecnologias torna-se uma grande aliada em cativar o interesse dos estudantes e dinamizar os momentos em sala de aula. Nessa perspectiva, a utilização de ferramentas tecnológicas pode ser uma estratégia para tornar o ensino mais significativo, com isso a oficina "Funções básicas do Geogebra para análise de funções trigonométricas simples"propõe uma abordagem utilizando-se do software Geogebra como uma ferramenta pedagógica, e suas funções básicas para compreensão mais intuitiva dos conceitos básicos da trigonometria, promovendo uma visualização dinâmica, interativa e sequencial do conteúdo.

Palavras-chave: *Geogebra, ensino médio, trigonometria, tecnologias educacionais.*

INTRODUÇÃO

Segundo D'Ambrosio (2002, p. 80) a escola não se caracteriza pela apresentação de um conhecimento obsoleto e ultrapassado e sim por falar em ciência e tecnologia. E que além da disposição de fontes alternativas de pesquisa, temos o auxílio da informática, com vários softwares que possuem o objetivo de aprender, ensinar e trabalhar com a matemática, destaca ainda que "Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro"

Com isso, compete ao educador procurar e aplicar novas metodologias de ensino, inclusive adaptando-se ao mundo moderno e suas tecnologias de modo que somem nos processos de ensino e de aprendizagem, mas sempre realizando uma análise crítica dos usos que se faz das tecnologias.

[300]Universidade Tecnologica Federal do Paraná (UTFPR)

De acordo com Lopes (2012), a eficácia do processo de ensino e aprendizagem, quando influenciado pelas Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), está intrinsecamente relacionada à abordagem pedagógica adotada. Quanto ao domínio dessas TICs, Ponte (2003) ressalta a importância de os professores de Matemática estarem proficientes no uso das ferramentas tecnológicas em suas salas de aula, o que inclui o conhecimento dos softwares educacionais específicos de sua disciplina ou de educação em geral. Assim destaca-se a importância de os professores engajarem os alunos em investigações que os levem a (re)descobrir o conhecimento. Esta abordagem busca não só facilitar a compreensão do "o quê" e "porquê" das ações, mas também estimular a criatividade, o pensamento crítico e o uso eficaz do conhecimento na resolução de problemas do dia a dia, dessa forma, os estudantes têm a oportunidade de construir ativamente seu aprendizado, tornando-o mais significativo.

Objetivos

A oficina visa ensinar conceitos básicos da utilização de ferramentas do software Geogebra para construções como proposta de abordagem ao ensino e análise de funções trigonométricas simples.

Geogebra é um software livre com uma diversidade de aplicações na matemática, por integrar geometria, álgebra, tabelas, gráficos e cálculo, tornando a exploração de conceitos complexos e abstratos de maneira visual e interativa. Zulatto (2002) afirma que utilizando os recursos de um software de geometria dinâmica, os estudantes podem realizar as construções que normalmente são realizadas com régua e compasso com a diferença de que estes não permitem a interação com o desenho por serem estáticos. Espera-se que essa abordagem ofereça aos participantes uma compreensão mais profunda dos conceitos trigonométricos, e a forma como podem ser deduzidos a partir do software, facilitando sua aprendizagem e aplicação agora em diferentes contextos.

Vale ressaltar que o público alvo da oficina não é exclusivo, porém destina-se a alunos de graduação em Matemática e professores de Matemática de Educação Básica por possuírem em comum o interesse e a necessidade de aprimorar habilidades de ensino, principalmente de áreas que contenham o conteúdo de trigonometria.

Recursos e Materiais

Os materiais necessários para oficina, são simples e de fácil acesso são eles: computadores com acesso a internet (de preferência com o software do Geogebra instalado) sendo este o principal e indispensável para realização; projetor e telão para exposição de explicações e instruções generalizadas; quadro de anotações para eventuais duvidas, explicações ou comparações entre a teoria e a parte dinâmica; e por ultimo material impresso, servindo como roteiro, instrução e atividades.

Estrutura da Oficina

A estrutura da oficina é projetada em etapas sequenciais:

- Introdução ao software geogebra;
- Construções iniciais de polígonos e triângulos;
- Análise de relações métricas no triângulo retângulo;
- Exploração de Parâmetros Dinâmicos;
- Construção do ciclo trigonométrico;
- Atividades e discussões.

Inicialmente, os participantes são introduzidos às funcionalidades básicas do Geogebra, sua interface e ferramentas disponíveis, e janelas de visualização, visando uma familiarização dos participantes com o ambiente, antes das demais etapas, também sobre a construção de polígonos e triângulos, onde serão instruídos a utilizar as ferramentas de desenho, edição e comandos disponíveis no Geogebra para criar figuras geométricas básicas, explorando condições específicas necessárias e analisando suas características.

A análise dos conceitos básicos da trigonometria em triângulos constitui o núcleo central da oficina, os participantes são guiados na utilização do Geogebra para visualizar e compreender as relações trigonométricas em diferentes configurações geométricas, incluindo triângulos retângulos, também são incentivados a manipular os objetos geométricos, permitindo-lhes observar como as alterações nas configurações geométricas afetam as propriedades trigonométricas correspondentes, e a forma de que suas características iniciais são preservadas, sendo esta a exploração de parâmetros dinâmicos introduzida como uma extensão natural da análise trigonométrica.

Em seguida, a construção do ciclo trigonométrico, de acordo com Silva (2018), o ciclo trigonométrico também se revela como um material simples e eficaz no estudo das relações entre as funções trigonométricas, normalmente a disponibilização aos alunos é de forma impressa sem a construção ou o processo de desenvolvimento deste, ainda utilizando-se das ferramentas do software em questão, é possivel construir o ciclo trigonométrico, evidenciando suas principais características, facilitando a representação visual dos ângulos e das funções trigonométricas, exibindo caixas de legenda e valores a partir de fórmulas da construção, proporcionando uma perspectiva abrangente e integrada dos conceitos estudados, servindo ainda para consolidar o entendimento dos conteúdos e ações realizados anteriormente.

CONCLUSÕES

A oficina de GeoGebra visa atender uma necessidade específica que se traduz em oportunizar aos professores o desenvolvimento de um certo conhecimento tecnológico, para aprimoramento de habilidades voltadas ao ensino.

Espera-se que após a realização da oficina os participantes conheçam e entendam o funcionamentos das ferramentas simples do software Geogebra, sejam capazes de criar e adaptar as atividades e integra-las em sua prática pedagógica, que possam se adequar com os métodos e tendências de ensino para sua sala de aula no compartilhamento de conhecimento aos alunos, compreendendo como a ferramenta pode ser aplica no contexto educacional, estimulando o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ponte, J. P. ; Brocardo, J. ; Oliveira, H.; **Investigações matemáticas na sala de aula**. Autêntica Editora, 2003.

[2] D'Ambrosio, U.; **Educação matemática: da teoria à prática**. 9ª ed. Campinas: Papirus, 2002.

[3] Ferreira, R. C.; **Ensinando Matemática com o GeoGebra**. Enciclopédia Biosfera. Goiânia: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2010bb.htm> vol.6, N.10, 2010. Acesso em Mar/2023.

[4] Lopes, M. M. ; **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra**. Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, ago. 2013

[5] Zulatto, R. B. A.; **Professores de Matemática que utilizam softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

Jogos de tabuleiro

Araujo, Luccas Vinicius da Silva[301]; Rojas, Lucas Caceres[302]; Arruda, Kevelyn Desiree Ortega de[303]; Santos, Lucas de Melo[304]; Santos, Pettrick Monteiro[305]; Oliveira, Brunna Maria Barôa de[306] e Gomes, Adriana Aparecida Molina[307]

Resumo: *Este projeto visa utilizar jogos de tabuleiro como ferramentas pedagógicas para ensinar matemática, reconhecendo seu potencial no desenvolvimento de habilidades como autonomia, criatividade, colaboração e resolução de problemas. Dividido em duas etapas - conhecimento dos jogos e elaboração de atividades - o trabalho envolveu a seleção e o estudo de diversos jogos, como Contig 60, Halma, Reverse... O objetivo de compreender suas regras, identificar elementos matemáticos e explorar maneiras de produzi-los com materiais recicláveis para uso em sala de aula. Na fase de aplicação, os jogos Contig 60 e Halma foram introduzidos em turmas do ensino fundamental, desde a apresentação até a resolução de situações-problemas. Os resultados mostraram um impacto positivo significativo, com melhorias notáveis nas notas dos alunos e aumento da motivação, tornando as aulas mais dinâmicas e envolventes. A introdução dos jogos trouxe um novo entusiasmo para o processo de aprendizagem, destacando o sucesso das aplicações e ressaltando a eficácia da inclusão de jogos de tabuleiro como estratégia educacional. Essa abordagem não apenas aprimorou o domínio dos conceitos acadêmicos, mas também enriqueceu as habilidades sociais e cognitivas dos alunos, demonstrando a importância da aprendizagem contextualizada e dinâmica.*

Palavras-chave: *Jogos de tabuleiro, aprendizagem matemática, resolução de problemas, conceitos matemáticos.*

INTRODUÇÃO E JUSTIFICATIVA

A incorporação dos jogos na sala de aula ofereceu uma oportunidade única para nós, graduandos, promovermos a compreensão conceitual e a aplicação dos conceitos matemáticos, ao mesmo tempo em que estimulamos a criatividade, a colaboração e a resolução de problemas entre os alunos (Grando, 2000). Ao abordar os jogos como veículos de aprendizado, Grando (2004) destaca a importância de uma educação dinâmica e contextualizada que permita aos alunos não apenas aprenderem a abstrair conceitos, mas também aplica-los em situações do mundo real, contribuindo assim para uma compreensão mais significativa. Dessa forma, surge o presente trabalho, com o objetivo de introduzir os jogos de tabuleiro no ambiente da sala de aula.

[301]UFMS,luccas.araujo@ufms.com
[302]UFMS,lucas.caceres.rojas@ufms.br
[303]UFMS,kevelyn_desiree@ufms.br
[304]UFMS,lucas.melo.santos@ufms.br
[305]UFMS,pettricksantos1@gmail.com
[306]UFMS,brunna_baroa@ufms.br6
[307]UFMS,adriana.molina@ufms.br

METODOLOGIA

O projeto dividiu-se em duas etapas, a primeira consistiu em selecionar e analisar diversos jogos para determinar sua viabilidade como ferramentas de ensino nas escolas. Os jogos escolhidos para essa análise foram Contig 60, Halma, Reverse, Hawalis, Senet, Fanorona, Agon e Dou Shou Qi. Sendo que desses o Contig 60, Halma e Senet escolhidos para a segunda etapa, que consistiu em aplicá-los em sala de aula.

O processo de avaliação ocorreu durante reuniões semanais, onde os estudantes se dedicaram a jogar os jogos, analisá-los e elaborar atividades sobre os mesmos. A análise consistia em verificar se eles eram apropriados para serem trabalhados com turmas de 30 a 40 alunos do ensino fundamental e médio. Os objetivos das atividades eram: compreender as regras, identificar os elementos matemáticos e investigar maneiras de produzi-los de forma econômica, uma vez que seria necessário produzi-los em larga escala para envolver toda a turma.

A aplicação ocorreu em duas escolas estaduais e no Instituto Federal de Corumbá – MS. Em todas as turmas foi aplicado o Contig 60, enquanto o Halma e o Senet foram aplicados em turmas do ensino médio, sendo essas turmas as que trabalharam com os jogos desde a sua confecção em sala de aula até a resolução de situações-problemas.

MATERIAIS

Oficina: para o ambiente a ser utilizado iremos precisar de uma sala ou com mesas ou um laboratório com balcões para a utilização dos tabuleiros, em relação a duração da oficina optaremos por um dia de 4 horas, pois é melhor para desenvolver os jogos com os participantes, e o total máximo de participantes será 40.

Contig 60: com ele é possível jogar duas duplas (4 pessoas por tabuleiro), então levaremos 10 tabuleiros plastificados, 30 dados (3 por tabuleiro), 20 canetões de quadro (2 por tabuleiro), 20 lápis e 20 folhas de sulfite.

Halma: com ele é possível jogar 4 pessoas por tabuleiro, então também levaremos 10 tabuleiros (em papel cartão 10×10), 320 peças (32 por tabuleiro, feitas com tampa de garrafa PET) e folha sulfite com regras.

Senet: com ele é possível jogar 2 pessoas por tabuleiro, então levaremos 20 tabuleiros plastificados, 80 dados (4 por tabuleiro, cada um feito com cabo de vassoura cortado, com 8 centímetros de comprimento) e 200 peças (10 por tabuleiro, cada uma feita com E.V.A.).

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os jogos de tabuleiro tiveram um impacto positivo no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, ao compararmos as notas pré e pós-atividades. Essa incorporação dos jogos na abordagem educacional originou entusiasmo e energia, resultando em um aumento significativo nos níveis de motivação dos alunos. A eficácia dessa abordagem evidenciou que os jogos transformaram as aulas em experiências estimulantes e cativantes para os alunos. Visto que eles não estavam familiarizados com os jogos nas aulas de matemática e isto foi percebido ao analisarmos as notas anteriores e posteriores à incorporação dos jogos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste projeto, a introdução de jogos de tabuleiro na sala de aula teve um impacto notavelmente positivo, aumentando a motivação e melhorando as notas dos alunos. A avaliação criteriosa de jogos como Contig 60 e Halma mostrou que eles são ferramentas de ensino eficazes. Além disso, os jogos tornaram as aulas mais cativantes, estimulando o entusiasmo pelo aprendizado e resultando em um aumento claro no sucesso acadêmico. Isso sugere que a inclusão de jogos na educação pode ser uma estratégia valiosa para aprimorar o processo de aprendizagem e o desempenho dos alunos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Grando, R. C.; **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Campinas, SP: [sn], p. 239, 2000.

[2] Grando, R. C.;**O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula.** São Paulo, São Paulo: Paulus, 2004.

Integrais triplas: uma abordagem computacional com o Maple

Pereira, Luiz Claudio[308]

Resumo: *A presente oficina, com duração de 4 horas, pretende, a partir de problemas propostos, desenvolver, de forma interativa, com o uso do Maple, a resolução de integrais triplas por meio do Teorema de Fubini. Primeiro, com o Maple, construir-se-á o sólido* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *referido no problema proposto. Após, examinar-se-á a situação, decidindo que projeção é mais conveniente. Por fim, instruir-se-á o programa a efetuar ordenadamente as integrais repetidas pertinentes. Espera-se que a presente oficina, embora de caráter elementar, estimule e incentive os participantes a usar o Maple como ferramenta de auxílio no processo de aprendizagem; particularmente, no estudo de integrais triplas.*

Palavras-chave: *Maple, integrais, triplas, teorema, Fubini.*

A INTEGRAL TRIPLA E O TEOREMA DE FUBINI

A construção da representação de uma situação do espaço tridimensional numa folha de papel, antes, explorada, por exemplo, em disciplinas de desenho geométrico, é uma habilidade cada vez menos desenvolvida ao longo dos anos de estudo que precedem ao ingresso no ensino superior.

Uma consequência, dentre outras, dessa inabilidade é que ao lidar com um sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, poucos são os indivíduos aptos a esboçar, com razoável acurácia, numa folha de papel, a superfície $S = \partial\Omega$ e menos ainda aqueles capazes de visualizar a projeção de Ω sobre os planos coordenados.

Essa deficiência, por sua vez, tende a repercutir gravosamente na capacidade do indivíduo em resolver problemas envolvendo integrais triplas porquanto, pelo Teorema de Fubini, tem-se que

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint_U \left[\int_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}A,$$

onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é a projeção de Ω sobre o plano coordenado xy.

A projeção acima referida pode ser realizada sobre o plano coordenado xz ou sobre o plano coordenado yz, alterando-se, *mutatis mutandis*, a expressão dada pelo Teorema de Fubini. Nesse sentido, a partir de uma projeção sobre o plano coordenado yz, decorre que

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iint_D \left[\int_{\lambda(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}A,$$

[308]Docente da Universidade de Brasília.

onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a projeção de $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sobre o plano coordenado yz.

A integral dupla, de acordo com o Teorema de Fubini, é resolvida através de duas integrais repetidas, mediante análise da curva $C = \partial D$.

Nesse caso, as duas alternativas são

$$\iint_D \left[\int_{\lambda(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}A \quad = \quad \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \left[\int_{\lambda(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y,$$

quando $C = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(y) \leq z \leq \beta(y) \text{ e } a \leq y \leq b \right\}$, ou

$$\iint_D \left[\int_{\lambda(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}A \quad = \quad \int_c^d \left\{ \int_{\nu(z)}^{\phi(z)} \left[\int_{\lambda(y,z)}^{\sigma(y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z,$$

quando $C = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \nu(z) \leq y \leq \phi(z) \text{ e } c \leq z \leq d \right\}$.

A abordagem computacional com o Maple

Conforme visto, a resolução de uma integral tripla exige que o indivíduo reconheça e decida que projeção merece ser utilizada no desenvolvimento da integral dupla. Essa, por sua vez, requer que se examine a curva que determina a fronteira da projeção. O sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é, em geral, determinado pela superfície $S = \partial\Omega$.

Na abordagem computacional com o Maple, proposta nesta oficina, considerar-se-á que a superfície $S = \partial\Omega$ é formada pela união finita de superfícies parametrizáveis. Isso significa que existe um número finito de aplicações

$$\begin{array}{rccl} X: & D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = X(u,v) \end{array}$$

tais que o traço de X é igual a S.

Assim, obtida uma parametrização apropriada para $\partial\Omega = S$, para exibição da superfície que determina o sólido, no Maple, usa-se o comando *plot3d* de sintaxe

$$plot3d \ \ (\ \ [\ \ x(u,v), \ \ y(u,v), \ \ z(u,v) \ \ ], \ \ u = a_1..a_2, \ \ v = b_1..b_2, \ \ options \ \ );$$

com a_1, a_2, b_1, b_2 escolhidos adequadamente.

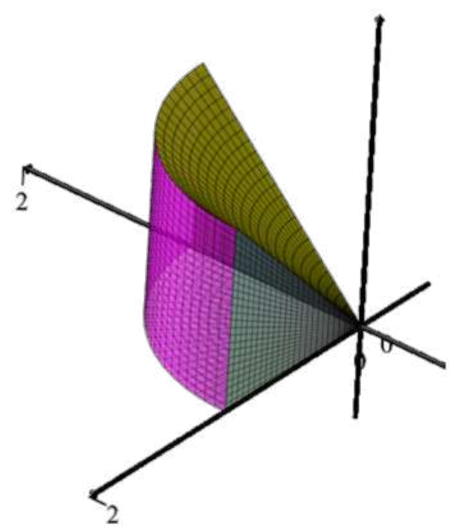


Fig. 95: Autoria própria

Acima, exibe-se um sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cuja superfície $S = \partial\Omega$ é formada por um cone, um cilindro e três planos, gerado pelo Maple a partir do comando *plot3d* e outros correlatos.

A partir da figura, o interessado pode tentar esboçar no papel a figura, treinando sua habilidade motora e desenvolvendo sua percepção geométrica. Demais, a manipulação deste sólido no Maple permite inferir que projeção merece ser utilizada no cálculo da integral tripla em Ω, de uma função real de três variáveis f, segundo o Teorema de Fubini.

Nesse caso, as três integrais repetidas podem ser determinadas pelo Maple por meio de três comandos Int encaixados, de acordo com a sintaxe

$$Int\ \ (Int\ \ (Int\ \ (\ \ f(x,y,z),\ \ x=a_1..a_2,\ \ y=b_1..b_2,\ \ z=c_1..c_2\ \ )\ \ )\ \ );$$

onde $a_1..a_2$, $b_1..b_2$ e $c_1..c_2$ denotam, respectivamente, a variação de x, y e z, conforme as escolhas da projeção U do sólido e da curva $C = \partial U$.

CONCLUSÃO

Nesta oficina, a partir de problemas propostos, desenvolver-se-á, de forma interativa, a resolução de integrais triplas por meio do Teorema de Fubini, conforme delineado acima. Primeiro, com o Maple, construir-se-á o sólido $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Após, examinar-se-á a situação, decidindo que projeção e curva são mais convenientes. Por fim, instruir-se-á o programa a efetuar ordenadamente as integrais repetidas pertinentes.

Nesse sentido, espera-se que a presente oficina, embora de caráter elementar, estimule e incentive os participantes a usar o Maple como ferramenta de auxílio no processo de aprendizagem; particularmente, no estudo de integrais triplas.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRADE, L. N. **Introdução à Computação Algébrica com o Maple**. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

[2] ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. **Cálculo**, 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018. v. 2.

[3] WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo (George B. Thomas Jr)**, 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v. 2.

Oficina para o estímulo de criatividade em geometria

Explorando os Poliedros de Platão com o Cubo Sonobe

Leal, Márcia Rodrigues[309]; Moura, Mayra Camelo Madeira de[310]; Oliveira, Raimunda de[311]; Gontijo, Cleyton Hércules[312]

Resumo: *A oficina tem como objetivo desenvolver o pensamento geométrico a partir da construção de figuras por meio de origami, bem como instigar a imaginação, a criatividade, a concentração e a paciência. O foco é a manipulação e a análise dos Poliedros de Platão, construindo o Cubo Sonobe. Este cubo é um origami modular, contendo peças iguais que se encaixam. Esta atividade será conduzida em 2 horas dentro do modelo proposto por Gontijo (2023) de Oficinas de Pensamento Crítico e Criativo em Matemática. Espera-se com a realização da oficina provocar nos participantes o envolvimento com a construção de formas geométricas tridimensionais, incentivando-os na exploração, na curiosidade, na formulação de hipóteses, na variedade de soluções, na originalidade, na flexibilidade, na investigação matemática e no desenvolvimento da Criatividade em Geometria segundo Leal (2023).*

Palavras-chave: *Pensamento geométrico, criatividade em geometria, poliedros de Platão.*

DESCRIÇÃO

A oficina consiste na construção do Cubo Sonobe, um origami modular, onde seis módulos iguais se encaixam para construção da figura tridimensional. Nesta oficina, os participantes não se limitarão a aprender como construir o cubo, mas por meio da interação, da manipulação e do formato como se dará esta atividade, serão estimulados a desenvolver a criatividade e o pensamento crítico em matemática, mais especificamente dentro do contexto da geometria.

Esse incentivo a curiosidade, exploração e variedade de soluções se dará no momento que os participantes terão as peças bases do cubo construídas, mas terão que testar diferentes meios de montá-lo, podendo chegar até a outras figuras tridimensionais, como prismas e pirâmides.

Esta atividade será conduzida dentro do modelo desenvolvido por Gontijo (2023) de Oficinas de Pensamento Crítico e Criativo em Matemática. A oficina foi estruturada para ser desenvolvida em 2h, de modo que os participantes possam manipular o material para a construção do sólido. Realizaremos uma abordagem teórica (30 minutos) apresentando a estrutura da oficina e, em seguida, desenvolveremos a atividade prática, a saber:

[309]Instituto Federal de Goiás - IFG, Goiás. E-mail: marcialeal629@gmail.com
[310]Instituto Federal de Goiás - IFG, Goiás. E-mail: mayra.moura@ifg.edu.br
[311]Secretaria de Educação do Estado do Distrito Federal. E-mail: raimunda.oliveira@aluno.unb.br
[312]Universidade de Brasília - UnB, Brasília. E-mail: cleyton@unb.br

A atividade foi estruturada com uma abordagem teórica (30 minutos) apresentando a estrutura da oficina e, em seguida, desenvolveremos a atividade prática, a saber:

1ª FASE: Aquecimento - Exploraremos uma atividade interativa desafiadora, envolvendo padrões geométricos, a fim de despertar o interesse dos participantes;

2ª FASE: Aproximação com a tarefa - Construiremos, passo-a-passo, as peças modulares, para utilização na próxima etapa;

3ª FASE: Problema investigativo - Provocaremos a prática da construção do Cubo Sonobe, a partir das peças modulares, instigando os participantes a explorarem diferentes caminhos para essa construção. Estimularemos a socialização dos achados de cada um. Esse é o momento da resolução e criação de diferentes soluções;

4ª FASE: Formalização de conceitos - Exploraremos como o Cubo Sonobe poderia ser construído, se haveria outras formas de dobrar e chegar à mesma construção. Neste momento, ocorre a análise das propostas dos participantes, além da formalização e da sistematização de conceitos e definições.

5ª FASE: Apreciação - Será o momento de refletir sobre a produção do Cubo Sonobe. Meditar sobre o que foi sentido, sistematizado e vivenciado na oficina.

6ª FASE: Projeções - Momento de aprimoramento do exemplo trabalhado. Explorar novas possibilidades de situações didáticas utilizando os módulos do Cubo Sonobe, até mesmo com diferentes materiais, buscando o ineditismo.

O **material necessário** para um público de 30 participantes são 18 unidades de papel origami (20cmx20cm) para cada um, de preferência que cada participante fique com pelo menos seis cores distintas, além de 5 tubos de cola branca, 5 tesouras e 5 grampeadores. Precisaremos de uma sala com mesas (para os participantes) e data show para exposição de slides.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Vários trabalhos defendem a necessidade de se inserir a criatividade na educação matemática como Kwon, Park e Park (2006), Gontijo (2007), Gontijo e Fonseca (2020). Tais estudos encontram fundamentação na necessidade do desenvolvimento da criatividade como uma das competências do século XXI, de acordo com a Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE).

Desta forma, estudos como Gontijo e Fonseca (2020), Lipman (2003) e Leal (2023), trazem reflexões de que o estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática não competem entre si, mas se complementam e proporcionam um estímulo ao pensamento intuitivo. Além disso, auxiliam os alunos a superarem dificuldades de aprendizagem.

Na busca pelo desenvolvimento desses quesitos, Gontijo (2023) propôs as oficinas de estímulo ao pensamento crítico e criativo em matemática, compostas por seis fases, conforme apresentado na descrição. Nesse caso, buscamos explorar em paralelo, o pensamento geométrico, como a capacidade que permite uma pessoa compreender a geometria composta por entidades mentais, que têm características conceituais e figurativas. (FISCHBEIN,1993)

CONCLUSÕES

De acordo com Leal (2023), acredita-se que esse modelo de oficina possibilita estimular a criatividade em geometria, isto é "a capacidade de explorar o espaço e as formas com aplicação teórica, prática e investigativa entre as suas relações, solucionando e elaborando problemas que possam ser contextualizados em situações cotidianas"(p. 281) Desta forma, tais oficinas permitem o desenvolvimento da fluência, flexibilidade e originalidade de pensamento em matemática, essenciais para o estímulo à criatividade nesta disciplina.

BIBLIOGRAFIA

[1] Fischbein, E. *The Theory of Figural Concepts.* **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993.

[2] Fonseca, M. G.; Gontijo, C. H. Pensamento crítico e criativo em matemática em diretrizes curriculares nacionais. **Ensino emRe-Vista**, Uberlândia, v. 27, n. 3, p. 956-978, set./dez. 2020.

[3] Gontijo, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio**. Tese (Doutorado em Psicologia) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2007.

[4] Gontijo, C. H. Estímulo do Pensamento Crítico e Criativo em Matemática: uma proposta de oficinas. **Revista de Educação Pública**, v. 32, n. jan/dez, p. 300–324, 2023.

[5] Kwon, O. N.; Park, J. S.; Park, J. H. Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. **Asia Pacific Education Review**, Seoul, v. 7, n. 1, p. 51-61, 2006.

[6] Leal, M. R. **Percepções de licenciandos a respeito da Criatividade em Matemática no campo da Geometria**. 325f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2023.

[7] Lipman, M. **Thinking in education**. UK: Cambridge University Press, 2003.

A lógica de Hitchcock: investigando a validade de argumentos por meio de sequências de cenas do filme Vertigo

Paim, Marcio[313]; Barreto, Maria Raidalva Nery[314] e Pereira, Marcelo[315]

Resumo: *Essa oficina pretende investigar validade de argumentos lógicos mediante três sequências de cenas do filme Vertigo, de Alfred Hitchcock. Diante dessa sequência de cenas específicas do suspense cinematográfico, busca-se determinar a validade de um argumento lógico pela tabela verdade. Ao assisti-las, cada participante deverá completar uma tabela para cada cena, atribuindo um valor lógico V(Verdadeiro) ou F(Falso) para uma proposição simples que representa o que ele observa no filme. Espera-se que essa atividade auxilie no desenvolvimento do raciocínio lógico, compreendendo o significado de um argumento e do pensamento lógico matemático, criando condições para a aprendizagem matemática.*

Palavras-chave: *Argumento lógico, cenas fílmicas, suspense cinematográfico.*

INTRODUÇÃO

O cinema, como produtor de cultura e do entretenimento, provoca no seu espectador emoções variadas por meio de sessões fílmicas nos diversos gêneros cinematográficos. Ora, as cenas fílmicas provenientes da idealização do diretor de cinema tem relação com a nossa vida cotidiana, ora, são provenientes da sua farta imaginação. São cenas que contém uma sequência de imagens criadas para revelar ao espectador algo que estará por vir, um acontecimento inesperado ou uma situação que ele possa refletir, e que diante das suas inferências possa deduzir o que irá acontecer. Um dos gêneros cinematográficos suscetível à essa dedução é o suspense.

O suspense é a suspensão da ação, é a extensão do tempo cinematográfico que cria uma expectativa para quem o assiste. Segundo Silva (2019), o termo foi popularizado pelo célebre diretor Alfred Hitchcock (1899 – 1980), considerado por muitos como o“mestre do suspense”. Se caracteriza como um elemento artístico presente na trama que motiva o desenrolar das ações entre os personagens (um objeto, uma pessoa, um transtorno, sentimentos e emoções). É um pretexto para o desdobrar da narrativa. Entretanto, é durante esse processo que o espectador, ao assistir uma cena, é envolvido pela curiosidade em saber o que pode acontecer nas cenas seguintes. Esse artifício insere a plateia em uma atmosfera desconhecida, resultando assim em expectativas por parte daquele que observa, Silva (2019).

Ao observarmos determinadas cenas do suspense cinematográfico, percebemos uma sequência de imagens misteriosas e curiosas que passam sucessivamente diante dos nossos olhos. Cada imagem intermitente e vista

[313]Instituto Federal da Bahia, campus de Santo Amaro, marciopai@gmail.com
[314]Instituto Federal da Bahia, campus de Camaçari, raibarreto@gmail.com
[315]Universidade de São Paulo, mpereira@ffclrp.usp.br

pelo espectador, se prolonga na sua imaginação de maneira invisível. Essa imagem guardada na memória é dotada de informações e regras imbricadas dentro de uma expectativa. Desse modo, a curiosidade e o mistério retirados de uma cena fílmica do suspense abre várias possibilidades de conclusão.

A partir daí, é razoável supor que o suspense pode ativar a imaginação, a intuição e o raciocínio lógico-matemático do espectador sobre o que acontecerá em uma determinada cena, a surpresa vai garantir se esse raciocínio estará correto ou não. Logo, essa oficina tem o objetivo de investigar a validade de argumentos lógicos que se fazem presente em diálogos de cenas do filme Vertigo (Um corpo que cai), do diretor Alfred Hitchcock.

DESENVOLVIMENTO

Em nossa lógica usual e dual, uma proposição é uma frase declarativa que tem sentido completo e pode ser classificada como Verdadeira ou Falsa. Uma frase do tipo "**O sol brilha**" é considerada como uma proposição p simples Verdadeira, por exemplo. Consequentemente, a sua negação $\sim p$ ("não p") será: "O sol não brilha". Em se tratando de proposições compostas, surgem os conectivos lógicos que unem as proposições simples. Quando se fala "**O sol brilha e esquenta**", tem-se o conectivo "**e**", que compõe as proposições p**: O sol brilha** e q**: O sol é quente**. Nessa lógica, utilizamos quatro conectivos lógicos para classificar as proposições compostas como Verdadeira ou Falsa:

Tab. 5: Conectivos lógicos

NOME	**SÍMBOLO**	**COMO SE LÊ**
Conjunção	$\wedge$	"e"
Disjunção	$\vee$	"ou"
Condicional	$\rightarrow$	"se, então"
Bicondicional	$\leftrightarrow$	"se, e somente se"

Cada conectivo possui sua própria condição, além do conjunto de possibilidades para os valores lógicos (V e F) de p e q:

Tab. 6: Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Independentemente de mais explicações sobre o porquê dos resultados dessas possibilidades, já que isso será explicado na oficina, chama-se argumento válido toda sequência de proposições p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n, p_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$, tal que a conjunção das n primeiras implica a última, isto é:

$$p_1, p_2, \cdots, p_n \Rightarrow p_{n+1}.$$

Em outras palavras, p_1, p_2, p_3, $\cdots$, p_n são as premissas e p_{n+1} a conclusão. Nessa implicação, o argumento é válido se a condicional $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \rightarrow p_{n+1}$ for verdadeira. Por outro lado, o argumento será inválido se não ocorrer essa implicação.

Podemos verificar a validade de um argumento pela tabela verdade ou considerar a conclusão falsa para chegarmos num absurdo, sendo ele válido. Tomando como exemplo as premissas p_1, p_2, p_3 e a conclusão p_4:

Tab. 7: Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tab. 8: Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tab. 9: Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$p_1: \quad p \rightarrow q$

$p_2: \quad \sim p$

$p_3: \quad p \vee q$

$p_4: \quad \sim q$

Utilizando a tabela verdade:

Tabela 6: Exemplo de um argumento inválido

PROPOSIÇÕES		p_1	p_2	p_3	p_4	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \longrightarrow p_4$
p	q	$p \longrightarrow q$	$\sim p$	$p \vee q$	$\sim q$	$[(p \longrightarrow q) \wedge (\sim p) \wedge (p \vee q)] \longrightarrow (\sim q)$
V	V	V	F	V	F	V
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Nesse caso, o argumento $[(p \to q) \wedge (\sim p) \wedge (p \vee q)] \to (\sim q)$ **é inválido** devido ao valor F situado na 5^a linha da última coluna da tabela acima. Se os valores lógicos das quatro últimas linhas da última coluna fossem V, o argumento seria válido. Diante de três cenas do filme Vertigo, utilizaremos esse mesmo raciocínio para mostrar a validade, ou não, de certos argumentos.

Proposta da Oficina

Os participantes da oficina assistirão ao filme, durante a sessão serão exibidas três sequências de cenas escolhidas pelo proponente. Depois de cada sequência, o proponente irá interromper a sessão por um momento para realizar a atividade e conversar sobre os aspectos lógicos que envolvem os personagens e as suas ações. Essa atividade terá duração mínima de 2h40min.

A atividade

Complete as tabelas verdade a seguir, atribuindo V (verdadeira) ou F (falsa) para as premissas (proposições), e, em seguida, julgue o argumento.

1ª CENA: **Scotie segue Madeleine**

P_1: Madeleine está no hotel = p

P_1: Se Madeleine está no quarto, então está no hotel = $q \to p$

Q: Madeleine está no quarto = q

Q	P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \to Q$
q	p	$q \to p$	$p \wedge (q \to p)$	$(p \wedge (q \to p)) \to q$

O argumento $P_1 \wedge P_2 \to Q$ é:

( ) válido

( ) inválido

2ª CENA: **Scotie segue Madeleine**

P_1: O corpo cai do alto da igreja = p

P_2: Se Scotie sobe as escadas da igreja, Madeleine se joga = $q \to r$

Q: Madeleine se joga = r

O argumento $P_1 \wedge P_2 \to Q$ é:

( ) válido

( ) inválido

3ª CENA: **Scotie vai ao alto da igreja com Madeleine**

P_1: Madeleine observa um vulto = p

P_2: Se Madeleine observa um vulto, ela se joga = $p \to q$

Q: Madeleine se joga = q

O argumento $P_1 \wedge P_2 \to Q$ é:

( ) válido

( ) inválido

	Q	P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$(P_1 \wedge P_2) \rightarrow Q$
q	r	p	$q \rightarrow r$	$p \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow r$

Q	P_1	P_2	$P_1 \wedge P_2$	$P_1 \wedge P_2 \rightarrow Q$
q	p	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Conclusão

Acreditamos que alguns filmes de suspense podem nos ajudar a pensar de maneira lógica, porque as suas cenas criam condições para a existência desse pensamento matemático, que se encontra no interesse de quem assiste a cena ou vê uma imagem e pretende desvendar um mistério ou enigma proposto. Um pensamento que permite a comparação, associação, medição, ..., de informações que estão disponíveis numa cena específica.

Em muitos filmes do suspense cinematográfico é possível que haja uma relação direta entre o surgimento de um raciocínio matemático e o acompanhamento de uma cena do suspense por um espectador. Esse tipo de pensamento está vinculado a intuição ou dedução do espectador assistente no processo de descoberta, da motivação em querer resolver um problema ou descobrir algo, assim como na descoberta da solução de um problema matemático.

Essa forma de pensamento permite que o estudante desenvolva a sua maneira de pensar, de associar e comparar determinados conceitos e informações, estimulando a sua criatividade e construindo significados. Portanto, as características da cena, ou sequência de cenas específicas de um filme de suspense, podem contribuir para o surgimento de um pensamento analógico (comparativo), gerando no espectador uma forma de pensar capaz de associar diversas situações matemáticas reais que criam sentido para a sua aprendizagem matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aumont, J.; **A imagem.** Tradução: Estela dos Santos Abreu e Claudio Santoro – Campinas, SP. Papirus, 1993.

[2] Gow, G.; **Supense in the cinema.** Alabama A&M University, 1968.

[3] Martins, K. P. H.; **O inconsciente em suspense – um estudo do processo de elaboração através do cinema Hitchcockiano.** Dissertação de mestrado. PUC – Rio de Janeiro, 1995.

[4] Weschenfelder, R.; **A imagem invisível no cinema.** Brusque: Ed. Unifebe, 2020.

[5] Silva, C. F.; **Leitura e Adaptação Cinematográfica: O suspense em Psicose.** Trabalho de Conclusão de Curso. UFPR, 2019.

[6] Vertigo Direção: Alfred Hitchcock. Produção: James C. Katz. Intérpretes: James Stewart, Kim Novak, Barbara Bel Geddes et al. Roteiro: Alec Coppel, Samuel A. Taylor. Música: Bernard Herrmann. Estados Unidos: Universal, c1958. 1DVD (129 min), widescreen, color. Entreterse. Ficha técnica do filme Um corpo que cai. Disponível em https://entreterse.com.br/ficha-tecnica/ficha-tecnica-um-corpo-que-cai-1958Acesso em: 20 fev. 2024.

Explorando a matemática de forma lúdica para crianças com transtorno do espectro autista no ensino fundamental anos finais

Neto, Oséas Guimarães Ferreira[316]; Reis, Tatiana do Socorro Coutinho[317] e Júnior, Antônio Alencar dos Santos[318]

Resumo: *A oficina "Explorando a Matemática de Forma Lúdica" foi desenvolvida com o objetivo de oferecer uma abordagem inclusiva e estimulante para o ensino de matemática a crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA) no ensino fundamental anos finais. A oficina é dividida em dois momentos, cada um com duas horas de duração, proporcionando um ambiente acolhedor e gradual para a exploração de conceitos matemáticos. A metodologia adotada enfatiza o uso de atividades práticas, jogos e recursos visuais para promover a compreensão e o engajamento dos participantes.*

Palavras-chave: *Transtorno do espectro autista, inclusão e jogos matemáticos.*

INTRODUÇÃO

O Transtorno do Espectro Autista (TEA) apresenta desafios específicos no ensino de matemática, exigindo abordagens pedagógicas adaptadas e sensíveis às necessidades individuais das crianças. Esta oficina visa criar um espaço inclusivo e acolhedor onde as crianças com TEA possam explorar conceitos matemáticos de forma divertida e acessível. Através de atividades práticas e interativas, buscamos promover o desenvolvimento cognitivo, social e emocional dos participantes, ao mesmo tempo em que fortalecemos suas habilidades matemáticas.

REFERENCIAL TEÓRICO

Esta oficina baseia-se em princípios da educação inclusiva e em pesquisas que destacam a importância de abordagens diferenciadas no ensino de matemática para crianças com TEA. As estratégias utilizadas são construídas por teorias de aprendizagem que enfatizam a importância do envolvimento ativo, do uso de múltiplos sentidos e da adaptação do currículo para atender às necessidades individuais dos alunos.

[316]Secretária de Educação do Pará, oseas.neto3234@escola.seduc.pa.gov.br
[317]Secretária de Educação do Pará, tatiana.creis@escola.seduc.pa.gov.br
[318]Secretária de Educação do Pará, antonio.asjunior@escola.seduc.pa.gov.br

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC – 2017) nos diz que, a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho, devem ser adotadas por escolas e educadores no sentido de promover não só o desenvolvimento intelectual, mas o social, físico, emocional e cultural. Com uma crescente demanda de alunos com TEA, os docentes da área de Matemática necessitam de apoio na construção e adaptação de metodologias que estimulem a socialização do aluno e potencializem o seu aprendizado.

DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES

O Documento Curricular do Estado do Pará (DCEPA – 2022), apresenta uma matriz para a área de Matemática com quatro eixos: (1) Números e Álgebras; (2) Geometria; (3) Grandezas e Medidas e (4) Probabilidade e Estatística. Nessa oficina, vamos disponibilizar uma atividade prática para cada eixo dessa matriz.

1. **Jogo dos Números Coloridos** (Números e Álgebra, 30 minutos): Os participantes serão divididos em pequenos grupos e receberão cartões com números coloridos. Eles deverão organizar os números em sequências corretas, seguindo um padrão de cores específico. Esta atividade visa desenvolver habilidades de reconhecimento numérico, ordenação e padrões.

2. **Construção de Figuras Geométricas** (Geometria, 60 minutos): Cada participante receberá um conjunto de peças de montar geométricas. Eles serão orientados a seguir instruções visuais para construir figuras geométricas simples, como triângulos, quadrados e retângulos. Esta atividade promove a compreensão de conceitos espaciais e geométricos de forma tangível e concreta.

3. **Construção de Gráficos com Blocos** (Probabilidade e Estatística, 45 minutos): Cada participante receberá uma quantidade de blocos de diferentes cores. Eles serão orientados a construir gráficos simples, representando dados como cores favoritas, tipos de alimentos preferidos ou número de irmãos. Essa atividade promove a compreensão de conceitos estatísticos básicos, como coleta e representação de dados.

Momentos	Descrição das Ações da Oficina	Tempo
1º DIA	Apresentação da Motivação e os referenciais Teóricos usados para a Construção da Oficina	30 minutos
	1ª Atividade: Jogo dos Números Coloridos	30 minutos
	2ª Atividade: Construção de Figuras Geométricas	60 minutos
2º DIA	3ª Atividade: Caça ao Tesouro Matemático	45 minutos
	4ª Atividade: Construção de Gráficos com Blocos	45 minutos
	Considerações e Avaliações da Oficina.	30 minutos

Fig. 96: Autoria própria

METODOLOGIA

A oficina será conduzida de forma interativa e participativa, combinando apresentações teóricas com atividades práticas. Os participantes serão encorajados participar e a compartilhar suas experiências e desafios, enquanto colaboram na exploração de estratégias eficazes para o ensino de matemática para crianças com TEA.

CONCLUSÃO

A oficina “Explorando a Matemática de Forma Divertida” proporcionará uma oportunidade para docentes ampliarem suas habilidades metodológicas e para os discentes com TEA se envolverem ativamente com os conceitos matemáticos de maneira inclusiva e estimulante. Através de atividades práticas e lúdicas, os participantes irão desenvolver suas habilidades matemáticas enquanto se divertem e interagem com seus colegas. Espera- se que os princípios e estratégias apresentados nesta oficina possam servir como modelo para futuras iniciativas educacionais voltadas para crianças com TEA.

BIBLIOGRAFIA

[1] **American Psychiatric Association.** Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais - DSM-5. Artmed Editora, 2013.

[2] Brasil, Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf/` Acesso em 28 de março de 2024.

[3] Pará, **Documento Curricular para Educação Infantil e Ensino Fundamental do Estado do Pará.** Resolução no 769, dezembro 2018. Disponível em `www.seduc.pa.gov.br`. Acesso em 29 de março de 2024.

[4] Heward, W. L.; **Educação de crianças com necessidades especiais na escola regular.** Penso Editora, 2013.

[5] **National Council of Teachers of Mathematics.** Princípios e Padrões para a Matemática Escolar. Editora Artmed, 2000.

Regularidades de repetição[319]

Entendendo a estrutura Matemática das Regularidades de Repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões

Borin, Renata[320]; Espitti, Ligia[321]; Correa, Mariana[322]; Menezes, Sandra[323]; Almeida, Alessandra[324] e Ribeiro, Miguel[325]

Resumo: *Os alunos apresentam dificuldades no entendimento da matemática e isso é um reflexo das práticas e exercícios mecanizados e sem sentido para os alunos. Para a melhoria da qualidade das aprendizagens matemáticas é fundamental desenvolver o conhecimento especializado do professor, possibilitando que os alunos entendam matemática e os permitam desenvolver formas de Pensar Matematicamente. Esta oficina tem como objetivo ampliar o conhecimento especializado do professor, na perspectiva do Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, no âmbito das regularidades de repetição. Discutiremos uma Tarefa para a Formação que tem como gênese uma proposta para a sala de aula que potencializa a generalização matemática.*

Palavras-chave: *Regularidade repetitiva, anos iniciais, conhecimento especializado, pensar matematicamente.*

INTRODUÇÃO

Ensinar matemática não pode ser apenas demonstrar fórmulas e resolver problemas mecanicamente, mas exige entender o que se faz e porque se faz a cada momento (Ribeiro, 2021). Para isso, torna-se necessário possibilitar que os alunos desenvolvam as suas formas de Pensar Matematicamente, sendo fundamental que a formação de professores permita desenvolver o conhecimento especializado (Carrillo *et al.*, 2018) que fundamentará essas práticas matemáticas. Dentre os diferentes tópicos matemáticos em que os alunos revelam dificuldades encontramos as regularidades de repetição (usualmente denominados de padrões)[326] e, apesar de ser um tópico que os professores consideram "fácil", as dificuldades dos alunos dos Anos Iniciais até o Ensino Médio neste tópico e, outros que por ele são sustentados, revelam a necessidade de uma formação

[319]O presente trabalho forma parte do projeto de pesquisa financiado pelo CNPq "Desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e suas relações com as Tarefas para a Formação no âmbito da Medida, e do Pensamento Algébrico, Geométrico e Estatístico" (404959/2021-0).

[320]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, renatarecchia2020@gmail.com

[321]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, ligia.spitti@gmail.com

[322]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, mariana.ncorrea@gmail.com

[323]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, sandra.smenezes@hotmail.com.br

[324]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, alessandraalmeida628@gmail.com

[325]Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, cmribas78@gmail.com

[326]Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, temos as habilidades EF02MA09, EF02MA10 e EF02MA11 relacionadas ao tópico de regularidades de repetição (Brasil, 2018).

especializada. Nesta oficina iremos implementar uma Tarefa para a Formação - TpF (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021) associada a desenvolver o conhecimento especializado dos participantes, efetuando conexões entre a matemática que se discute nos Anos Iniciais, a generalização e formas de proceder em matemática.

MARCO TEÓRICO

Uma sequência matemática pode ser compreendida como um "conjunto de elementos (finitos ou não) que possuem uma lei de formação que permite identificar ou descobrir qual o elemento de qualquer ordem/posição" (Ribeiro, 2021, p. 48). Para entendê-la é necessário centrar as discussões no que sustenta o padrão apresentado: a regularidade, pois a sequência será apenas um recurso para discutir a regularidade associada, que corresponde à estrutura matemática que permite gerar o padrão observado. Na Figura 1 observamos uma regularidade comum a todas essas representações e o que as diferencia é a exteriorização dessa regularidade, ou seja, o padrão de repetição (Ribeiro, 2021).

Fig. 97: Padrões com regularidade 2

Fonte: Ribeiro (2023)

Para que os alunos desenvolvam essa compreensão é necessário que as tarefas propostas oportunizem discussões, levando-os à generalização (Canavarro, 2007). Nessa perspectiva, o Pensamento Algébrico pode ser entendido como uma das formas de Pensar Matematicamente em contextos algébricos, que parte da estruturação do pensamento, perpassando todos os anos de escolaridade, partindo de situações específicas para chegar à generalização (Ferreira, 2017).

A pesquisa mostra que dentre os fatores que mais impactam as aprendizagens dos alunos encontramos o conhecimento do professor (Nye; Konstantopoulos; Hedges, 2004) em que se sustentam também as dificuldades dos alunos. Portanto, para perseguir o objetivo de possibilitar que os alunos entendam matemática, necessitamos garantir que a formação de professores foque onde é mais necessário (Ribeiro; Gibim; Alves, 2021) e identificar as dificuldades dos alunos é um dos pontos de partida com potencialidades para essa decisão. No contexto das regularidades de repetição, algumas das dificuldades dos alunos são: identificar o "próximo" elemento; entender a estrutura matemática associada a uma regularidade; entender que uma mesma regularidade pode ser exteriorizada por diferentes padrões (Ribeiro, 2021).

Para maximizar a qualidade das discussões e o entendimento matemático dos alunos é demandado um conhecimento especializado do professor (Carrillo *et al.*, 2018), que permita fazer diferente do que tem sido feito, entendido no âmbito do trabalho de pesquisa e formação que desenvolvemos no CIEspMat[327] na perspectiva do *Mathematics Teacher´s Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al.*, 2018). Nesta

[327] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. (`www.ciespmat.com.br`).

conceitualização assumimos que o conhecimento do professor é especializado tanto no âmbito do conhecimento matemático quanto do conhecimento pedagógico. E o fazer diferente do que tem sido feito demanda que as propostas de tarefas que se desenvolvem, implementam e como essa implementação ocorre.

DESCRIÇÃO DA OFICINA

Esta oficina pretende desenvolver o conhecimento especializado do professor, com foco nos professores dos Anos Iniciais. A proposta baseia-se na implementação e discussão de uma TpF, que tem como ponto de partida uma Tarefa para o aluno e um conjunto de questões especializadas para o professor, buscando aceder o conhecimento matemático especializado deste profissional (Ribeiro; Almeida; Mellone, 2021), considerando que o conhecimento pedagógico especializado será desenvolvido pelas experiências vivenciadas durante o contexto formativo. Essa TpF é apresentada no livro "Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões" (Ribeiro, 2021).

Para o desenvolvimento da oficina, torna-se fundamental discutir o que os participantes já fazem e como fazem nas suas práticas enquanto professores, de modo a estabelecer esse ponto de partida para as mudanças de nível de conhecimento que se espera ocorrer ao longo das discussões e possibilitando que os professores possam posteriormente levar para a sua aula e implementar a tarefa dos alunos como forma de maximizar as discussões matemáticas até a generalização – desde os Anos Iniciais.

A TpF será implementada considerando três partes: Parte Preliminar, para que os professores reflitam sobre o conhecimento que já possuem e fazem sobre regularidade, sequência e padrões; Parte I, que envolve a resolução de uma tarefa para os alunos e questionamentos direcionados especificamente para desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor; Parte II, discussão das produções dos participantes associada a uma sistematização. Para a implementação será necessário material impresso (que estará a cargo dos formadores) e um projetor e lousa para suporte nas discussões. Cabe ao participante apenas portar seu material de escrita (caneta ou lápis).

ALGUNS COMENTÁRIOS FINAIS

Espera-se que os participantes desenvolvam seu conhecimento, de modo que contribua para uma abordagem matematicamente inovadora e emocionante em sala de aula, sendo capazes de observar em uma estrutura matemática o que há de comum e diferente levando-os a generalizações.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.

[2] Canavarro, A. P.; **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos.** Quadrante, v. 16, n. 2, 2007.

[3] Carrillo, J.;Climent, N.; Montes, M.; Contreras, L. C.; Flores-Medrano, E.; Escudero-Ávila, D.; Vasco, D.; Rojas, N.; Flores, P.; Aguilar-González, A.; Ribeiro, M.; Muñoz-Catalãn, M. C.; **The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model.** Research in Mathematics Education, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

[4] Ferreira, M. C. N.; **Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma análise dos documentos Curriculares Nacionais.** REnCIMa, v.8, n.5, p.16-34, 2017.

[5] Nye, B.; Konstantopoulos, S.; Hedges, L. V.; **How large are teacher effects?** Educational Evaluation and Policy Analysis, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004.

[6] Ribeiro, M.; **Entendendo a estrutura matemática das regularidades de repetição como elemento central de atribuição de significado aos padrões.** Campinas: CIEspMat Pesquisa e Formação, 2021.

[7] Ribeiro, M.; **Desenvolvendo o Pensamento Algébrico dos alunos pela modelação de problemas: tarefas para a sala de aula e conhecimento do professor.** Campinas: Cognoscere, 2023.

[8] Ribeiro, M.; Almeida, A.; Mellone, M.; **Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 35, 2021.

[9] Ribeiro, M.; Gibim, G.; Alves, C.; **A necessária mudança de foco na formação de professores de e que ensinam matemática: discussão de tarefas para a formação e o desenvolvimento do conhecimento interpretativo.** Perspectivas da Educação Matemática, v. 14, n. 34, 2021.

Enumeração de moléculas pelo método de Pólya-Redfield

Paterlini, Roberto Ribeiro[328]

Resumo: *Uma das aplicações mais simples do método de enumeração de Pólya-Redfield é a classificação de isômeros de moléculas que têm como modelo uma figura geométrica com simetrias. Nesta oficina explicaremos como o método funciona atuando diretamente em moléculas que têm como base a geometria do eteno. Outros exemplos serão encaminhados.*

Palavras-chave: *Método de enumeração de Pólya-Redfield, contagem de isômeros, moléculas com geometria do eteno.*

DESCRIÇÃO

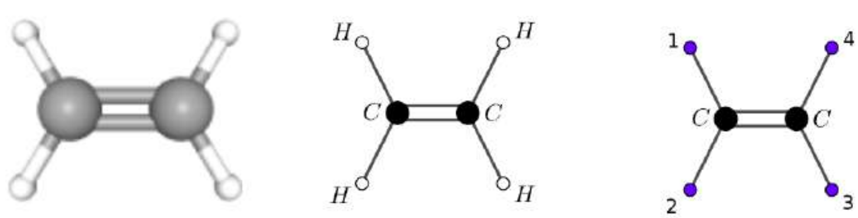
Introdução

O método de enumeração de Pólya-Redfield é celebrado tanto no campo da Matemática quanto no da Química. Problemas de enumeração e catalogação de compostos em Química foram os principais incentivos para G. Pólya criar o seu método em 1935. Esse método já havia sido referido por J. H. Redfield alguns anos antes, mas não foi notado de imediato. Neste texto pretendemos explicar o método estudando o caso mais simples, as moléculas com a geometria do eteno.

Moléculas com o Esqueleto do Eteno

O eteno é um hidrocarboneto tipo alceno, formado por dois átomos de carbono com ligação dupla, e completado por quatro átomos de hidrogênio. Sua fórmula molecular é $H_2C = CH_2$, ou, mais simplesmente, C_2H_4. Na Figura 1 vemos duas representações do eteno, uma plana e outra espacial.

Fig. 98: À esquerda, representação espacial do eteno. Ao centro, representação plana. À direita, esqueleto do eteno.



O esqueleto do eteno é um desenho formado com dois átomos de carbono com ligação dupla. Como a valência do carbono é 4, sobram, em cada átomo de carbono, duas *posições vacantes*. Temos assim quatro

[328]UFSCar, paterlini@ufscar.br

posições vacantes a serem ocupadas por átomos monovalentes, como o cloro, o flúor e o bromo, além do hidrogênio, ou por radicais, como o metil e o etil. Esses átomos ou radicais monovalentes são denominados *substituintes*. Etiquetamos essas posições com os números 1, 2, 3 e 4, como mostrado na Figura 1, desenho da direita. Chamamos de configuração à situação teórica em que as posições vacantes estão ocupadas por substituintes.

Tomando o caso em que hajam dois substituintes, por exemplo, o hidrogênio e o cloro, em cada posição vacante temos duas possibilidades, de forma que existem $2^4 = 16$ configurações. Sua descrição detalhada é chamada *inventário* das configurações.

Considerando em seguida que cada configuração deve representar uma molécula, que está "solta" no espaço, e que os átomos de mesmo tipo são indistinguíveis, vemos que ocorrem moléculas repetidas. Eliminando as repetições, obtemos as configurações padrões, que representam possíveis moléculas diferentes. Essas moléculas têm a mesma fórmula e a mesma geometria, mas a distribuição dos átomos nas posições vacantes é diferente. São denominadas *isômeros geométricos*. Sua descrição detalhada é chamada *inventário dos padrões* .

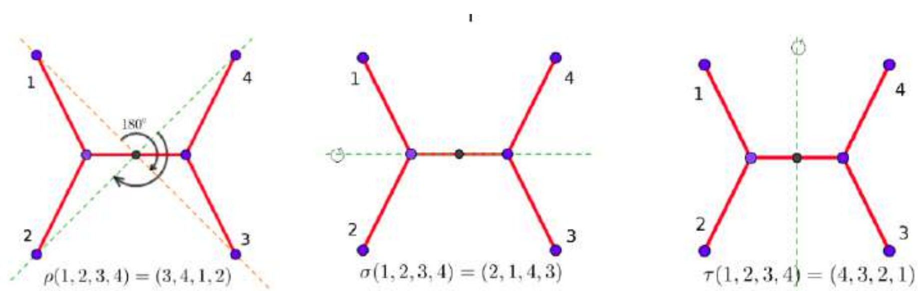
O Método de Pólya-Redfield

A obtenção do inventário de padrões para o exemplo citado acima pode ser feita manualmente, pois o número de configurações é pequeno. Mas, em geral, esse número pode ser grande, de modo que se faz necessária uma descrição algébrica do problema. Tal providência possibilita a construção de algoritmos passíveis de serem executados em computadores digitais.

Os movimentos do espaço que aplicamos para identificar configurações iguais são simetrias do esqueleto da molécula. Essas simetrias formam um grupo. Portanto, a primeira providência para obter os padrões de tais moléculas é identificar o grupo adequado de simetrias.

No caso de nosso exemplo, os movimentos que usamos para identificar configurações iguais são essencialmente a rotação ρ de 180° no plano e duas rotações σ e τ no espaço. Eles estão descritas na Figura 2. A identidade $\varepsilon(1,2,3,4) = (1,2,3,4)$ também é uma simetria, pois uma configuração é igual a si mesma.

Fig. 99: Simetrias do esqueleto do eteno, exceto a identidade.



Esses quatro movimentos formam o grupo $D_2 = \{\varepsilon, \rho, \sigma, \tau\}$, chamado grupo diedral de ordem 4. Em seguida associamos a cada um desses movimentos um monômio, chamado *tipo cíclico*. Escrevendo cada movimento na forma de ciclos disjuntos, fazemos corresponder a cada ciclo de comprimento j a variável x_j. Temos:

$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4) \to x_1^4 \qquad \rho = (13)(24) \to x_2^2$$

$$\sigma = (12)(34) \to x_2^2 \qquad \tau = (14)(23) \to x_2^2$$

O *índice de ciclos* do grupo de simetrias é a média dos tipos cíclicos de seus elementos. No caso de nosso exemplo, o índice de ciclos de D_2 é:

$$I[D_2] = \frac{1}{4}[x_1^4 + 3x_2^2].$$

Para aplicar o método de Pólya-Redfield, associamos a cada substituinte uma variável. No nosso exemplo, em que os substituintes são hidrogênio (H) e cloro (Cl), associamos $H \to h$ e $Cl \to c$.

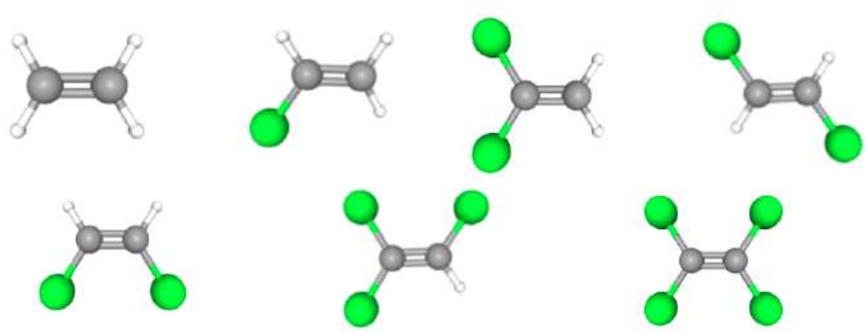
O inventário dos padrões é dado substituindo-se a variável x_j do índice de ciclos por $h^j + c^j$. Fazendo isso para D_2 temos:

$$\begin{aligned} I[D_2\{h,c\}] &= \frac{1}{4}[(h+c)^4 + 3(h^2+c^2)^2] \\ &= h^4 + h^3c + 3h^2c^2 + hc^3 + c^4, \end{aligned}$$

que é o inventário dos padrões em forma polinomial nas variáveis h e c. O monômio $3h^2c^2$ informa que existem três moléculas diferentes com fórmula $C_2H_2Cl_2$ e com a mesma geometria do eteno. A diferença entre essas moléculas se deve às distintas distribuições dos átomos de hidrogênio e cloro nas posições vacantes. Por outro lado, o monômio h^3c informa que existe apenas uma molécula com três átomos de hidrogênio e um de cloro. Do mesmo modo se interpretam os outros monômios.

A soma dos coeficientes no inventário dos padrões é 7, e assim existem 7 padrões, que modelam 7 moléculas diferentes com a geometria do eteno e com substituintes hidrogênio e cloro. Podemos pesquisar essas moléculas em compêndios de Química, ou acessando um repositório público, como o PUBCHEM. A Figura 3 mostra suas representações.

Fig. 100: Na primeira linha, da esquerda para a direita, representações do eteno, do cloroeteno, do 1,1-dicloroeteno e do trans-1,2-dicloroeteno. Na segunda, do cis-1,2-dicloroeteno, do tricloroeteno e do tetracloroeteno.



BIBLIOGRAFIA

[1] Grimaldi, R. P.; **Discrete and Combinatorial Mathematics, An Applied Introduction**. 5a. ed. Boston: Pearson Education, 2004.

[2] Lins, S.; **Princípios de Enumeração**. 13 ∘ . Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, IMPA, 1981.

[3] Liu, C. L. ; **Introduction to Combinatorial Mathematics**. New York: McGraw-Hill, 1968.

[4] PUBCHEM. **Explore Chemistry**. Figuras e informações de elementos químicos. Disponível em https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/. Consultado em janeiro de 2024.

[5] Tucker, A.; **Polya's Enumeration Formula by Example**. Mathematics Magazine, 47, 5, 248- 256, 1974.

Mentalidades matemáticas:

possibilidades de tarefas visuais e abertas para aula de matemática

Carvalho, Henrique Marins, hmarins@ifsp.edu.br[329] e
Freitas, Thiago Porto de Almeida, thiagoporto@ufcat.edu.br[330]

Resumo: *Os avanços recentes da neurociência refutam a ideia de que a matemática não é para todas as pessoas, isto é, de que seria preciso ter um dom específico para aprender matemática em altos níveis. A pesquisadora Jo Boaler, da Universidade de Stanford, apoiada nesses resultados, em conjunto com mais colaboradores, apresenta a abordagem Mentalidades Matemáticas como um caminho para ressignificar o ensino e a aprendizagem matemática na sala de aula. Nesse contexto, a presente oficina busca oferecer aos participantes vivências em tarefas de matemática que possibilitem o contato com os princípios da referida abordagem. Esperamos que, ao final, os participantes sintam-se encorajados em mudar a sua prática docente na aula de matemática, bem como instigados em aprofundar os estudos na área.*

Palavras-chave: *mentalidades matemáticas, erro, tarefas visuais e abertas.*

DESCRIÇÃO

Nesta oficina, a denominação Mentalidades Matemáticas (Mathematical Mindsets) refere-se à abordagem proposta por Jo Boaler (Universidade de Stanford) e pelo grupo fundado por ela e Cathy Willians, denominado Youcubed (`https://www.youcubed.org/pt-br/`). O ensino e a aprendizagem de Matemática propostos nessa abordagem, sugerem a ênfase em uma matemática multidimensional, conceitual, profunda, aberta, criativa, visual, ressaltando ainda que todo mundo é capaz de aprender, independentemente de quaisquer características étnicas ou de gênero, desde que lhe sejam proporcionadas as condições adequadas para tal.

As pesquisas de Boaler e seus colaboradores estão pautadas em dados de estudos de neurociência e em resultados positivos de práticas educacionais. A abordagem Mentalidades Matemáticas tem, ainda, forte vínculo com a ideia de Educação para a equidade, conforme definida por Elizabeth Cohen e Rachel Lotan, que estimula a valorização da aprendizagem colaborativa para o desenvolvimento de todos os alunos.

A abordagem sugere, dentre outros objetivos:

- apoiar a criação de novas estratégias para resolução de problemas;
- constituir uma identidade de pensadores de Matemática;
- promover experiências Matemáticas significativas e profundas;
- atribuir novas possibilidades ao erro;
- permitir flexibilidade numérica (compor e decompor) no lugar de repetição de métodos (procedimentos padrão);
- discutir matemática a partir de atividades que possam ser acessadas em diferentes níveis e desenvolvidas a diferentes níveis (atividades de "piso baixo" e "teto alto");

[329] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP, Campus São Paulo.

[330] Universidade Federal de Catalão - UFCAT.

- incentivar uma Matemática colaborativa e aberta;
- mudar a mentalidade sobre as aulas de Matemática.

Atualmente como ambiente de inspiração para professores de matemática, existem acervos digitais de atividades pautadas na abordagem Mentalidades Matemáticas, como o próprio site do Youcubed, mencionado anteriormente, e o site Mentalidades Matemáticas (`https://mentalidadesmatematicas.org.br/`), organizado pelo Instituto Sidarta, no Brasil. Ademais, já existem livros traduzidos para o português que tratam do assunto, ver [2] e [3].

Nesse contexto, a presente oficina visa explorar, em dois dias, de forma reflexiva, algumas tarefas registradas nos supracitadas fontes, conforme organização descrita nas subseções 1.1 e 1.2.

Dia 1: explorando conjuntos e sequências numéricas

Propomos que, nesta oficina, as pessoas participantes, mesmo sendo docentes, experimentem realizar as tarefas como estudantes, exercitando a criatividade e a possibilidade de múltiplas representações e estratégias na resolução das tarefas propostas.

Serão apresentados, em linhas gerais, os princípios defendidos pela abordagem Mentalidades Matemáticas, com ênfase para as tarefas abertas, com estímulo a várias representações visuais.

Em seguida, serão formados grupos de quatro membros para o trabalho sugerido nas seguintes tarefas:
`https://www.youcubed.org/pt-br/tasks/circulo-mania/`
`https://www.youcubed.org/pt-br/resources/numeros-visuais-ef-em/`

Dia 2: explorando frações

Neste dia serão propostas as tarefas "Fazendo Flocos de Neve"e "Nevasca de Frações", extraídas de [3], que visam oportunizar uma discussão mais aprofundada sobre a estimativa de resultados com frações.

Na ocasião, com os participantes organizados em grupos colaborativos, buscar-se-á promover uma discussão que possibilite a generalização dos padrões observados no material manipulado ao longo da atividade.

Ao longo da exploração, mensagens inspiradoras da abordagem Mentalidades Matemáticas serão utilizadas para que os participantes possam se sentir confiantes a desenvolverem o raciocínio matemático esperado na atividade.

CONCLUSÕES

Ao propor a realização de tarefas, incorporando a posição de aprendizes, sugere-se a reflexão acerca das vantagens e das adaptações necessárias para o uso dos recursos e abordagem apresentados em ambientes de sala de aula da Educação Básica. Ademais, esperamos que a pequena imersão em tarefas clássicas da abordagem Mentalidades Matemáticas, propiciada pela oficina, sirva para provocar reflexões nos participantes de que todos e todas podem aprender matemática em altos níveis.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOALER, J.; **Mentalidades matemáticas: Estimulando o Potencial dos Estudantes por Meio da Matemática Criativa, das Mensagens Inspiradoras e do Ensino Inovador**. Porto Alegre: Editora Penso, 2017.

[2] BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C.; **Mentalidades matemáticas na sala de aula: ensino fundamental**. Porto Alegre: Editora Penso, 2018.

[3] BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAMS, C.; **Mentalidades matemáticas na sala de aula: ensino fundamental**. Porto Alegre: Editora Penso, 2020.

Jogos educacionais de matemática

Uma proposta para os Ensinos Fundamental e Médio

Koneçny, Tulio[331]; Wagner, Eduardo[332] e Goedert, Guilherme[333]

Resumo: *Esta oficina tem como objetivo a divulgação de conjunto materiais de ensino de matemática autoral criado por Tulio Koneçny durante seu TCC e a desenvolvimento metodológico (em andamento em seu mestrado) para avaliação da efetividade destes materiais, com foco em escolas públicas brasileiras. Este conjunto é composto por jogos de cartas e de tabuleiro que estimulam a descoberta e exercício de conceitos matemáticos, auxiliando assim tanto no ensino de matemática quanto na fixação do conteúdo. Para o desenvolvimento foram considerados como fatores essenciais: jogabilidade, estética, replicabilidade e baixo custo de produção.*

Palavras-chave: *Jogos matemáticos, aprendizagem, ensino, escolas públicas, lúdico.*

DESCRIÇÃO

Introduzir jogos em sala de aula desempenha um papel crucial no processo educacional, oferecendo uma abordagem dinâmica e envolvente para a aprendizagem. A oficina tem como propósito apresentar quatro jogos, de uma ampla variedade de mais de quinze desenvolvidos, com o intuito de aprimorar o engajamento e os resultados dos alunos. É importante destacar que todos os jogos foram concebidos com objetivos pedagógicos alinhados aos princípios da BNCC (Base Nacional Comum Curricular).

A oficina será dividida em dois encontros, cada um composto por três partes distintas, todas elas centradas na metodologia de implementação de jogos em sala de aula para enriquecimento pedagógico. O primeiro momento será dedicado à apresentação e jogatina de um boardgame, seguido pelo segundo momento destinado a um cardgame. Para encerrar, haverá um espaço para discussão aberta, permitindo aos professores esclarecer dúvidas, fazer sugestões e novos modos de jogo.

Jogos Apresentados

Os jogos apresentados serão Resto Ataque e Whole no primeiro encontro, enquanto Euclides Path e Math Journey serão abordados no segundo encontro. Todos os arquivos relativos aos jogos mencionados estão disponíveis gratuitamente no site matematicaeparatodos.com. Ficando a cargo dos autores a levarem mídias físicas dos jogos.

Resto Ataque

Inspirado na mecânica de *Dungeon Fighter*, Resto Ataque é um jogo cooperativo que oferece uma abordagem divertida para o aprendizado da divisão euclidiana. Os alunos embarcam em uma jornada por períodos importantes da matemática enquanto enfrentam monstros em equipe. Para ajudar em suas aventuras, eles montam um T-puzzle para desbloquear itens valiosos, como poções, espadas e escudos.

[331] Graduado em Matemática Aplicada e Mestrando em Modelagem Matemática na FGV EMAp

[332] Professor na FGV EMAp

[333] Professor e Pesquisador na FGV EMAp

Fig. 101: Autoria própria

Whole

Whole é um jogo competitivo onde cada jogador busca criar a poção perfeita, cuja soma seja igual a um. Eles competem por frascos fracionários de poções, proporcionando uma excelente oportunidade para a prática de soma de frações de forma envolvente e competitiva.

Fig. 102: Autoria própria

Euclides Path

Diferente dos tradicionais jogos de tabuleiro onde se avança de A a B, em Euclides Path os jogadores começam no meio do mapa e o objetivo é alcançar uma das pontas para vencer. Com uma mecânica única de lançamento de dados, o jogo aborda habilidades de comparação entre números, bem como soma e subtração. Ambientado na Idade Antiga, os alunos auxiliam Euclides na produção de cópias de *Os Elementos* em uma gráfica, promovendo o livro enquanto viajam pelo jogo.

Fig. 103: Autoria própria

Math Journey

Math Journey é um jogo de divulgação matemática onde o objetivo é viajar no tempo e recrutar matemáticos de diferentes períodos para resolver problemas famosos. Os jogadores formam uma equipe com esses grandes matemáticos e enfrentam desafios que estimulam o pensamento crítico e a resolução de problemas ao longo da história da matemática.

Fig. 104: Autoria própria

Métodos Avaliativos

De modo a avaliar rigorosamente o efeito dos novos materiais didáticos em sala de aula, e desenhar protocolos efetivos de implementação, estamos estudando e adaptando ferramentas analíticas e metodológicas da inferência causal desenvolvidas no contexto de avaliação de intervenções e tratamentos médicos. Esta metodologia nos permitirá desenhar estudos de campo que coletem informações necessárias para que as correlações estatísticas quantifiquem links causais, bem como estimar e corrigir vieses que são naturalmente introduzidos por questões socio-econômicas entre os centros dos estudos.

Atividades com números binários e pensamento computacional em nível de ensino fundamental

Baldin, Yuriko Yamamoto[334] e Villagra, Guillermo Antonio Lobos[335]

Resumo: *Este texto apoia uma oficina desenvolvida por meio de um roteiro sequenciado de atividades práticas que desenvolvem o pensamento computacional para estudantes do Ensino Fundamental II, a partir do 7o. ano. A oficina exige um mínimo de pré- requisitos e trabalha de forma lúdica e manipulativa o conceito de Números Binários. A oficina foi testada num projeto de Iniciação Científica Junior em Matemática do Ensino Fundamental (Processo No.23112.045111/2023-88, DM-UFSCar), e constitui uma sugestão de atividades para os cursos de formação inicial e continuada de professores de Matemática, dentro da orientação curricular atualizada com tendências metodológicas alinhadas a BNCC.*

Palavras-chave: *Números binários, pensamento computacional para ensino fundamental, atividades lúdicas para ensino interativo, material concreto como auxiliar didático.*

DESCRIÇÃO

Esta oficina tem o objetivo de compartilhar com os licenciandos de Matemática e professores em exercício nas classes de Ensino Fundamental um roteiro sequenciado de atividades para a exploração didática do conceito de Números Binários por estudantes a partir do 7o. ano do Ensino Fundamental. As atividades foram construídas dentro de um Projeto de Iniciação Científica para Nível Fundamental orientado pelos autores, com material concreto e desenvolvidas através de manipulações que estimulem a comunicação de pensamentos matemáticos.

A Oficina tem duração de 2 horas, em uma única sessão, para um público de 25 participantes.

A motivação do tema vem da necessidade de despertar no estudante de Ensino Fundamental a curiosidade e a descoberta da aplicabilidade de Números Binários como uma linguagem de representação simbólica, que tenha significado concreto. Essa descoberta permite a transição do conhecimento da aritmética familiar do Ensino Fundamental para a compreensão da estrutura do sistema de numeração em bases distintas. A atribuição de significado a um número binário com uso de materiais concretos, e aprender a sintetizar descobertas por meio de expressões com linguagem matemática, tornam esta oficina um meio inovador para introduzir o tópico de linguagem computacional dentro do currículo escolar, de forma suave e lúdica.

O roteiro é constituído por 5 atividades básicas selecionadas dentro dos resultados do projeto que foi realizado no Verão de 2024 no DM-UFSCar, com alunos do 7o. ano do Ensino Fundamental, de escolas públicas. A sequencia das atividades foi inspirada pela referência [Paenza, 2008] e é descrita a seguir.

[334] Afiliação:DM-UFSCar.

[335] Afiliação: DM-UFSCar.

Roteiro de atividades

Nesta Seção apresentamos as atividades enumeradas em ordem, indicando o material e descrevendo brevemente as ações no desenvolvimento das mesmas.

Atividade 1: O que é um Número Binário?

Objetivo da Atividade 1: Entender a natureza do uso de algarismos 1 e 0 para representar um Número Binário. Material: Papel e desenho; objetos diversos, distintos e caixas; vários cartões com algarismos 0 e 1.

Descrição sucinta: Exemplo de lâmpadas acesas e apagadas associadas respectivamente aos algarismos 1 e 0; raciocínio combinatório a partir das possibilidades de ter 1, 2, 3 ,... n lâmpadas. Classificação de sequencias de caixas com existência ou não de objetos por números binários.

Atividade 2: Representação posicional na base 2 de um Número Binário

Objetivo da Atividade 2: Interpretar a posição do algarismo 1 em um Número Binário na representação na base 2, relacionando-a com o expoente da potência de 2. Material: Papel e escrita.

Descrição sucinta: Identificar o expoente nas potências de 2 no desenvolvimento de um Número Binário na base 2 e associar à posição do respectivo valor binário na representação.

Atividade 3: Transformação de um n˜umero em representação decimal para representação binária

Objetivo da Atividade 3: Trabalhar o pensamento matemático de estimativas por aproximação de um número em representação decimal por potências de 2. Perceber a relação entre o algoritmo da divisão de um número em representação decimal por 2, sucessivamente para associar com a paridade de números decimais e restos módulo 2, o que leva à representação por sequencias posicionadas de 1 e 0. Material: Papel e escrita. Cartões numerados com 1 e 0.

Descrição sucinta: Depois de identificar a relação entre os restos das divisões sucessivas de um número dado por 2 com os algarismos 1 ou 0, identificar a ordem dos algarismos 1 ou 0 na representação binária, através de potências de 2.

Atividade 4: Transformação de um número em representação binária para representação decimal

Objetivo da Atividade 4: Trabalhar o pensamento matemático de interpretar o valor decimal da potência de 2 na representação binária, identificando o expoente da potência de 2 na posição do algarismo 1 na representação binária, para assim recuperar a representação decimal. Montar o esquema de transformação entre as representações decimal e binária como um ALGORITMO. Material: Papel e escrita. Cartões numerados com 1 e 0.

Descrição sucinta: Por meio de atividades lúdicas com os cartões numerados, organizar os resultados das transformações em mão dupla, montando o esquema de transformação entre as duas representações como um ALGORITMO. Trabalhar números grandes que são exemplos apropriados para cálculos com computadores e tecnologias.

Atividade 5: Aplicações:

Objetivo da Atividade 5: Trabalhar aplicações como: representar gráficamente uma figura produzida livremente por alunos em folha quadriculada que simula uma tela representada matricialmente como pixels, onde os algarismos 1 e 0 são dispostos nos pixels pintados ou vazios, respectivamente; perceber os números binários nas linhas ou colunas da M̈atriz. Criar exemplos próprios e associar a representações binárias. Trabalhar a *tradução* do código ASCII para número binário para criptografar mensagens. Introduzir a natureza matemática de código de barras utilizada na vida cotidiana relacionando com os números binários, entre outras possibilidades. Material: Papel quadriculado e desenho. Tabela de código ASCII. Exemplos pesquisados na Internet.

Descrição sucinta: Atividade livre, mostrar aplicações práticas presentes na vida real e que abrem caminhos para o uso da tecnologia e desenvolvimento de linguagem computacional presente nas comunicações diversificadas, incluindo a computação gráfica. Discutir e refletir como atividades simples e possíveis com o conhecimento curricular da educação básica permitem trabalhar as demandas atuais de aprendizagem da matemática, apoiando a formação de professores com metodologias ativas.

BIBLIOGRAFIA

[1] PAENZA, A. Matemática ... Estás aí? **Edição em Português, Editora Dom Quixote**,2008.

Pôsteres

O teorema da aplicação inversa

Castro, Adriano[336]

Resumo: *Neste trabalho, apresentamos o Teorema da Aplicação Inversa. Iniciamos com uma introdução, explicando o teorema, sua finalidade e seu surgimento, prosseguimos com alguns resultados preliminares, e então, enunciamos e demonstramos o teorema desejado.*

Palavras-chave: *Teorema, aplicação inversa, difeomorfismo.*

INTRODUÇÃO

O Teorema da Aplicação Inversa é um importante resultado no estudo das funções de múltiplas variáveis, sendo uma generalização deste mesmo resultado para funções de uma variável, ele permite que uma função diferenciável f, que satisfaça determinadas condições, seja invertível localmente.

A história deste teorema remonta ao século XVII, com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral por matemáticos como Issac Newton e Gottfried Leibniz, ali, usava-se o conceito de invertibilidade nas funções de uma variável, sendo somente a partir do século XIX, quando matemáticos como Augustin-Louis Cauchy e Karl Weierstrass discutiram a formalização de conceitos como continuidade e diferenciabilidade, que o teorema foi melhor desenvolvido, no entanto, a versão atual do teorema da aplicação inversa só foi enunciada e demonstrada no século XX, sendo apresentada por René Thom, em sua tese de doutorado de 1954.

Em suma, o teorema afirma que dada uma função f diferenciável e definida num aberto, se em um ponto de seu domínio, a derivada f' é invertível [337], então na vizinhança deste ponto, f é invertível e sua inversa f^{-1} é diferenciável.

O TEOREMA DA APLICAÇÃO INVERSA

Nesta seção, começamos apresentando alguns resultados preliminares com o objetivo de melhor compreensão do resultado desejado. Após isto, prosseguiremos para o teorema e sua demonstração.

Alguns resultados preliminares

Definição 9.1 *Sejam E e F espaços vetoriais. Chamamos de isomorfismo entre E e F a transformação linear $T : E \to F$ que é bijetora.*

Definição 9.2 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Chamamos de homeomorfismo a aplicação bijetora e contínua $f : U \to V$ definida de modo que a sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é também bijetora.*

Definição 9.3 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Chamamos de difeomorfismo a aplicação bijetora e diferenciável $f : U \to V$ definida de modo que a sua inversa $f^{-1} : V \to U$ é diferenciável.*

[336] Afiliação: Universidade Federal do Pará

[337] Isto é, seu determinante jacobiano neste ponto é diferente de zero

Definição 9.4 *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Chamamos de difeomorfismo local a aplicação diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida de modo que, para $a \in U$, existe $B(a;\delta) \subset U$ tal que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Teorema 9.1 *Sejam o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k $(k \geq 1)$. Se para algum $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetora, então existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B = B(a;\delta) \subset U$ e, para quaisquer $x, y \in B$ tem-se $\|f(x) - f(y)\| \geq c\|x - y\|$.*

Teorema 9.2 *Seja $f : U \to V$ um homeomorfismo de classe C^1 entre os abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$. Se para algum $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então o homeomorfismo inverso $g = f^{-1} : V \to U$ é diferenciável no ponto $f(a)$, com $g'(f(a)) = [f'(a)]^{-1}$.*

Lema 9.1 *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no ponto $a \in U$, com $g'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ sendo sobrejetora. Se a é um ponto de mínimo local de $\|g(x)\|$, $x \in U$, então $g(a) = 0$.*

Teorema

Teorema da Aplicação Inversa: *Sejam o conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $f : U \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k $(k \geq 1)$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é invertível, então existe $B = B(a;\delta) \subset U$ de modo que $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Demonstração: Diminuindo δ suficientemente, podemos admitir que $\overline{B} = B[a;\delta] \subset U$ e que f é injetora em $\overline{B}$, então f é um homeomorfismo de B sobre $f(B)$. Além disso, podemos supor que, para todo $x \in B$, $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo. Então, pelo Teorema 9.2, é suficiente mostrarmos que $f(B) = V \subset \mathbb{R}^m$ é aberto.

Sejam $q = f(p)$, $p \in B$ e $S = S[a;\delta]$ a fronteira de $\overline{B}$, a injetividade de $f|_{\overline{B}}$ garante que $q \notin f(S)$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\|f(x) - q\| \geq 2\epsilon, \ \ \forall x \in S,$$

pois S é compacto. Agora basta mostrarmos que $B(q;\epsilon) \subset V$.

Tomemos $y \in B(q;\epsilon)$, o teorema de Weierstrass garante que $g(x) = \|f(x) - y\|$ possui máximos e mínimos. Como $f|_{\overline{B}}$ é injetora, para $x \in \overline{B}$, mín$\{g(x)\}$ não é atingido por um ponto $x \in S$, pois

$$x \in S \Rightarrow \|f(x) - y\| \geq \epsilon,$$

enquanto

$$\|f(p) - y\| = \|q - y\| < \epsilon,$$

concluímos então que mín$\{g(x)\}$ é atingido em um ponto $x_0 \in B$. Pelo Lema 9.1, mín$\{g(x)\} = 0$, então $f(x_0) = y$, onde $f(x_0) \in V$, portanto $y \in V$.

Logo, $B(q;\epsilon) \subset V$, então V é aberto e pelo Teorema 9.2, $f|_B$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V \ni f(a)$. O que demonstra o teorema. □

BIBLIOGRAFIA

[1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real Vol.2, Funções de N Variáveis**. 6.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

O software OpenFOAM na solução de EDP’s pelo método de volumes finitos

Santos, Alana[338]

Resumo: *O OpenFOAM é um software de código aberto no qual estão implementadas várias bibliotecas para a discretização de Equações Diferenciais Parciais (EDP’s) pelo Método de Volumes Finitos (MVF). A sua utilização de forma eficiente requer um estudo teórico prévio sobre as Equações Diferenciais, o próprio MVF juntamente com as técnicas de discretização dos termos da equação. Sendo assim, estudou-se uma EDP de segunda ordem, o MVF para discretizá-la em duas dimensões e fazer a implementação numérica da equação no OpenFOAM.*

Palavras-chave: *OpenFOAM, discretização, EDP.*

RESUMO

Dissertando um pouco sobre o OpenFOAM, destacamos que ele é um software gratuito e *open source*, ou seja de código aberto. Isso traz uma vantagem em relação a este programa, pois ao permitir acesso ao seu código de execução, ele possibilita ao usuário customizar e entender o funcionamento do software de maneira mais completa.

Além disso, ele utiliza a linguagem C++, que é uma linguagem bastante usual para programas computacionais, o que facilita sua utilização. Portanto, pode-se perceber que este software apresenta vários benefícios, por isso, escolher utilizá-lo para este trabalho foi algo lógico.

Para utilizar e entender o funcionamento deste software escolhemos simular um fenômeno da dinâmica dos fluidos, representado por uma EDP, que é a convecção e difusão. A equação que representa este fenômeno é:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \bullet \cdot (\rho\phi u) = \bullet \cdot (\Gamma \bullet \phi) + S\phi \tag{45}$$

O OpenFOAM é capaz de simular o comportamento do fluido em malhas 2D e 3D. Nesta pesquisa, apresentamos o comportamento somente em duas dimensões.

Procurou-se fazer uma simulação de um problema, onde construiu-se uma malha com determinadas condições de contorno e fez-se a comparação dos resultados utilizando dois MVF, o Upwind e o QUICK, que são métodos de discretização para a EDP.

Como mencionado anteriormente, o OpenFOAM é um software de código aberto, com linguagem C++, onde podemos montar a estrutura do problema que queremos simular. Para isso, é necessário seguir alguns passos. De maneira resumida, pretende-se mostrar o que foi feito para simular este problema.

Primeiramente, dentro do OpenFOAM, temos algumas pastas que contém suas informações e condições de aplicação, as quais podem ser copiadas e modificadas para atender às condições do usuário. Nesse sentido, Dentre essas pastas, temos os *solvers*, são eles que definem como o problema será resolvido. O *solver* utilizado para a simulação tratada neste trabalho é chamado de *scalarTranspotFoam*.

[338]Afiliação: Universidade Federal do Pará

Definido o *solver*, temos que escolher qual caso queremos simular e qual método vamos utilizar. Para isso, precisamos adequar a malha, no *blockMesh*. Nesse arquivo, podemos definir como será a malha trabalhada, desde os vértices, os formatos, quais faces serão móveis e outras funcionalidades necessárias para a criação da malha.

O método que será utilizado é definido no arquivo *fvSchemes*. Onde podemos escolher o esquema de discretização que iremos usar para resolver o problema proposto. Para isso, pode-se trocar e colocar o método que se deseja diretamente no arquivo e salvá-lo para que o programa se adeque. Neste caso, como queremos analisar dois MVF, fizemos duas simulações no programa para compará-las, porém podem ser feitas mais simulações ainda.

Além disso, podemos definir durante quanto tempo o problema vai correr e quantas etapas queremos calcular, definimos isso no *controlDict*.

Definidos estes aspectos, podemos simular o problema. Neste trabalho tomaremos como exemplo o problema, retirado de Versteeg e Malalasekera (2007) [[1]], que é o seguinte: Em um domínio onde a velocidade é uniforme, $v = u = 2m/s$, e é paralela à diagonal da malha. As condições de contorno são $\phi = 0$ na face de baixo (sul) e na face à direita (leste) e $\phi = 100$ na face à esquerda (oeste) e na face de cima (norte).

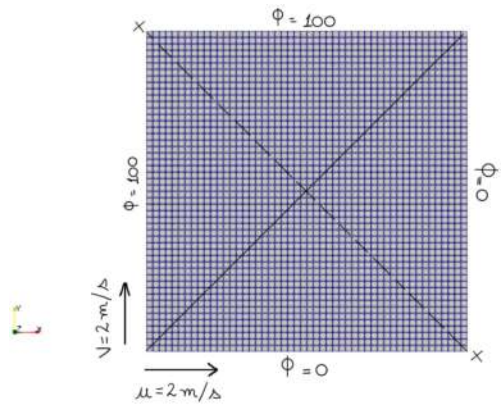
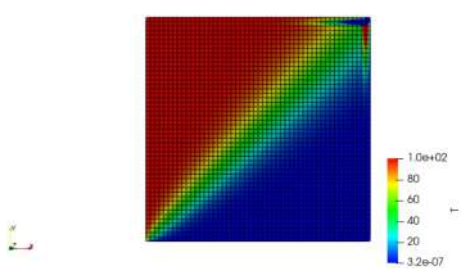


Fig. 105: Domínio do fluxo

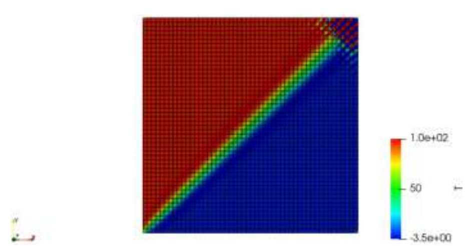
Neste problema, fazemos uma comparação entre o esquema Upwind e o QUICK podendo mostrar, sob essas condições, um teste para um caso bidimensional em uma malha de 50 X 50.

Assim, geramos a malha, com o *blockMesh* e aplicamos o *solver*, *scalarTransportFoam*, e para visualizar a malha, utilizamos o *paraview*, que é um visualizador acoplado ao programa. Assim, colocamos o problema para rodar.

Temos assim, duas malhas geradas no OpenFOAM, sendo a primeira 106(a), gerada utilizando o método Upwind e a segunda 106(b), gerada pelo método QUICK.



(a) Malha gerada utilizando o método upwind



(b) Malha gerada utilizando o método QUICK

Fig. 106

Agora, mostrando graficamente as soluções, utilizando a ferramenta *Plot Over Line* do *paraview*, temos:

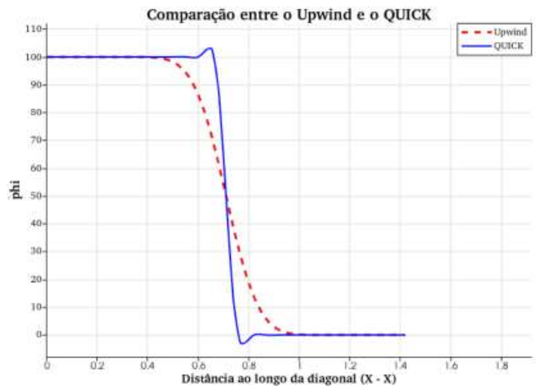


Fig. 107: Comparação da solução bidimensional do QUICK e Upwind

Pelo gráfico, pode-se observar que o esquema QUICK coincide muito mais precisamente com a solução exata do problema, do que o Upwind .

No upwind existe uma suavização da solução do problema. O Esquema QUICK é mais próximo da solução real, no entanto, pode causar, mínimas, falhas por subestimação e superestimação, como evidenciado na Figura 107, onde existe uma pequena elevação tanto acima (na linha 100) quanto abaixo (na linha 0) no gráfico. Porém, ainda sim, o QUICK mostra-se uma aproximação mais exata. Mas, possibilidade de subestimações e superestimações deve ser considerada ao interpretar as soluções dadas por este método.

BIBLIOGRAFIA

[1] VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: THE FINITE VOLUME METHOD**. 2 ed. Inglaterra: Pearson Education Limited, 2007.

Solução da equação de convecção-difusão: uma aplicação do método de volumes finitos

Santos, Alana[339]

Resumo: *O presente trabalho foi elaborado vislumbrando a contribuição para o conhecimento e compreensão de uma parte da Matemática Aplicada. Esta pesquisa foi desenvolvida com base em referências bibliográficas. Baseado nos estudos desenvolvidos, constatou-se que, para a Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC), o método de discretização de Volumes Finitos se destaca para a resolução de Equações Diferenciais Parciais (EDP's), pois tem a vantagem da conservação dos fluxos nas grandezas trabalhadas, em sua formulação. A equação de convecção-difusão é a EDP com a qual escolhemos fazer os primeiros estudos dessa teoria.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais parciais, convecção, difusão, método de volumes finitos.*

RESUMO

A priori, ressalto que esta pesquisa foi desenvolvido com base no estudo da nossa principal referência teórica: Versteeg e Malalasekera (2007) [1].

A equação que representa a convecção e difusão estacionária da propriedade ϕ em uma dimensão é:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \tag{46}$$

Trabalhando com o MVF, temos que a integração desta equação (46) sobre um volume de controle, onde as faces são w e e temos:

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_w \tag{47}$$

Para obter as equações discretizadas para o problema de convecção e difusão, definimos duas variáveis F e D, tal que os valores nas faces das células podem ser expressos como:

$$F_w = (\rho u)_w \quad \text{e} \quad F_e = (\rho u)_e \tag{48}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta x_{WP}} \Rightarrow D_w = \frac{\Gamma_w}{\Delta x} \quad \text{e} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_{PE}} \Rightarrow D_e = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \tag{49}$$

Assim, no lado direito da equação, onde temos os termos de difusão, podemos utilizar as diferenças centrais para escrever a equação como:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \tag{50}$$

[339] Afiliação: Universidade Federal do Pará

Assumimos que o campo de velocidade é de alguma forma conhecido. Por isso, os valores de F_e e F_w são conhecidos. Dessa forma, precisamos calcular a propriedade transportada, ϕ, nas faces e e w, que são os valores que ainda não temos definidos em (50). Nesse contexto, a seguir serão analisados 3 esquemas para esse propósito.

Método de Diferenças Centrais

A aproximação por diferenças centrais já é usada para representar os termos de difusão, que aparecem no lado direito da equação (50) em problemas de convecção e difusão em uma dimensão. Porém, os termos convectivos ainda ficam em função de ϕ, o que pretendemos calcular. Para isso, utilizamos uma interpolação polinomial, por diferenças divididas obtendo:

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2}; \quad \phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \tag{51}$$

Substituindo, reorganizando e identificando os coeficientes de ϕ_W e ϕ_E, como a_W e a_E respectivamente, os termos na equação (50) a expressão da equação de convecção-difusão discretizada, pelo método de diferenças centrais é:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{52}$$

onde

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}; \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}; \quad a_P = a_W + a_W + (F_e - F_w).$$

O método Upwind

O esquema Upwind leva em consideração a direção do fluxo para calcular o valor da propriedade na face da célula. Nesse sentido, temos que o valor da propriedade ϕ na face da célula é considerado igual ao valor de ϕ no nó atrás desta face (à montante).

Daí, a equação discretizada (50), identificando os coeficientes de ϕ_W e ϕ_E como sendo, respectivamente, a_W e a_E, fica da seguinte forma:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E \tag{53}$$

Onde,

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0) \quad \text{e} \quad a_E = D_e + \max(0, -F_e)$$

Método QUICK

O método QUICK utiliza uma interpolação de segunda ordem, considerando três pontos para calcular o valor na face da célula. Podemos dizer que para calcular o valor de ϕ na face leva-se em consideração dois nós à montante, antes da face, e um depois dela, sempre levando em conta a direção do fluxo.

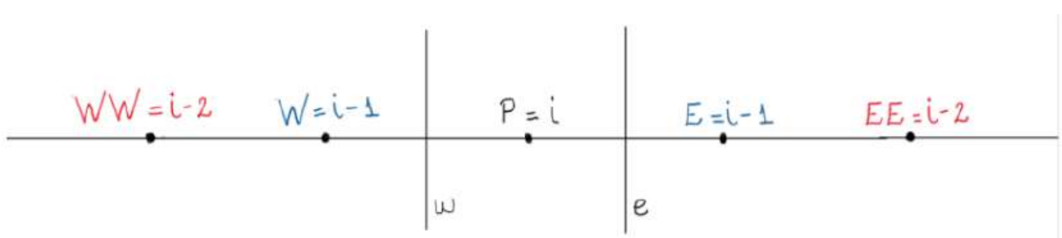


Fig. 108: Volume de controle com um nó central e dois nós à montante e à jusante

Assim, dependendo da direção do fluxo o valor de ϕ na face é dado pela fórmula a seguir:

$$\phi_{face} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} \tag{54}$$

O esquema QUICK para problemas de convecção-difusão unidimensional pode ser resumido da seguinte forma:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_{WW}\phi_{WW} + a_{EE}\phi_{EE} \tag{55}$$

Onde

$$\alpha_w = \begin{cases} 1, & \text{se } F_w > 0 \\ 0, & \text{se } F_w < 0 \end{cases}; \quad \alpha_e = \begin{cases} 1, & \text{se } F_e > 0 \\ 0, & \text{se } F_e < 0 \end{cases}$$

CONCLUSÕES

O método de Diferenças Centrais não leva em consideração a direção do fluxo, por isso apresenta soluções instáveis. O Upwind é estável, mas possui uma precisão de primeira ordem em termos de erro de truncamento da série de Taylor, o que gera um "amortecimento" na solução. O QUICK possui precisão de segunda ordem e é o mais preciso entre os três métodos estudados.

Assim, mostra-se a importância de estudar e explorar mais estes métodos, para entender onde empregá-los da melhor forma para agilizar e facilitar a resolução do problema, visando o menor erro possível ou a aproximação mais satisfatória, dependendo do caso.

BIBLIOGRAFIA

[1] Versteeg, H. K., Malalasekera, W.; **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: THE FINITE VOLUME METHOD**. 2 ed. Inglaterra: Pearson Education Limited, 2007.

Poliedros de Newton e o fecho integral de ideais sobre variedades tóricas

Araújo, Amanda S.[340]; Dalbelo, Thaís M.[341] e Da Silva, Thiago[342]

Resumo: *O fecho integral de um ideal é um objeto algébrico que tem tido muitas aplicações em vários aspectos da Geometria Algébrica e da Álgebra Comutativa. Além disso, tem sido utilizado em problemas de Teoria de Singularidades, como por exemplo no estudo de Teissier [4] sobre a equisingularidade de famílias de germes de hipersuperfícies. Mais especificamente, Teissier caracterizou algebricamente a equisingularidade de famílias de hipersuperfícies complexas em termos do fecho integral de um ideal dependente da família de germes analíticos. Com isso, foi formulado uma caracterização completa do fecho integral de ideais. O cálculo do fecho integral de um ideal é um problema desafiador. No entanto, existem alguns casos onde é possível calcular o fecho integral de forma simples. O poliedro de Newton de um ideal* $I \subseteq \mathcal{O}_n$ *fornece informações úteis sobre o fecho integral* $\overline{I}$ *e, em alguns casos, determina totalmente* $\overline{I}$*. Por exemplo, quando* I *é um ideal gerado por monômios de* $\mathcal{O}_n$*, o fecho integral* $\overline{I}$ *de* I *é gerado pelos monômios* $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$*, cujos expoentes* k *pertencem ao poliedro de Newton de* I*. Esse resultado foi estendido por Saia [3], caracterizando a classe de ideais* $I \subseteq \mathcal{O}_n$ *com fecho integral gerado por monômios cujos expoentes pertencem ao seu poliedro de Newton. Neste trabalho estendemos o resultado citado acima para o contexto de ideais do anel local analítico* $\mathcal{O}_{X(S)}$ *de uma variedade tórica* $X(S)$*. Caracterizamos os ideais em* $\mathcal{O}_{X(S)}$ *cujo fecho integral é gerado por monômios com expoentes pertencentes ao poliedro de Newton definido no cone*$(S) \subseteq \mathbb{R}_+^n$*, onde* S *é um monóide finitamente gerado em* $\mathbb{Z}_+^n$*.*

Palavras-chave: *Fecho integral de ideais, poliedro de Newton, variedade tórica.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASSELET, J.-P. Introduction to Toric Varieties. Publicações matemáticas. IMPA, 2004.

[2] KEMPF,G.; KNUDSEN,F.; MUMFORD, D.G.; SAINT-DONAT, B. Toroidal Embeddings I. Springer Berlin Heidelberg, 1973.

[3] SAIA, M. J. The integral closure of ideals and the Newton filtration, J. Algebraic Geometry 5 , 1-11, (1996).

[4] TEISSIER, B. Monômes, volumes et multiplicités. In Introduction à la théorie des singularités II, pages 127–141. Travaux en Cours 37, Hermann, Paris, 1988.

[340] Doutoranda em Matemática pelo PPGM da Universidade Federal de São Carlos. Esta autora foi apoiada pela Capes.

[341] Universidade Federal de São Carlos

[342] Universidade Federal do Espírito Santo

Difusão da geometria fractal no ensino médio

José Torres, Ana Angélica[343] e Ferreira de Souza, Luryane[344]

Resumo: *Este artigo apresenta uma visão panorâmica da geometria fractal, abordando seu contexto histórico, propriedades, atividades práticas de criação de fractais e de cálculo da dimensão fractal. Com o intuito de promover o ensino da geometria fractal no nível médio, explora-se conceitos essenciais e apresenta abordagens didáticas para engajar estudantes com esse ramo da matemática.*

Palavras-chave: *geometria fractal, educação matemática, ensino médio.*

INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal diferentemente da Geometria Euclidiana Plana não se preocupa em estudar figuras geométricas que são regulares e suaves, mas sim de estudar as figuras mais complexas e irregulares, os denominados fractais. O primeiro matemático que utilizou a palavra fractal para definir o estudo dessas figuras complexas foi Benoit Mandelbrot, um matemático polonês-francês, que em 1980 publicou o livro "The Fractal Geometry of Nature"(A Geometria Fractal da Natureza), no qual introduziu o termo "fractal". De acordo com Valim e Colucci (2016) [3] , os fractais também são descritos por funções reais ou complexas e exibem características distintas, como auto-semelhança, dimensionalidade e complexidade infinita.

Nota-se que ao ampliar uma figura geométrica regular, a figura perde sua estrutura original, como o círculo que ao ampliar torna-se apenas um segmento de reta. No entanto, ao ampliar um fractal sua estrutura permanece a mesma, de forma que é possível visualizar figuras semelhantes independente da escala que está sendo aplicada, essa propriedade chamada de autossimilaridade, diferencia totalmente um fractal de uma figura geométrica tradicional. Segundo Daga (2017, p.8-9) [1], existem dois tipos de auto semelhança: a aproximada, em que as partes não possuem exatamente o mesmo padrão, como nas formas naturais, e a exata, em que o exato padrão é repetido nas diferentes escalas.

Por vez que na Geometria Euclidiana a dimensão dos objetos geométricos é dada por um número inteiro, a dimensão de um fractal é, por vezes, dado por um número fracionário, representando o nível de sua irregularidade. Para medir a dimensão fractal de figuras que exibem auto-semelhança exata ou aproximada, podemos recorrer ao cálculo da Dimensão Fractal usando a relação de Hausdorff-Besicovitch, que é dada por:

$$D = \frac{\log n}{\log \frac{1}{R}}$$

Na qual D é a dimensão, n é o número de partes geradas e R é o fator de redução.

[343]Universidade Federal do Oeste da Bahia. Este autor foi apoiado pelo EDITAL N. 05/2023 – PIBIEX – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Extensão da UFOB

[344]Universidade Federal do Oeste da Bahia. Este autor foi apoiado pelo EDITAL N. 05/2023 – PIBIEX – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Extensão da UFOB

Em relação a complexidade infinita, de acordo com Mendonça (2016, p.14) [2] , tem-se que determinada característica macro da figura geométrica se mantém, mesmo que seja aplicado um zoom infinito, utilizando escalas cada vez infinitamente menores, ou seja, há a ocorrência infinita de repetições. A partir disso, temos a diferenciação de figuras que são pseudo-fractais, na qual ocorre a repetição em escalas menores, mas não infinitamente, e dos fractais verdadeiros na qual ocorre as três propriedades citadas anteriormente.

Esse trabalho faz parte do projeto de divulgação matemática "Fábrica Matemática", com foco para estudantes do Ensino Médio e Fundamental, com o objetivo de fabricar experimentos de baixo custo para serem utilizadas em salas de aulas e também para apresentações em oficinas, buscando uma interação mais próxima entre os estudantes e os conceitos matemáticos.

atividades envolvendo fractais no ensino médio

É notável que apesar da presença de geometrias não-euclidianas como sendo um dos conteúdos básicos do Ensino Médio, devido a sua importância na compreensão e aplicação de conceitos geométricos em planos diferentes do Euclidiano, não é isso que ocorre atualmente. Existe uma propensão aos professores de não aplicarem esse tipo de conteúdo em sala de aula, seja devido a falta de tempo ou até mesmo insegurança com esse tipo de conceito.

Diante do que foi exposto, a Geometria Fractal é uma porta de aprendizagem para estudantes do Ensino Médio, portanto deve receber a devida atenção. Ao invés de trabalhar apenas com conceitos abstratos e uma abordagem passiva, é possível empregar um ensino interativo e tangível, em que os estudantes exploram conceitos matemáticos e compreendem padrões presentes na natureza, como o formato de ramificações, raios e entre outros elementos naturais. Assim, o estudo de fractais associa conteúdos matemáticos básicos do ensino médio como contagem, logaritmo, operações com frações, cálculo de áreas e perímetros com a geometria fractal. Como também, os estudantes são apresentados a conceitos da " Teoria do Caos", aproximando conceitos usuais e conceitos mais complexos.

Uma das atividades desenvolvidas no projeto, além da explicação sobre o conceito, origem e propriedade dos fractais, é a criação dos próprios fractais. Desse modo, é possível explorar como construir um fractal tanto manualmente como através do software GeoGebra, como também, a possibilidade de se calcular a dimensão dos fractais propostos.

Neste artigo mostramos o "Cartão Triângulo de Sierpinski". Para a atividade é necessário uma tesoura, papel e uma régua. Inicialmente, com a ajuda da régua, é preciso que se dobre a folha ao meio, após é realizado um corte no meio da folha dobrada, esse corte deve ser realizado até o meio da folha. Então, dobra-se a parte superior do corte "para dentro". Repetindo esse processo várias vezes, obtemos o fractal proposto.

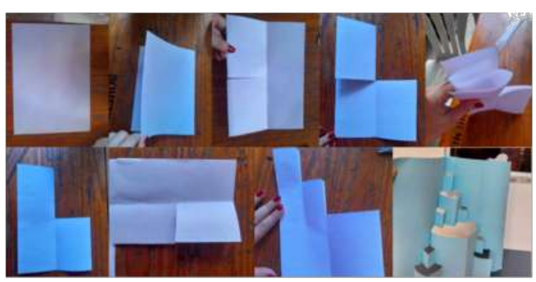


Fig. 109: Construção do Cartão Triângulo de Sierpinski

CONCLUSÕES

Em conclusão, a difusão da Geometria Fractal no Ensino Médio apresenta uma abordagem envolvente, interativa, concreta e acessível para o ensino da matemática, explorando conceitos que geralmente não são abordados pela grade curricular, de forma que ocorra a apreciação da matemática e de seus elementos mais complexos, e também a identificação de padrões matemáticos em fenômenos da natureza, desenvolvendo uma visão mais abrangente da disciplina. Como também, explora conteúdos como logaritmo, cálculo de área e perímetro, frações e utilização de fórmulas, gerando uma ponte entre a teoria dos fractais e conceitos mais básicos, proporcionando uma compreensão mais profunda aos estudantes. Também é compartilhado formas de utilizar o software gratuito Geogebra para a criação de fractais, visando a diversificação de ferramentas de ensino-aprendizagem.

BIBLIOGRAFIA

[1] DAGA, M. Uma análise de geometria fractal. Orientador: José Eduardo Castilho. **Trabalho de conclusão de curso (Graduação) - Faculdade UnB Planaltina**. Planaltina - DF, 2017.

[2] MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio. **Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas**. Maceió, AL - 2016.

[3] VALIM, J. COLUCCI, V. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. **XXII Semana Acadêmica da Matemática**, 2022.

Obras de Escher: ação do PIBID Matemática/UNESP Bauru[345]

Barbaroto, Ana Beatriz Silva[346]; Santos, Larissa Aguiar[347]; Garcia, Letícia Caroline[348]; Coelho, Samuel Henrique Lopes[349] e Marques, Emília Mendonça[350]

INTRODUÇÃO

O PIBID – Programa Institucional de Iniciação à Docência da Licenciatura em Matemática da UNESP de Bauru, nessa edição conta com 24 discentes universitários bolsistas e 3 professores supervisores, atuando em 3 escolas estaduais parceiras. Nosso grupo está atuando na E.E. Dr. Luiz Zuiani desde novembro de 2022. Neste trabalho objetivamos relatar uma de nossas experiências nessa escola parceira, qual seja, o desenvolvimento de um projeto que intitulamos “As obras de Escher”.A atividade sobre obras de Escher foi realizada na escola parceira juntamente com os estuantes do 3ºAno B, do Ensino Médio. Durante o desenvolvimento do projeto buscou-se a compreensão dos conceitos de translação, rotação e reflexão com a ferramenta GeoGebra, além de criar composições artísticas a partir da técnica de tesselação de Escher. As composições criadas pelos estudantes secundaristas foram expostas durante a comemoração do Dia da Matemática, em 05 de maio de 2023. A ideia do projeto surgiu nas aulas de Itinerário Formativo proposto no Material de Apoio ao Planejamento e Práticas do Aprofundamento (MAPPA) para o referido ano do E.M. Na reunião de avaliação e planejamento do nosso grupo do PIBID Matemática discutimos a ideia e a ampliamos, propondo que o produto desse projeto fosse objeto uma exposição. Para o desenvolvimento do projeto foram utilizadas 06 aulas de 45 minutos.

DESENVOLVIMENTO

Na escola parceira, o desenvolvimento do projeto foi iniciado com a metodologia World Café, a qual consiste no trabalho de pequenos grupos de pessoas, dispostos em mesas redondas, e na rotação dos participantes pelas mesas em cada rodada. Essa metodologia foi utilizada visando diagnosticar o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema Transformações Geométricas: Obras de Escher. O trabalho

[345] Agradecimentos e apoios: À CAPES, ao CNPq, à Reitoria da Unesp, à Prope, pela bolsa de estudos, à coordenação do projeto, escola (E.E. Dr. Luiz Zuiani) e à professora supervisora.

[346] Universidade Estadual Paulista- Unesp, Faculdade de Ciências, Licenciatura em Matemática `ana.barbaroto@unesp.br`

[347] Universidade Estadual Paulista- Unesp, Faculdade de Ciências, Licenciatura em Matemática, `larissa.aguiar-santos@unesp.br`

[348] Universidade Estadual Paulista- Unesp, Faculdade de Ciências, Licenciatura em Matemática, `lc.garcia@unesp.br`

[349] Universidade Estadual Paulista- Unesp, Faculdade de Ciências, Licenciatura em Matemática, `sh.coelho@unesp.br`

[350] Universidade Estadual Paulista- Unesp, Faculdade de Ciências, Departamamento de Matemática `emilia.marques@unesp.br`

foi norteado por perguntas previamente preparadas para contribuir com o diálogo entre os estudantes. Após esse primeiro trabalho, foi proposta à investigação de questões do ENEM que tratavam do mesmo conteúdo matemático. As aulas utilizadas para o desenvolvimento do projeto eram duplas (90 minutos).

Na aula seguinte, com o auxilio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra, os estudantes tiveram oportunidade de visualizar as transformações em alguns polígonos e analisar alguns rascunhos das obras de Escher. Essa atividade objetivou a compreensão da criação de quebra-cabeças visuais que exploram padrões geométricos no plano. Os estudantes desenvolveram arquivos no GeoGebra enfocando a construção de figuras artísticas a partir da rotação de um polígono regular fixando um de seus vértices. Foi proposto aos estudantes que fizessem as rotações de forma animada (utilizando controle deslizante no Geogebra), trocando as cores dos polígonos e deixando rastro dos movimentos de rotação.

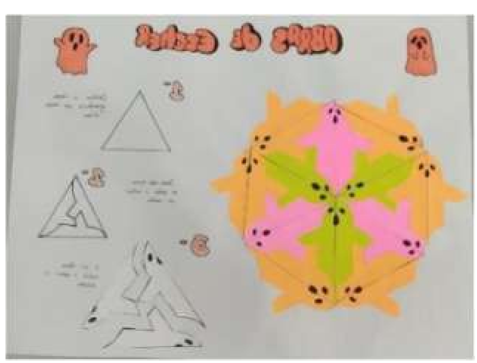
Na 3º aula dupla, dando continuidade a atividade, os alunos se organizaram em grupos pequenos para a construção do ladrilhamento no plano utilizando a técnica de Escher, com os conhecimentos matemáticos da simetria e transformações geométricas obtidos nas aulas anteriores. A Figura 1 mostra a atividade de um dos grupos utilizando o Geogebra.

Fig. 110: Atividade no GeoGebra

Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

A Figura 2 mostra as etapas da técnica de Escher aplicada para o ladrilhamento proposto por um dos grupos de trabalho. Eles partiram de um triângulo equilátero, recortaram o triângulo em papéis de cores diferentes, 3 cores no total, de tal forma a obter 3 figuras idênticas, porém em cores distintas, que entrelaçadas compunham novamente o triângulo. Depois, os estudantes passaram a compor o ladrilhamento utilizando a simetria pelo lado da figura geométrica em questão, usando a peça da cor correspondente.

Fig. 111: Etapas do desenvolvimento do ladrilhamento



Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

Por fim, os estudantes do 3º B em parceria com o nosso grupo de bolsistas do PIBID Matemática e a professora supervisora, organizaram a exposição dos trabalhos de ladrilhamento de cada grupo, no dia 5 de maio de 2023, visando a divulgação do trabalho realizado e a comemoração do Dia Nacional da Matemática que tem como objetivo homenagear Malba Tahan no dia do seu aniversário, que é 6 de maio.

A comemoração se deu no período da manhã, onde os estudantes do 3º B apresentaram palestras curtas às demais turmas da escola, descrevendo as fases do ladrilhamento, apresentando vídeos feitos no Geogebra e explanando sobre o Dia da Matemática. Após as palestras as turmas eram convidadas a visitar a exposição das obras feitas pelos estudantes, inspiradas nas Obras de Escher.

ANÁLISE E CONCLUSÃO

A comemoração contou com a presença do Coordenador da Área de Exatas da Diretoria Estadual de Ensino, o qual convidou a professora supervisora para apresentar a experiência na Oficina Técnica de Boas Práticas. Acreditamos que isso se deu baseado no entusiasmo e na participação dos estudantes do 3º B, o que mostrara que o projeto obteve o êxito desejado. A Figura 4 mostra o grupo do PIBID que atua na escola E.E. Dr Luiz Zuianni, na comemoração do Dia da Matemática.

Fig. 112: Turma do PIBID na Comemoração do Dia da Matemática

Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

BIBLIOGRAFIA

[1] Stopinski, W.; **Dia da Matemática.** YOUTUBE,4 de maio de 2011.Disponível em: `https://www.youtube.com/watch?v=N3Itc2nAcfg`. Acesso em: 22 set. 2023.

[2] Co, J. W.; **Base Nacional Comum Curricular – Educação é a Base.** Disponível em: `http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/matematica-e-suas-tecnologias-noensino-medio-competencias-especificas-e-habilidades`. Acesso em: 25 set. 2023.

Uma abordagem matemática para a otimização do custo computacional do teorema chinês do resto

Rosa, Ana Carla Quallio[351]; Manso, Fernando Cézar Gonçalves[352] e Corrêa, Wellington José[353]

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo apresentar uma abordagem matemática para otimizar o custo computacional do Teorema Chinês do Resto. Enquanto o algoritmo tradicional considera apenas módulos coprimos, resultando em um custo de* $\Theta(n^2)$*, o método proposto, que contempla uma conjectura para módulos não coprimos, possui um custo de* $O(n \cdot \log(\min(a, b)))$*. Essa abordagem representa uma significativa melhoria de eficiência no contexto da Ciência da Computação.*

Palavras-chave: *Algoritmo, custo computacional, teorema chinês do resto.*

INTRODUÇÃO

A Teoria dos Números é um ramo da Matemática que visa, primordialmente, entender as propriedades e relações entre os números. Na área de Teoria Elementar, há o estudo de congruências lineares (HARDY *et. al.*, 2008). O termo *congruência* significa "de mesma medida", desse modo, dizemos que dois números são *congruentes módulo m* quando deixam o mesmo resto na divisão por m.

Na computação, a congruência tem diversas aplicações, como a cifração e decifração de blocos do algoritmo criptográfico RSA. Para a resolução de um sistema de congruências, utiliza-se o Teorema Chinês do Resto. Em muitos contextos, torna-se necessário o uso de algoritmos computacionais para encontrar uma solução mais rapidamente. A análise assintótica, diante desse cenário, provê ferramentas para determinar o custo de implementações computacionais (CORMEN *et. al.*, 2001), possibilitando otimizações no tempo de execução.

O Teorema Chinês do Resto tradicional possui um custo assintótico de $\Theta(n^2)$. Este trabalho propõe um algoritmo mais eficiente com custo de $O(n \cdot \log(\min(a, b)))$. Essa otimização é alcançada ao considerar a possibilidade dos módulos não serem coprimos, por meio da introdução de uma conjectura.

Teorema Chinês do Resto

O Teorema Chinês do Resto tradicional é um método que resolve sistemas de congruências lineares dois a dois da forma:

[351]Afiliação: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Este autor foi apoiado pela Fundação Araucária.
[352]Afiliação: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
[353]Afiliação: Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

$$\begin{aligned} x &\equiv A_1 \pmod{m_1} \\ &\vdots \\ x &\equiv A_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

Em que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ são coprimos. A Tabela 10 mostra uma possível forma de determinar uma solução para um sistema de equações por meio do Teorema Chinês do Resto.

A	M	$\overline{M}$	$\overline{M^{-1}}$	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{M} \cdot \overline{M^{-1}}$
A_1	M_1	$\overline{M_1}$	$\overline{M_1^{-1}}$	$\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{M}_1 \cdot \overline{M_1^{-1}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_n	M_n	$\overline{M_n}$	$\overline{M_n^{-1}}$	$\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{M}_n \cdot \overline{M_n^{-1}}$

Tab. 10: Possível forma de aplicação do Teorema Chinês do Resto

No qual M é o produto de $m_1, m_2, \ldots, m_n$ excluindo a linha correspondente; $\overline{M}$ é a classe de equivalência de M em relação ao módulo da linha atual e $\overline{M^{-1}}$ é o inverso de $\overline{M}$. No algoritmo proposto, também são resolvidas equações de dois a dois. Para exemplificar, considere o sistema:

$$\begin{aligned} mx &\equiv a \pmod{b} \\ nx &\equiv c \pmod{d} \end{aligned}$$

Caso m seja diferente de 1, é preciso encontrar o inverso multiplicativo de m em relação a b, ou seja, $m^{-1} \pmod{b}$. O mesmo vale para n, no caso $n^{-1} \pmod{d}$. Em seguida, deve-se multiplicar as equações pelos seus respectivos inversos, de forma que se tenha $1x$. Assim, pode-se utilizar a equação:

$$x = \left[b^{-1} \pmod{d} \cdot b \cdot (c - a) + a \right] \pm b \cdot d \cdot j \cdot \gamma$$

Em que $j = \mathrm{mdc}(b, d)$. No caso em que $j = 1$, o algoritmo funciona da mesma forma que o Teorema Chinês do Resto. Para um sistema com módulos não coprimos, o método sugerido retorna solução se e somente se o Máximo Divisor Comum entre b e d divide $(c - a)$.

Para a demonstração, assuma que $\mathrm{mdc}(b, d)$ divide $c - a$. Isso significa que $c \equiv a \pmod{(\mathrm{mdc}(b, d))}$. Caso o sistema tenha solução, é possível afirmar, pela definição de congruência, que:

1) $x - a = bk$;
2) $x - c = dk'$;
3) $a + bk = c + dk' \iff a - c = dk' - bk.$

Dessa igualdade conclui-se que $\mathrm{mdc}(d, b)$ divide $a - c$, e portanto $c - a$, uma vez que divide $dk' - bk$. Isso conclui a prova. Outro ponto a ser detalhado é que, ao aplicar o algoritmo, obtém-se um conjunto de possibilidades que satisfazem o sistema de congruências lineares, em função de γ.

Custo computacional

O estudo assintótico, de acordo com Cormen *et. al.* (2001), descreve o tempo de execução de um algoritmo em função do tamanho de entrada n, expresso em três notações principais: O, que denota um limite superior assintótico; Ω, que representa um limite inferior assintótico; e Θ, que limita uma função acima e abaixo. No caso do Teorema Chinês do Resto Tradicional, o custo $O(n^2)$ é justificado pelo fato de que, como mostrado na Tabela 10, cada linha e coluna precisam ser percorridas, resultando em um custo quadrático.

Por outro lado, a abordagem proposta dispensa a verificação de módulos coprimos, uma vez que propõe uma conjectura para o algoritmo. Isso representa uma otimização ao eliminar uma etapa do processo. O custo $O(n \cdot \log(\min(a, b)))$ é alcançado devido à utilização do Algoritmo Estendido de Euclides para calcular inversos, conforme demonstrado por Cormen *et. al.* (2001) com um custo de $O(\log(\min(a, b)))$, além de percorrer as n equações do sistema.

CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma abordagem matemática para otimizar computacionalmente o Teorema Chinês do Resto. Diante da proposição da conjectura, os testes realizados com a implementação computacional, disponível no link, retornaram soluções corretas para sistemas com módulos não coprimos.

BIBLIOGRAFIA

[1] CORMEN, T.H. et. al. **Introduction To Algorithms**. MIT Press, 2001.

[2] HARDY, G.H. et. al. **An Introduction to the Theory of Numbers**. Oxford: OUP Oxford, 2008.

O tangram como ferramenta pedagógica para o ensino de matemática: experiência no PIBID

Piedade, Ana Celia Nascimento da Silva[354]; Lima, Mariel Assunção Pereira[355] e Gonçalves, Kátia Liége Nunes[356]

Resumo: *O presente estudo visa relatar a experiência de dois bolsistas PIBID da Faculdade de Matemática, Campus Castanhal, projeto realizado na Escola Municipalizada Maria Hyluiza, Cidade de Curuçá-PA. O referido projeto atendeu estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, com orientações, esclarecimentos de dúvidas, e ajudando-os com a execução de atividades extras. Um dos objetivos desenvolvido a partir do subprojeto foi apresentar o Tangram e sua importância à Prática Docente, possibilitando o ensino de Matemática mais envolvente para os estudantes. Ao realizarmos a confecção e manipulação matemática com o Tangram em conjunto com os estudantes percebemos a importância desse material para o ensino de conteúdos matemáticos. Enquanto bolsistas e licenciandos de Matemática consideramos essa atividade significativa para estudantes que estão em transição dos Anos Iniciais para os Anos Finais do Ensino Fundamental. Essa experiência possibilitou a interlocução entre o espaço acadêmico e a escola pública, lugares que poderemos exercer a profissão docente.*

Palavras-chave: *Tangram* 1, *prática docente* 2, *ferramenta pedagógica* 3.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho descreve uma atividade desenvolvida com estudantes do 6º ano da Escola Municipalizada Maria Hyluiza, no município de Curuçá-Pará. A Atividade foi uma proposta do Professor Supervisor PIBID que contou com colaboração dos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), Campus Castanhal UFPA. Tal atividade apresentou o Tangram como ferramenta pedagógica para o ensino de Matemática, em que as formas e propriedades, possibilitaram aos estudantes manipulação e compreensão concreta de conceitos geométricos. Essas possibilidades ao ensinar Matemática no estudo desenvolvido, com a turma de 6º ano de Matemática de uma escola pública da cidade de Curuçá, levaram-nos aos seguintes questionamentos: em que termos o Tangram auxilia o aprender-ensinar Matemática? Que possibilidades metodológicas esse material manipulativo possibilita nas aprendizagens matemáticas? Essas perguntas nos levaram a pensar no ato de ensinar e como potencializar a nossa formação docente desenvolvendo conceitos da Geometria. Portanto, ensinar geometria para os estudantes do 6º ano,

[354] ana.piedade@castanhal.ufpa.br
[355] marielassunçaolima18@gmail.com
[356] liegekatia@ufpa.br

por vias de materiais concretos possibilitam compreender, descrever, representar de forma organizada no seu cotidiano, como também propicia a construção de conhecimento matemático, encaminhando as estruturas mentais para a resolução de problemas.

Tangram

É um jogo conhecido como antigo quebra-cabeça Chinês composta por sete peças quais são: 2 triângulos grandes; 2 triângulos pequenos; 1 triângulo médio; 1 paralelogramo; um quadrado. Usar o Tangram como ferramenta pedagógica para ensinar geometria pode tornar o ensino de Matemática mais dinâmico e interativo. A prática pedagógica com Tangram segundo Micotti (1999) leva ao professor explorar conceitos geométricos nas aulas de Matemática. Seu uso estimula a exploração do espaço geométrico, bem como o desenvolvimento de habilidades de observação, experimentação e comparação. Nesse aspecto, a utilização do TANGRAM em sala de aula contribui ao ensino de Matemática, em diferentes contextos.

Procedimentos Metodológicos

Trata-se de um estudo de abordagem qualitativa, com foco no ensino e aprendizagem de matemática a partir de uma vivência prática com material manipulativo, no caso o uso do Tangram. Para isso, foram analisados os aspectos educacionais existentes no desenvolvimento da atividade, que permitiu aos estudantes criarem trajetos para aprender em diversos conceitos matemáticos, bem como, serviu para desenvolvermos estratégias no uso do Tangram como ferramenta pedagógica, oportunizando assim a utilização de raciocínio lógico, cálculos mentais na formação dos objetos geométricos. Na sequência, foi apresentado o Tangram, a história de sua criação, suas características geométricas composta pelas sete peças e sua formação original: um quadrado grande. (figura 1). A turma foi dividida em pequenos grupos e receberam materiais para produzirem Tangram, com orientações para recortarem as figuras e colá-las em folhas de isopor, apresentada na imagem.

Fig. 113: Autoria própria

Discussão dos Resultados

Enquanto bolsistas PIBID obtivemos a oportunidade de praticar a docência em meio a desenvolvimento dos conhecimentos sobre as formas geométricas, apresentando aos estudantes de uma maneira de aprender a partir que do quebra-cabeça geométrico, o Tangram. Tendo esse como uma ferramenta pedagógica que permite a abordagem a partir de suas figuras, aprendizagens de diversos conteúdos, bem como, a partir de suas características geométricas possibilitam condições aos interlocutores de explorarem os conceitos geométricos nas aulas de Matemática, pois "a sua utilização prevê a exploração do espaço geométrico mais comuns, bem como o desenvolvimento de habilidades de observação, experimentação, comparação e levantamento de hipóteses, entre outros". Micotti (1999, p.25)

A atividade destacou contribuições do PIBID para a formação docente, tanto em âmbito de Formação Inicial e Formação Continuada. Pois o desenvolvimento da atividade com auxílio do Professor supervisor e a troca de experiências com os demais bolsistas foram fundamentais para os desafios estabelecidos durante esse processo formativo. Desta forma, reforçamos que "esta nova construção pedagógica precisa de professores empenhados num trabalho em equipa e numa reflexão conjunta. É aqui que entra a formação continuada, um dos espaços mais importantes para promover esta realidade partilhada."(Nóvoa, 2019, p. 10).

CONCLUSÕES

Essa experiência possibilitou a interlocução entre o espaço acadêmico e a escola pública,lugar que poderemos exercer a profissão docente e que Nóvoa (2019, p.9) nos alerta da "relação que se estabelece, na formação inicial, entre os estudantes das licenciaturas e os professores da Educação Básica" ser fundamental para concebermos as políticas públicas em espaço profissional, e por isso a relevância da "inserção dos jovens professores na profissão e nas escolas. A formação nunca está pronta e acabada, é um processo que continua ao longo da vida".

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Ministério da Educação. Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid).** Disponível em:Acesso em: 04 out. 2023.

[2] Micotti, M. C.; **Laboratório de Educação Matemática,a utilização do Tangram como recurso de aprendizagem.** Editora UNESP. São Paulo, 1999.

[3] Tardif, M.; **O trabalho docente, a pedagogia e o ensino. Interações humanas, tecnologias e dilemas.** In: TARDIF, Maurice. Saberes docentes e formação profissional. 12. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, Capítulo 3, 2011.

As mulheres invisíveis na arte e na matemática: algumas reflexões

Sousa, Ana Larissa[357]; Neri, Edilson[358]

Resumo: *A participação feminina na Arte e na Matemática ao longo da história é subestimada ou ignorada. Nesse contexto, o presente trabalho tem como intuito apresentar algumas reflexões sobre a invisibilidade da Mulher na Arte e na Matemática a partir de uma pesquisa de trabalhos acadêmicos. Ademais, é feito um levantamento dos trabalhos científicos produzidos até o presente momento na área de Matemática e na Arte, os quais serviram de base para esta pesquisa. Além disso, o estudo se fundamenta em dados fornecidos pela (CAPES, 2024).*

A finalidade do presente trabalho é refletir sobre como essa invisibilidade afetou a educação da mulher na arte e na matemática. Conforme essa intenção, buscamos verificar por meio dos trabalhos científicos a trajetória das mulheres que constantemente é retratada de maneira descontínua.

Palavras-chave: *Arte, matemática, participação feminina, invisibilidade.*

INTRODUÇÃO

Historicamente, se observa a participação da mulher na Arte e na Matemática sendo ofuscada pela bagagem sociocultural estabelecida desde a antiguidade. Sob essa perspectiva, o objetivo deste estudo é realizar algumas reflexões sobre a invisibilidade da Mulher na Arte e na Matemática a partir de pesquisas bibliográficas. Além disso, a pesquisa faz parte do trabalho de conclusão do curso de licenciatura em Matemática com o tema as mulheres invisíveis na matemática e na arte.

Nesse sentido, por meio de pesquisas bibliográficas na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES, 2024), foi realizado um estudo bibliográfico dos trabalhos científicos produzidos até o presente momento que estão interligado com as mulheres na arte e na matemática. Nesse sentido, ao efetuar uma busca utilizado um filtro "Mulheres na Arte" o sistema selecionou 30 trabalhos científicos e apenas 3 deles relacionam as mulheres na pintura, uma vez que os outros 27 trabalhos estão relacionados com Artes Cênicas e Artes Visuais, os quais não são o foco deste estudo. Diante disso, as pesquisas foram reduzidas para 3 trabalhos científicos sendo duas dissertações e uma tese que retratam as mulheres na pintura. Semelhante a isso, o processo foi realizado novamente com o filtro "Mulheres na Matemática" e como resultado o banco de dados encontrou 15 pesquisas, as quais somente 4 delas discorrem sobre mulheres que contribuíram para a construção da matemática.

As pesquisas forneceram contribuições para o processo de escrita deste estudo, haja vista o retrato da figura feminina em todas as pesquisas é similar, o qual evidencia sua trajetória sendo ofuscada pela falta de acesso na educação ou no ambiente social. Com base nisso, iremos refletir sobre como a mulher é invisibilizada na área da Matemática e na Arte.

[357]Universidade Federal do Pará
[358]Universidade Federal do Pará

A MULHER NA ARTE E NA MATEMÁTICA

O que podemos dizer sobre as Mulheres na História da Arte e da Matemática? É necessário ser mais especifico na pergunta para destacar a trajetória que a participação feminina possibilitou até os dias atuais. Mas, desta vez, proponho-me a retratar um período que invisibilizou o papel que a mulher desempenhava em sociedade, mas que marcou os vestígios do desenvolvimento da mulher no mundo da arte e na matemática. Dando ênfase que as técnicas de pintura não foram aperfeiçoadas por mulheres devido a falta de acesso ao ensino que proporcionava além de aulas de perspectiva o ensino da geometria que elevaria o nível das obras de artes.

Silva (2023), em sua Dissertação A História das mulheres Matemáticas como inspiração para meninas no Ceará, abordou o papel que a mulher desempenhava na sociedade, destacando-se a limitação social na educação, uma vez que eram impedidas de entrar em ambientes que desenvolviam o intelecto, pois os únicos a terem direitos era a figura masculina. Análogo a isso, as mulheres recebiam um ensino domiciliar que ensinavam elas a serem mães e esposas, a participação feminina era vista em segundo plano, sendo ela moldada por ensinamentos ligado ao casamento e seu potencial intelectual não era pauta de discurso na época. Mesmo assim, durante séculos a figura feminina atravessou inúmeras barreiras no que diz respeito a educação.

Em geral, a educação feminina era direcionada as mulheres de classe média e que pertencia a uma cultura feminina particular e não como visto para homens que desfrutavam do ensino nas academias. Sob essa perspectiva, a educação feminina era orientada ao exercício dos afazeres domésticos e nesse período apenas as mulheres nobres tinham o acesso a educação de maneira particular.

No Brasil, de 1500 a 1822, a participação feminina não era valorizada, uma vez que as mulheres não recebiam instruções educacionais e nesse período a mulher independente da classe social não poderia ler nem escrever. É necessário compreender que na época mencionada somente os homens possuíam o acesso à educação por se tratar de um interesse político, o qual tinha como influencia a participação masculina nos negócios da família.

Iniciou-se em 1827 discussões a respeito da educação feminina no Brasil com destaque no papel da figura feminina na escola. Todavia, o acesso à educação era apenas superficial ligado somente a aprendizagem das quatros operações. É notório que a preocupação sobre o futuro profissional das mulheres era visivelmente ofuscada dos assuntos pertinentes da época. Diante deste cenário, é válido ressaltar que a mulher ao longo dos anos teve seu desenvolvimento intelectual apagado por conta da sua condição social que refletiu nas produções intelectuais que temos atualmente. Muitas vezes, no que diz respeito a arte, as obras de artistas femininas não eram publicadas e as mulheres precisavam utilizar codinomes para vender suas obras e receberem o valor apropriados a elas.

Elias (2022), em sua dissertação As Obras de Recepção das Quinzes Pintoras Aceitas na Academia Real de Pintura e Escultura (1648-1793), buscou-se evidenciar que por meio da arte as mulheres tiveram um mínimo de espaço de criação artística, uma vez que se inicia uma mudança social na figura feminina que deixa de ser um objeto do olhar da sociedade, visto que a mulher era ensinada a ser mãe e esposa. Mas, passa a ser uma mulher criadora, a qual por meio da arte pode transmitir a sua essência e demonstrar para todos o seu papel como protagonista da sua história.

A mulher que no decorrer dos anos teve o ensino direcionado aos afazeres domésticos passa a vislumbrar uma nova fase que por intermédio da arte ela pode ter um mínimo de liberdade de expressão e então seu mundo se expande para além do exercício doméstico. Nesse sentido, algumas pintoras utilizavam-se de suas obras como fonte de ganhos e uma outra parcela das mulheres eram anônimas e tinham suas obras atribuídas a outros artistas.

Em sua pesquisa, Elias (2022), Obras de Recepção das Quinzes Pintoras Aceitas na Academia Real de Pintura e Escultura (1648-1793), se destaca que somente quinzes mulheres foram aceitas na Academia Real de Pintura e Escultura. Nesse sentido, as escolhidas eram às esposas dos membros, conectadas pelo laço familiar ou possuíam mérito por suas obras. Além disso era necessário ter uma indicação para ingressar na academia. A figura feminina no mundo das artes e sua educação é uma discussão pertinente para este trabalho, visto que ao entrar na academia além da competência era necessário receber votos que ocorriam de maneira sigilosa, ou seja, a influência política era um ponto chave para o ingresso de artistas na academia. Ademais como as mulheres eram proibidas de pintarem modelos vivos para o estudo do desenho nu, o nível que elas conseguiam desenvolver na pintura era menor do que os pintores atingiam, devido que a representação do corpo humano não era atingido e consequentemente elas ficavam em desvantagens em relação aos homens. Por conseguinte, as pintoras da época tinham trabalhos como paisagens ou miniaturas, as quais eram consideradas simples.

O presente estudo ressalta que as mulheres que não tinham conexão com os membros das academias e por sua vez eram pobres, não tinham acesso a educação e nem as técnicas pertinentes a pintura, uma vez que as mulheres que foram aceitas na academia eram proibidas de ver as conferências de Geometria e perspectiva. Todavia, mesmo que a mulher tivesse talento ela era impedida de aprimorar suas técnicas e destaca-se perante os homens.

No Brasil, notamos que este cenário deturpado da mulher como criadora é oriundo da cultura colonial que tentava justificar que a figura feminina era inferior ao homem e por consequência não deviam ter um ensino igualitário. Consoante a isso, se observa que as mulheres que tinham o desejo de serem artistas eram apagadas da historias não por falta de talento, mas em virtude da ausência de oportunidade de elevar seu ensino nas áreas, assim como na arte e na matemática.

Nesse sentido, no que diz respeito a figura feminina na arte e na matemática é notório que se a artista for impedida de aprender a parte teórica, o grau que ela poderá atingir na pintura será menor do que o do homem, visto que enquanto os homens estudavam o gênero história que necessitava de um alto nível de aperfeiçoamento e técnica, as mulheres pintavam paisagens e somente a figura masculina poderia se destacar com pinturas ricas em detalhes.

CONCLUSÕES

Neste trabalho buscamos compreender como a figura feminina no decorrer dos séculos foram invisibilizadas por conta do seu status social. Compreendemos que a mulher de classe média só tinha o acesso a educação particular devido as relações familiares, sendo elas motivos de ingresso para as academias. No tocante, se torna claro que a mulher menos favorecida foi apagada pela história e seu talento não aperfeiçoado. No decorrer do trabalho foi salientado o cenário deturpado, o qual a mulher se encontrava sem acesso a educação de imediato e privada do ensino das arte como resultado.

Embora exista diálogos sobre a atuação da mulher em sociedade e sua profissionalização, temos que houve de maneira tardia a inclusão dela no espaço educacional e reverberando a ideia de que o ensino para as mulheres fosse inferior aos homens. Diante disso, no que concerne a arte matemática é nítido que os jovens atualmente não conhecem artistas matemáticas, tão pouco mulheres na arte matemática e este fator foi o combustível para este trabalho que buscou evidenciar que não temos muitos estudos sobre a figura feminina na arte matemática e seu papel foi invisibilizado do decorrer da história.

BIBLIOGRAFIA

[1] Silva, E. K.;**A História das mulheres como inspiração para meninas no Ceará**. Dissertação, UFCA, Juazeiro do Norte., p. 4-29, 2023.

[2] Moura, M. C. A.;**Participação da Mulher na Construção da Matemática**. Dissertação, UFERSA, Mossoró. p. 11-68, 2015.

[3] Elias, M. T. ;**As Obras de Recepção das Quinze Pintoras Aceitas na Academia Real de Pintura e Escultura de Paris**. Dissertação. USP, GUARULHOS, p. 21-55, 2022 (1648-1793).

Uma caracterização para espaços de Banach reais bidimensionais uniformemente convexos

Silva, André Luis Martins Tomaz[359] e Santos, Elisa Regina dos [360]

Resumo: *O objetivo deste trabalho é mostrar que um espaço de Banach bidimensional real X é uniformemente convexo se, e somente se, o par (X, Y) tem a BPBp para todo espaço de Banach Y.*

Palavras-chave: *Propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás, face de um convexo, espaço uniformemente convexo.*

INTRODUÇÃO

Vamos apresentar os conceitos e os resultados necessários para demonstrar a caracterização. Denotaremos por B_X a bola unitária fechada e por S_X a esfera unitária de um espaço de Banach X. Além disso, denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y. As definições a seguir foram baseadas em [1] e [2].

Definição 9.1 *Sejam X e Y espaços de Banach e C um subconjunto convexo não vazio de X.*

*a) Dizemos que X é **uniformemente convexo** se, para todo $\epsilon > 0$, existe $0 < \delta < 1$ tal que, para todos $x, y \in B_X$ tais que $\frac{\|x+y\|}{2} > 1 - \delta$, temos $\|x - y\| < \epsilon$.*

*b) Um ponto $x \in C$ é chamado de **ponto extremo** de C se, para todos $\alpha \in (0, 1)$ e $y, z \in C$ tais que $x = (1 - \alpha)y + \alpha z$, temos que $x = y = z$. O conjunto dos pontos extremos do subconjunto convexo C será denotado por $\mathrm{Ext}(C)$.*

*c) Dizemos que X é **estritamente convexo** se $\mathrm{Ext}(B_X) = S_X$.*

*d) Dizemos que um subconjunto não vazio $F \subset C$ é **face** de C se F é convexo e, para todos $x, y \in C$ e $0 < \alpha < 1$ tais que $(1 - \alpha)x + \alpha y \in F$, temos $x, y \in F$.*

*e) Dizemos que o par (X, Y) satisfaz a **propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores** (BPBp) se dado $\epsilon > 0$, existem $\eta(\epsilon) > 0$ e $\beta(\epsilon) > 0$ com $\lim_{t \to 0} \beta(t) = 0$ tais que, para todo $T \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$, se $x_0 \in S_X$ é tal que $\|Tx_0\| > 1 - \eta(\epsilon)$, então existem um ponto $u_0 \in S_X$ e um operador $S \in S_{\mathcal{L}(X,Y)}$ satisfazendo as seguintes condições: $\|Su_0\| = 1$, $\|u_0 - x_0\| < \beta(\epsilon)$ e $\|S - T\| < \epsilon$.*

Proposição 9.1 ([4], Proposição 1.78) *Seja X um espaço de Banach de dimensão finita. Então X é uniformemente convexo se, e somente se, X é estritamente convexo.*

[359] UnB.
[360] UFU.

Theorem 9.1 ([3], Theorem 3.1) *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Então, para todo espaço de Banach Y, o par (X, Y) tem a BPBp.*

Theorem 9.2 ([3], Theorem 3.2) *Seja X um espaço de Banach. Suponha que, para qualquer um espaço de Banach Y, o par (X, Y) satisfaz a BPBp. Se X é um espaço de Banach real, então não há face de B_X que contenha um subconjunto não vazio relativamente aberto de S_X.*

CONVEXIDADE UNIFORME PARA ESPAÇO DE BANACH BIDIMENSIONAL REAL

Para mostrar a caracterização vamos precisar do Lema 9.1, da Proposição 9.2 e da Proposição 9.3.

Lema 9.1 ([4], Lema 3.36) *Sejam $a, b, c \in S_X$. Se $c \in (a, b)$ então $[a, b] \subset S_X$.*

Proposição 9.2 ([4], Proposição 3.37) *Seja X um espaço de Banach bidimensional. Então todo segmento de reta maximal não trivial em S_X é uma face de B_X.*

Proposição 9.3 *Seja X um espaço de Banach bidimensional. Então todo segmento de reta maximal não trivial em S_X contém um subconjunto não vazio relativamente aberto em S_X.*

Demonstração: Seja $[a, b]$ um segmento maximal não trivial em S_X. Suponha que não existe aberto relativo a S_X em $[a, b]$. Tomemos $c \in (a, b)$, $\epsilon = \min\{\|c - a\|, \|c - b\|\} > 0$, $d \in B(c, \epsilon) \cap S_X$ tal que $d \notin [a, b]$, $e \in (a, b)$ com $e \neq c$, $f \in (c, e)$ e $\delta = \min\{dist(f, [c, d]), dist(f, [e, d])\} > 0$. Então por hipótese existe $h \in B(f, \delta) \cap S_X$ tal que $h \notin [a, b]$. Seja r a reta determinada por a e b. Temos que r divide X em dois semiplanos S_1 e S_2. Segue da maximalidade de $[a, b]$ que $d \notin r$. Sem perda de generalidade podemos supor que $d \in S_1$. Dividiremos a demonstração em dois casos: $h \in S_2$ (caso 1) e $h \in S_1$ (caso 2). Note que $h \notin r$, pois $[a, b]$ é maximal.

No Caso 1, temos que $[a, b] \cap [d, h] \neq \emptyset$, ou seja, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que $(1 - \alpha)d + \alpha h \in [a, b]$, com $d, h \notin [a, b]$. Absurdo, pois $[a, b]$ é uma face de B_X.

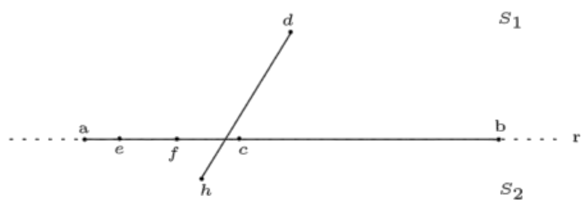


Fig. 114: Segmento $[d, h]$.

No Caso 2, conseguimos construir o triângulo cde com h no interior do triângulo. Construindo retas paralelas a reta r mostra-se que todos os pontos do interior de cde, estão contidos em S_X. Daí, tomando $\delta > 0$ como a distância de h até o triângulo cde temos que $B(h, \delta) \subset S_X$, mas isso contradiz o fato de os pontos da esfera serem pontos de fronteira de B_X.

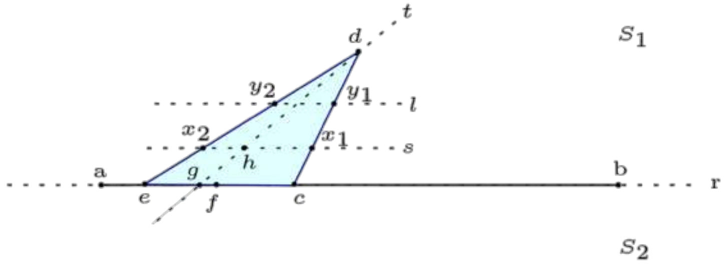


Fig. 115: Polígono de três lados.

□

Agora mostremos a caracterização de espaço de Banach bidimensional real uniformemente convexo.

Corolário 9.1 *Seja X um espaço de Banach bidimensional real. Então X é uniforme-mente convexo se, e somente se, o par (X, Y) tem a BPBp para todo espaço de Banach Y.*

Demonstração: Se X é uniformemente convexo então segue do Teorema 9.1 que o par (X, Y) tem a BPBp para todo espaço de Banach Y.

Se X não é uniformemente convexo então, pela Proposição 9.1, X não é estritamente convexo, ou seja, existe um ponto $x \in S_X$ que não é ponto extremo. Daí, existem $\alpha \in (0,1)$ e pontos $x_1, x_2 \in B_X$ com $x_1 \neq x$ e $x_2 \neq x$ tais que $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$. Segue de $x \in S_X$ que $x_1, x_2 \in S_X$. Logo, pelo Lema 9.1, temos que $[x_1, x_2] \subset S_X$. Portanto, podemos construir um segmento de reta não trivial maximal $[a, b]$ em S_X. Segue da Proposição 9.2 e da Proposição 9.3 que B_X contém uma face não trivial que contém um subconjunto relativamente aberto em S_X. Logo, o par (X, Y) não tem a BPBp para todo espaço de Banach Y, pelo Teorema 9.2. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] Acosta, M. D. Aron, R. M. García, D. Maestre, M. *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, **Journal of Functional Analysis** 254 (2008), 2780-2799.

[2] Fabian, M. Habala, P. Hájek, P. Montesinos, V. Zizler, V. **Banach Space Theory Banach Space Theory**: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. New York: Springer, 2011.

[3] Kim, S. K. Lee, H. J. *Uniform convexity and Bishop-Phelps-Bollobás property*, **Canad. Journal of Mathematics** 66 (2014), no. 2, 373-386.

[4] Silva, A. L. M. T. **A propriedade de Bishop-Phelps-Bollobás**. 2023. 116 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023.

Educação matemática e cinema

na formação inicial de professores

Cardoso, Andréa[361]; Souza Jr., José Carlos de[362] e Lopes, Ronaldo André[363]

Resumo: *Produções cinematográficas comerciais podem ser uma fonte de estímulo para a motivação e para o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma experiência de confecção de portfólio de filmes com potencial para ser utilizado em aulas de matemática.*

Palavras-chave: *Matemática, ensino, cinema, formação de professores.*

INTRODUÇÃO

O cinema, como um meio de comunicação que atrai diferentes públicos, pode ser uma fonte de estímulo para a motivação intrínseca dos estudantes na busca por compreensão de diferentes conceitos matemáticos e suas aplicações na realidade, também para conhecer a diversidade cultural dos matemáticos criadores das teorias relevantes e as consequências desse desenvolvimento no campo científico, filosófico e social.

A linguagem cinematográfica, como a imagem em movimento, desperta curiosidade, gera interesse e facilita o aprender uma vez que permite experienciar sensações. Os filmes, mesmo os comerciais, têm abordado temas conectados ao desenvolvimento e aplicações da Matemática em situações cotidianas, mesmo que não tenham sido produzidos diretamente para serem utilizados como recurso didático ou documentário.

Romo[1] afirma que o cinema pode ser concebido como um elemento que educa, desde que esteja fundamentado crítica e sistematicamente com finalidades educacionais e pedagógicas. Neste sentido, a partir da revisão sistemática de literatura realizada sobre cinema e matemática[2], conclui-se que há mais trabalhos que abordam a relação do cinema com a educação de modo geral em comparação com aqueles relacionados ao ensino de matemática em específico. Os autores localizaram relatos de experiências que utilizaram com êxito o cinema para o ensino de matemática. Entretanto, há desconhecimento do potencial didático desse recurso pela maior parte dos professores de Matemática, além da escassez de material sobre o tema. O objetivo desse trabalho é apresentar uma experiência de confecção de portfólio de filmes com potencial para ser utilizado em aulas de matemática.

DESENVOLVIMENTO

A disciplina “Cinema e Educação Matemática”, com carga horária de 60 horas, ofertada como eletiva para o Curso de Matemática-Licenciatura teve como objetivo discutir temas históricos, científicos, filosóficos e sociais relacionados à Educação Matemática por meio de produções cinematográficas.

A metodologia de ensino pautou-se pela seleção de filmes comerciais com potencial pedagógico e de

[361] UNIFAL-MG.
[362] UNIFAL-MG.
[363] UFSCAR.

formação cultural no âmbito do conhecimento matemático, após foi realizada a análise fílmica de cada obra para seleção de cenas, seleção de material complementar e elaboração de questões para reflexão. Painéis de discussão semanais e confecção de um portfólio individual de filmes foram utilizados como instrumentos avaliativos. Os filmes foram divididos em quatro unidades temáticas explicitadas na Figura 116.

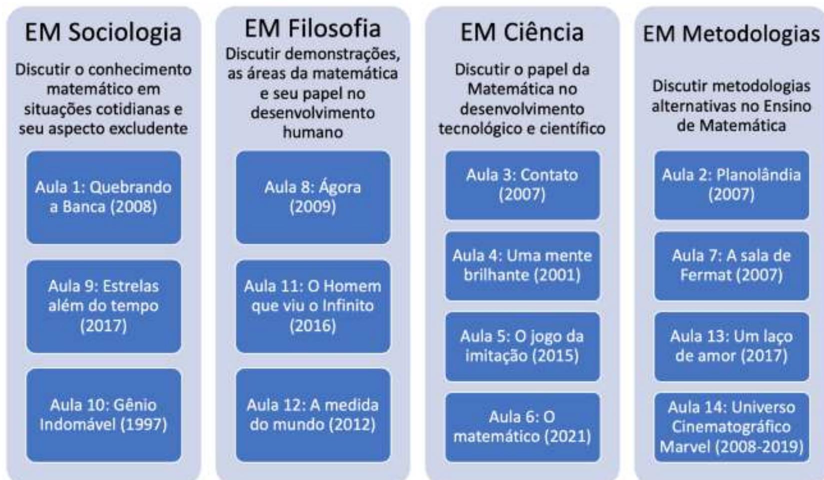


Fig. 116: Lista dos filmes selecionados, classificados por unidade temática e seus objetivos de aprendizagem na formação do professor de matemática. Autoria própria

Os filmes foram escolhidos pela articulação que trazem de conceitos matemáticos ou do papel da matemática na Ciência e na sociedade. As cenas selecionadas deveriam explicitar um conceito com possibilidade de ser utilizado no ensino de matemática. Para além dos conceitos matemáticos, foi possível discutir questões gerais relacionadas à Matemática como Ciência e seu papel no desenvolvimento tecnológico e social e suas aplicações em diferentes áreas. Temas como o papel das mulheres na Ciência, sexismo, preconceito, meritocracia, ética científica, vida acadêmica, o trabalho do matemático e superdotação também foram abordados. Na Figura 117 estão elencados os conceitos matemáticos identificados na seleção de cenas dos filmes.

Aula 1	Aula 2	Aula 3	Aula 4
Probabilidade Problema Monty Hall Operações aritméticas	Formas geométricas planas e espaciais Secções planas Múltiplas dimensões	Números primos Criptografia Potências Notação científica	Padrões numéricos Probabilidade Teoria dos jogos
Aula 5	**Aula 6**	**Aula 7**	**Aula 8**
Criptografia Fatoração Análise combinatória	Probabilidade, Método de Monte Carlo Interdisciplinaridade	Resolução de problemas Enigmas Demonstração Conjectura Goldbach Incompletude Godel	Secções Cônicas Movimento dos corpos celestes Teoria heliocêntrica
Aula 9	**Aula 10**	**Aula 11**	**Aula 12**
Álgebra linear Geometria Analítica Cálculo numérico	Resolução problemas Matrizes Geometria Analítica Grafos	Papel demonstração Papel da intuição Partição Análise combinatória Números primos Sequências e séries	Polígonos regulares Construções Geometrias Números primos Sequências e séries Triangulação
Aula 13		**Aula 14**	
Cálculo mental (Método Trachtenberg) Problemas do milênio Distribuição gaussiana Conjectura de Poincaré, Equação de Navier-Stokes		Espiral de Arquimedes - Equações Proporcionalidade Estatística Inteligência artificial Múltiplas dimensões - Infinito	

Fig. 117: Lista dos conceitos matemáticos que podem ser abordados a partir dos filmes selecionados para cada aula. Autoria própria

CONCLUSÕES

O trabalho com a seleção de cenas ampliou a bagagem cultural dos licenciandos e permitiu a reflexão sobre personagens históricos, contexto de desenvolvimento de conceitos e teorias matemáticas. A partir da avaliação dos portfólios foi possível inferir a motivação para utilizar o material nas aulas de matemática a partir da conclusão de que é possível selecionar cenas de obras cinematográficas para trabalhar com conceitos matemáticos específicos, temas mais amplos sobre o papel da Matemática na Ciência e na sociedade, como também para abordar assuntos relevantes na educação inter e transdisciplinar.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROMO, J. C. Imaginarios sociales sobre uso de tecnología y relaciones interpesonales em jóvebes universitarios através del cine de ficción como recurso didáctico. **Shopia**, n. 28, p. 165-184, 2020.

[2] DI SANTO, M. S.; SILVA, M. S. A Educação Matemática no Cinema. **Avanca Cinema**, p. 18-28, 2022.

Explorando as dimensões das habilidades espaciais:

o Impacto no Cotidiano e na Matemática

Wrzesinski, Andressa Paula[364] e Mathias, Carmen Vieira[365]

Resumo: *Um aspecto importante da matemática é a capacidade de apresentar conceitos abstratos em formas concretas e uma forma de estimular essa capacidade é por meio das habilidades de visualização espacial. Nesse contexto, o presente trabalho tem por objetivo relatar um recorte de projeto em andamento que visa investigar os processos de visualização espacial. Especificamente serão apresentados os resultados da aplicação de um Instrumento de Raciocínio Espacial (IRE). Participaram da pesquisa 355 alunos de cursos de Engenharia e Ciências Exatas da Universidade Federal de Santa Maria-UFSM. Destaca-se a necessidade de maior atenção às habilidades de orientação espacial no contexto educacional, como evidenciado pela disparidade significativa nas respostas dos alunos. Resultados preliminares inferem a importância de trabalhar as habilidades espaciais, desde a educação básica.*

Palavras-chave: *Habilidades espaciais, orientação espacial, instrumento de teste.*

INTRODUÇÃO

As habilidades espaciais são a capacidade de compreender e manipular informações espaciais, tais como perceber e manipular padrões mentais, girar e transladar objetos geométricos mentalmente. Além disso, as habilidades espaciais são divididas em três categorias: orientação espacial, rotação mental e visualização espacial [5]. Para fundamentar a discussão, adotaremos a definição de orientação espacial dada em [2] que a define como a capacidade de imaginar como um conjunto de estímulos que aparecerá de outras perspectivas.

Outros pesquisadores [4] destacam que as habilidades de visualização espacial são essenciais para tarefas cotidianas, como movimentar-se em um ambiente, localizar-se em mapas, dirigir em uma rodovia, entre outras situações comuns. A ausência de um bom desenvolvimento dessas habilidades pode resultar em diversos problemas cotidianos. Além disso, essas habilidades desempenham um papel crucial não só em atividades do cotidiano, mas também na compreensão de conceitos matemáticos, como afirma [3].

Nesse sentido, o presente pôster possui como objetivo relatar um recorte de projeto em andamento que visa investigar os processos de visualização espacial. destacados em um Instrumento de Raciocínio Espacial aplicado a calouros de cursos de Ciências Exatas e Engenharias de uma universidade do sul do pais. O recorte aqui apresentado apresenta um levantamento de dados que visa compreender as lacunas existentes nas habilidades de orientação espacial.

[364]UFSM. Este autor foi apoiado pelo projeto Probic/Fapergs

[365]Universidade Federal de Santa Maria - UFSM.

DESENVOLVIMENTO

No desenvolvimento dessa pesquisa foi utilizado o Instrumento de Raciocínio Espacial (IRE) desenvolvido em [5] cujo objetivo é medir três dimensões da habilidade espacial (rotação mental, orientação espacial e visualização espacial). O IRE é composto por 30 questões de múltipla escolha, das quais 10 envolvem a habilidade de orientação espacial.

Os participantes da pesquisa foram 355 alunos matriculados no primeiro semestre dos cursos de Engenharia e Ciências Exatas da Universidade Federal de Santa Maria. E, o tratamento das informações coletadas está realizada via análises estatisticas. Observa-se que pesquisas como a que vem sendo realizada, abordam uma diversidade de questões, incluindo as percepções matemáticas, uso de visualização e a aparente relutância dos alunos em se envolver (e dificuldade) com tais processos.

DISCUSSÕES

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) [1], a orientação espacial é uma habilidade a ser desenvolvida do 1º ano ao 4º ano do Ensino fundamental. Embora este documento não utilize o termo de "orientação espacial", quando solicita, no contexto da Geometria, que se trabalhe a "Localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado" [1], compreende-se que esteja se referindo diretamente a essa habilidade. Pois, esse objeto do conhecimento está alinhado com a definição de orientação espacial adotada nesse trabalho. Dessa forma, podemos observar que o desenvolvimento dessa habilidade ocorre desde as etapas iniciais do ensino básico. Neste contexto, vamos analisar uma das 10 questões do IRE (figura abaixo) que aborda a habilidade de orientação espacial e examinar os dados obtidos a partir das respostas dos alunos.

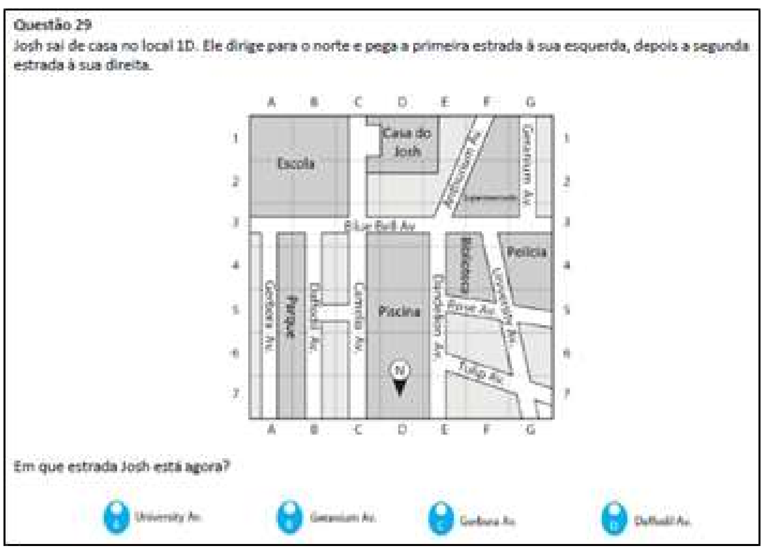


Fig. 118: Adaptado de [5]

A questão aborda o conceito de orientação espacial e direção. Nela são descritas as ações de uma pessoa ao sair de casa, seguindo instruções específicas, e solicita que os estudantes determinem sua localização após tais movimentações. Esta questão, requer a compreensão e a aplicação de conceitos relacionados á direção e à localização e orientação no espaço. Observa-se que tais conceitos teoricamente, são desenvolvidos nos anos iniciais do Ensino Fundamental, segundo as diretrizes da BNCC. A figura abaixo ilustra o percentual das respostas dos estudantes.

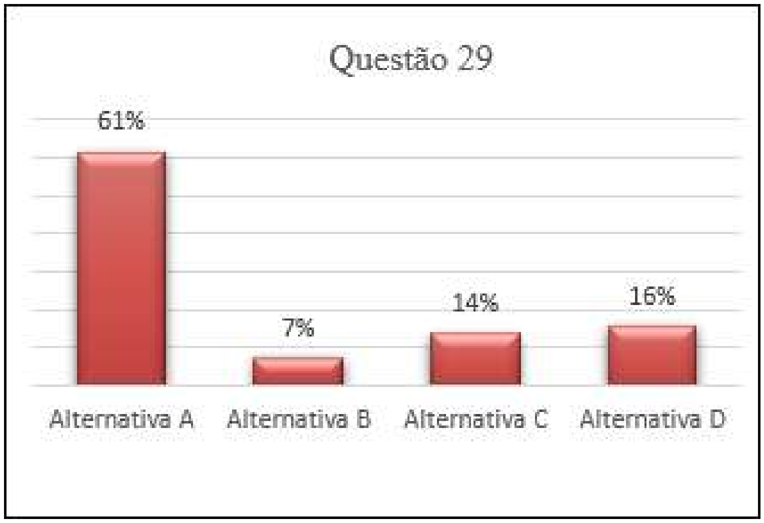


Fig. 119: Dados da pesaquisa

Ao contrário do que ocorreu com as outras questões, que abordam a mesma habilidade, na questão ilustrada na Fig1, houve uma disparidade nas respostas dos estudantes. Essa disparidade além de indicar uma taxa de erro significativa infere a necessidade de dar mais atenção às habilidades de orientação espacial em nosso sistema educacional. A questão apresentada, mesmo aparentemente simples, que instiga a localização em um mapa, faz parte do cotidiano. É preocupante notar que alunos ingressantes na graduação apresentam uma lacuna significativa no desenvolvimento dessa habilidade que é de essencial importância para atividades do dia a dia e também para conceitos matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

[2] KOZHEVNIKOV, M., HEGARTY, M., & MAYER, R. Students' use of imagery in solving qualitative problems in kinematics. US. ERIC Document Reproduction Service No. ED 433-239, 1999.

[3] MARMOLEJO-AVENIA, G A.; GUZMÁN, L. Y.; INSUATY, A. Introducción a las fracciones en textos escolares de educación básica: ¿figuras representaciones estáticas o dinámicas? **Revista científica**, v. 3, n. 23, p. 43-56, 2015.

[4] RAFI, A., SAMSUDIN, K. A., & SAID, C. S.Training in spatial visualization: The effects of training method and gender. **Journal of Educational Technology & Society**, 11(3), 127–140, 2008.

[5] RAMFUL, A., LOWRIE, T., LOGAN, T. Measurement of Spatial Ability: Construction and Validation of the Spatial Reasoning Instrument for Middle School Students. **Journal of Psychoeducational Assessment**, 35(7), 709-727, 2017.

Problemas enfrentados por alunos do 6° ano no aprendizado de frações: uma solução com base no jogo matemático dominó de frações

Magalhães, Andreza[366]; Thaissa, Debora,[367]; Silva, Fabiane[368] e Monteiro, Fabíola[369]

Resumo: *Este trabalho é uma pesquisa bibliográfica de cunho qualitativa e quantitativa com o objetivo de implementar o jogo matemático Dominó de Frações no campo da fração associado a ideia de razão para auxiliar no aprendizado, na escola municipal de ensino fundamental Antônio Marçal, no município de Inhangapi - PA. Este visa testar a hipótese de que o estudo de frações por meio do jogo facilitará o aprendizado, testado nas turmas do 6° ano, pois requer uma abordagem estruturara e planejada para garantir a eficácia no processo. Espera-se que o processo remeta a importância de testar didáticas inovadoras para o aprendizado de frações, com jogos, aulas mais dinâmicas que possam chamar a atenção do aluno em relação ao assunto e incentivá-lo a querer aprender mais.*

Palavras-chave: *Frações, jogo matemático, didáticas inovadoras, aprendizado.*

INTRODUÇÃO

A compreensão de frações é crucial para o desenvolvimento matemático de alunos do 6° ano. Entretanto, esse conceito costuma se tornar um desafio significativo para muitos estudantes. A habilidade de entender e operar com frações não se resume apenas à aplicação de regras matemáticas, mas também envolve a capacidade de visualizar e associar frações a noções mais amplas, como a ideia de proporção. As frações são fundamentais para outros conceitos matemáticos, contudo seu significado abstrato pode ser difícil de assimilar para alguns alunos. Embora a maioria compreenda os princípios básicos, alguns precisam de exemplos mais concretos para consolidar plenamente essa noção. Uma abordagem diversificada que explora representações visuais e exemplos do mundo real pode ajudar esses estudantes a superarem as dificuldades iniciais com frações. A implementação do jogo "dominó de frações" parece uma ideia viável e simples de fixar na mente dos alunos, o jogo é como se fosse um dominó normal, só que com frações. O jogo funciona da seguinte forma, jogando a primeira peça, a próxima terá se ser uma combinação de uma das duas partes da primeira. Ele trabalha a ideia de fração tanto na escrita quanto na leitura da mesma, caso o jogador fique sem a possibilidade de continuar, ele pode comprar uma nova peça, quando as peças acabarem, este passa a vez.

[366]Universidade Federal do Pará-UFPA. andrezasantosvip39@gmail.com
[367]Universidade Federal do Pará-UFPA. deborathaissa19@gmail.com
[368]Universidade Federal do Pará-UFPA. Fds60434@gmail.com
[369]Universidade Federal do Pará-UFPA. fabiolamonteiro251@gmail.com

"A associação entre razão e fração desempenha um papel fundamental na resolução de problemas matemáticos e na compreensão das relações entre quantidades. É uma habilidade essencial que permite expressar a proporção de uma grandeza em relação a outra, e um dos exemplos mais comuns dessa associação é a fração 2/3. Essa fração representa a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza"

Neste projeto, iremos explorar os limites e desafios de alunos do 6° ano em aprender sobre frações. Investigaremos as dificuldades mais comuns que os alunos enfrentam quando tentam compreender a conexão entre o numerador e o denominador, realizar operações básicas com frações e interpretar e aplicar frações em situações do cotidiano. Este projeto é um recurso atraente e eficiente que auxilia na aprendizagem e na construção do conhecimento sobre o assunto abordado. Espera-se frisar que é possível se divertir e aprender ao mesmo tempo.

Aplicaremos na Escola escolhida com o intuito de aplicar os conceitos básico e desenvolver suas estruturas cognitivas, como a atenção, percepção, memória, raciocínio lógico e linguagem, proporcionando a estes um novo modo de aprendizado. Adicionalmente, examinaremos estratégias educacionais e metodologias que podem ser eficazes em ajudar os alunos a superar esses desafios e desenvolver uma compreensão sólida de frações e proporções. Alguns alunos têm problemas com conceitos básicos, como parte de um todo e igualdade de frações. Outros entendem os conceitos, mas têm dificuldades com cálculos.

METODOLOGIA

Usaremos como metodologia a pesquisa bibliográfica de materiais diversos, um deles (Costa,2021) "' Para testar a hipótese de que é dificuldade residia muito mais na metodologia do que propriamente na dificuldade da matemática em si". Buscar propostas diversas para ajudar no ensino relacionado ao campo das frações era uma ideia para superar estes desafios é importante fornecer o aluno oportunidade para a prática manipulação ativa de materiais concretos além de abordagens visuais e diagramas com isso usaremos como metodologia o jogo matemático dominó das frações. A implementação desse jogo requer uma abordagem estruturada e planejada para que a aprendizagem de cada aluno seja eficaz e eles consigam aprender facilmente o conteúdo.

Esperamos melhorar a qualidade de ensino, a relação escolar e o modo de aprender, fazer com que os alunos tenham vontade de aprender, com uma forma mais didática, torna-se mais acessível o bom entendimento do assunto abordado.

Com isso buscamos também fazer com que os professores se sintam mais próximos aos alunos, assim proporcionando uma melhor experiência professor/aluno. Assim, consequentemente, uma melhor qualidade no ensino e aprendizado de ambos. Cada um tem um papel de extrema importância, tanto o docente quanto o discente, para que o processo de aprendizagem seja mais eficaz.

REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo o artigo DOMINÓ DE FRAÇÕES: uma ferramenta para o ensino de frações de Jean Oliveira da Silva, apresentado no evento matemático Conedu (2019).

Citando o artigo em questão, visa que "O professor tem o papel de protagonista no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que, é ele que tem contato com a criança buscando instigar o educando a querer a aprender. Para que o aluno possa aprender é essencial que os assuntos matemáticos sejam menos formais, pois facilitariam na aprendizagem". A relação professor/aluno é fundamental para o melhor desenvolvimento educacional do aluno, visando que uma boa relação auxilia no comportamento e qualidade de ensino presente em sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] Costa, L. G. ;2021-Campos Belos-GO. Acesso em: `https://repositorio.ifgoiano.edu.br/bitstream/prefix/2149/1/ARTIGO_3_corrigido_2_%281%29%5B1%5D.pdf`

[2] Silva, J.O.S. ; Trindade, A.C. ; Sidney, F.; Saraiva, T.: **Evento Conedu 2019(VI Congresso Nacional de educação)**, acesso em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID14868_02102019214037.pdf

[3] http://www.sbpcnet.org.br/livro/oriximina/resumos/87.htm#:~:text=O%20jogo%20Domin%C3%B3%20de%20Fra%C3%A7%C3%B5es,conhecimento%20sobre%20o%20assunto%20abordado.

[4] https://novaescola.org.br/planos-de-aula/fundamental/6ano/matematica/fracao-como-razao/1034

[5] https://www.canva.com/design/DAFy2uDv-48/CBHGUSW842Y29ZT1_QzAmg/edit?utm_content=DAFy2uDv-48&utm_campaign=designshare&utm_medium=link2&utm_source=sharebuttons, 1996

O grupo fundamental do círculo

Rodrigues, Anna P.[370] e Desideri, Patricia E.

Resumo: *O presente trabalho é uma introdução à Topologia Algébrica, através do estudo de um importante invariante topológico: o Grupo Fundamental. Após a introdução desse conceito, será apresentado o cálculo do grupo fundamental do círculo S^1, com o intuito de demonstrar que este grupo é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.*

Palavras-chave: *Topologia algébrica, homotopia, grupo fundamental, espaços de recobrimento.*

INTRODUÇÃO

Por volta do século XIX, o estudo de uma geometria cujo foco são as propriedades de figuras geométricas que se conservam quando todas as propriedades métricas são eliminadas, deu origem ao que modernamente denominamos Topologia. Assim, a Topologia surgiu no cenário matemático e hoje se situa como uma das áreas de grande importância da Matemática Moderna. Sendo uma área muito ampla, com diversas subáreas, a divisão mais básica é: Topologia Geral, Topologia Algébrica e Topologia Geométrica. Em específico, neste trabalho, será apresentado um conceito muito importante dentro da Topologia Algébrica: o Grupo Fundamental.

A noção de grupo fundamental, conhecida e utilizada atualmente, deve-se ao matemático francês Henri Poincaré (1854-1912). Em Topologia, uma questão basilar é determinar quando dois espaços topológicos são, ou não, homeomorfos. Todavia, não existem métodos específicos para solucionar tal questão, exceto algumas técnicas que podem ser aplicadas em casos particulares. O grupo fundamental surge, então, como uma dessas técnicas. Neste contexto, o objetivo desse trabalho é apresentar um estudo do grupo fundamental e mostrar que o mesmo é um invariante topológico, isto é, se dois espaços topológicos são homeomorfos, então eles possuem o mesmo grupo fundamental. Além disso, após a apresentação de alguns resultados envolvendo Espaços de Recobrimento, mostraremos que o grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo aditivo dos números inteiros.

CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta uma breve introdução à Topologia Algébrica. Inicialmente, são apresentados alguns conceitos de homotopia entre aplicações, destacando-se a homotopia de laços, da qual provém a definição da principal ferramenta deste trabalho: o Grupo Fundamental. Por fim, após estudar alguns conceitos de Espaços de Recobrimento, apresentamos o cálculo do grupo fundamental do círculo S^1. Com esse estudo, podemos perceber que o grupo fundamental oferece uma perspectiva única para a compreensão da estrutura de alguns espaços topológicos. É uma ferramenta algébrica de fundamental importância, que nos auxilia na verificação da equivalência topológica entre dois espaços.

[370]Universidade Federal do Espírito Santo

BIBLIOGRAFIA

[1] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: Atual, 1982.

[2] HATCHER, A. **Algebraic topology**. Cambridge University Press, 2005.

[3] LIMA, E. L. **Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 5ª edição, Rio de Janeiro, 2018.

[4] MUNKRES, J. **Topology**. Pretince Hall, 2000.

[5] STOCCO, R. Z.; EIDAM, J. C. C. **Um Estudo de Espaços Topológicos através de seus Grupos Fundamentais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, 2010.

Integral de Henstock Kurzweil e aplicações

Aryel Kathleen de Araújo Silva[371]

Resumo: *Nesse trabalho, investigaremos o desenvolvimento de determinados tipos de integrais, como a de Henstock-Kurzweil:*

Uma função $f : I \to \mathbb{R}^n$ *é dita Henstock-Kurzweil Integrável em* I *se existir um vetor* $B \in \mathbb{R}^n$ *de modo que para todo* $\epsilon > 0$, *existe um calibre* γ_ϵ *em* I *que nos garante que se* $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ *for qualquer partição marcada de* I *tal que* $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$ *for* $i = 1, ..., n$, *então*

$$||S(f; \dot{P}) - B|| \leq \epsilon$$

O modelo proposto por Henstock teve início a partir da investigação de um processo de integração com o objetivo de reconstruir uma função derivada, e é responsável por abranger uma classe mais ampla de funções do que aquelas presentes nos modelos de Riemann e Lebesgue, sem a necessidade de trabalhar com teoria da medida, como para funções Lebesgue Integráveis. Ao mesmo tempo, mas completamente independente, Jaroslav Kurzweil introduziu em 1957 um conceito equivalente de integração para investigar resultados de dependência contínua.

Esse tipo de integração naturalmente presta mais atenção às marcações do que o conceito de integração mais tradicional, então, a definição é construída permitindo que o $\gamma_\epsilon > 0$, *usado na definição da integral de Riemann, seja qualquer função positiva, o que permite uma classe mais ampla de funções ser integrável.*

Usando esse tipo de integral, é possível estudar muitos problemas importantes em física com comportamento altamente oscilante, como o pêndulo de Kapitza.

Palavras-chave: *Funções calibre, integral de Riemann, integral de Henstock-Kurzweil, integral de Riemann generalizada.*

INTRODUÇÃO

O conceito de integral surge da tentativa de calcular áreas e volumes de figuras e uma das técnicas empregadas é justamente aproximação por figuras conhecidas. Depois, com o passar dos anos, percebe-se que o processo de integração também possui forte ligação com a derivada.

Seu desenvolvimento passa por Riemann, na década de 1850, que separa tais conceitos novamente utilizando limites e somatórios, e equivale ao conceito apresentado por Darboux, quando estamos trabalhando com funções limitadas, que utiliza o conceito sobre integrais superiores e inferiores de uma função limitada em

[371] A.K.A.Silva@mat.unb.br; Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

um intervalo. Assim, ao considerar todas as funções em um intervalo onde o processo de integração poderia ser definido, temos que:

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita *Riemann-Integrável* em I se existir um número $A \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe um $\gamma_\epsilon > 0$, de modo que se $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ é toda partição rotulada de I, onde $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$, com $i = 1, ..., n$, então temos

$$|S(f; \dot{P}) - A| \leq \epsilon$$

Já no começo do século XX, Lebesgue propõe um novo conceito de integral, mais geral e que podia integrar uma quantidade maior de funções, o qual resolve vários problemas relativos às integrais, como o problema da validade do Teorema Fundamental do Cálculo, uma vez que segundo Lebesgue, para que o teorema fundamental seja válido, é necessário que a função possua derivada limitada. A partir daí foi natural o questionamento sobre um novo conceito de integral, onde se f é integrável e derivável segundo tal conceito, então sua derivada f' também é, e vale o Teorema Fundamental. O desenvolvimento desse problema dá origem à Integral Generalizada de Riemann, ou Integral de Henstock-Kurzweil, fruto de estudo nesse trabalho, que apresenta uma formulação mais simples e geral que a Integral de Lebesgue.

Resultados

A integral de Henstock-Kurzweil naturalmente se atenta mais às marcações do que os modelos mais tradicionais de integração, assim, tal conceito é construído permitindo que o $\gamma_\epsilon > 0$ utilizado na definição de Riemann seja qualquer função positiva, isso permite que uma classe mais ampla de funções possa ser integrável. Tal $\gamma_\epsilon > 0$ é chamado *Calibre*, e temos as seguintes definições que podem ser encontradas em [1]:

Definição 1

Se $I : [a, b] \subset \mathbb{R}$, a função $\delta : I \to \mathbb{R}$ é calibre em I_s e $\delta(t) > 0$, para todo $t \in I$. O intervalo ao redor de $t \in I$ é controlado pelo calibre δ no intervalo:

$$B[t, \delta(t)] := [t - \delta(t), t + \delta(t)]$$

Definição 2

Se $I \subset [a, b]$ é um intervalo e $\dot{\mathrm{P}}= \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ uma subpartição marcada. Se δ for calibre em I, $\dot{\mathrm{P}}$ é δ-fino; então para todo i=1,...,n:

$$I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$$

A partir daí, ao considerar as definições de função calibre, temos que a Integral de Henstock-Kurzweil é dada pela definição a seguir:

Definição 3

Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita Henstock-Kurzweil-Integrável em I se existir um número $B \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\epsilon > 0$, existe uma função calibre γ_ϵ de I, de modo que se $\dot{P} := (I_i, t_i)_{i=1}^n$ é toda partição marcada de I, onde $l(I_i) < \gamma_\epsilon(t_i)$, com $i = 1, ..., n$, então temos

$$|S(f; \dot{P}) - B| \leq \epsilon$$

A existência da função calibre na definição da integral de Henstock-Kurzweil motiva sua generalidade, e é a principal diferença em relação à integral de Riemann.

CONCLUSÕES

Os avanços realizados na teoria da integração se deram às tentativas de generalizar o conceito de integral abordado por Riemann e Lebesgue, assim, enquanto alguns métodos utilizaram-se do conceito da integral de Lebesgue como caso particular, Henstock partiu da investigação de um processo de integração com o objetivo de reconstruir a função utilizando a derivada, utilizando os conceitos de Riemann e Darboux, processo ao qual nomeamos Integral de Henstock-Kurzweil, ou Integral de Riemann Generalizada, responsável por abranger uma classe de funções mais amplas que as de Riemann e Lebesgue, sem a necessidade de se trabalhar com teoria de medida, como se faz necessário nas funções Lebesgue-Integráveis.

Neste projeto, o foco foi o estudo da Integral de Henstock-Kurzweil, conhecida também como nova teoria da integração, bem como suas propriedades e especificações para o Teorema Fundamental do Cálculo, partindo de modelos de integração diferenciados, como a Integral de Riemann.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARTLE, R. G. A Modern Theory of Integration. American Mathematical Society, 2001.

A torre de Monty Hall:

Uma abordagem lúdica para ensinar o conceito de eventos independentes.

de Faria, Beatriz[372]; Possebon, Vanessa Aparecida de Rezende[373] e Grisi, Rafael de Mattos[374]

Resumo: *Neste trabalho, discutimos uma proposta alternativa para exposição do problema de Monty Hall como uma ação extensionista, realizada dentro do projeto MatematiZou. Apresentamos uma versão "gameficada" do problema original, estimulando a compreensão do conceito de eventos dependentes.*

Palavras-chave: *Probabilidade, educação, Monty Hall.*

INTRODUÇÃO

O problema de Monty Hall originalmente proposto por [1], consiste em uma sala com três portas e um prêmio, aleatoriamente atribuído a uma das portas. Um indivíduo deve escolher entre uma das três portas (com objetivo de escolher a porta premiada), ao selecionar uma das portas, uma das portas não selecionadas é aberta revelando que não há um premio nesta porta. Nesse momento o indivíduo é confrontado com mais uma decisão: trocar ou não a porta originalmente escolhida.

As pessoas, em geral, assumem que os eventos do problema de Monty Hall são independentes, o que as leva a acreditar que não fará diferença trocar ou não a porta originalmente escolhida [2]. Entretanto, a solução para o problema, por muitos considerada contra-intuitiva mostra que há, de fato, dependência entre os eventos e a estratégia correta para maximizar a chance de ganhar o prêmio seria trocar de porta.

Devido ao comportamento contra-intuitivo do problema de Monty Hall, é comum que ele seja utilizado por professores para ensinar conceitos probabilísticos como independência e probabilidade condicional. Contudo, para compreender a diferença entre a adoção da estratégia vencedora em relação às demais, é necessário que o problema de Monty Hall seja repetido várias vezes, tornando suas abordagens em sala de aula monótonas aos alunos [3].

Abordagem Alternativa do Problema de Monty Hall

O MatematiZou é um projeto de extensão da Universidade Federal do ABC que visa apresentar atividades físicas e virtuais capazes de transmitir ideias abstratas bem como conectá-las a situações do mundo real, o que auxilia na promoção do processo de aprendizagem de forma mais dinâmica. Dentro desse projeto, propomos um jogo virtual nomeado "A torre de Monty Hall", onde unimos o prolema de Monty Hall à outro problema clássico de probabilidade, popularmente conhecido como a "Ruína do Jogador" [4].

O problema da Ruína do Jogador resume-se em dois apostadores A e B que repetem um experimento probabilístico fazendo apostas a cada rodada. Nessas rodadas, o jogador A tem uma probabilidade fixa p de

[372]Universidade Federal do ABC
[373]Universidade Federal do ABC
[374]Universidade Federal do ABC

ganhar o experimento e o jogador B tem probabilidade $1 - p$, isto é, não há empate. O jogo acaba somente quando um deles perca todo o dinheiro com o qual começou.

Na versão que propomos do problema de Monty Hall, o jogador é confrontado com uma versão do problema de Monty Hall em cada andar, onde, em duas das três portas há uma escada para o próximo andar e na porta remanescente há uma escada para o andar anterior. Quando o jogador escolhe uma porta, uma porta não escolhida é aberta revelando uma escada para o próximo andar e o jogador precisa decidir se vai trocar ou não de porta (para a porta que não foi revelada). O último andar da torre contém um prêmio, por outro lado, se o jogador descer até o andar 0, o jogo acaba e o jogador perde.

Deste modo, identificamos o jogador como sendo um apostador A que joga contra o computador (apostador B). A cada andar, a probabilidade de um jogador que adota a estratégia correta consiga encontrar a porta certa é de aproximadamente $0,666$. Fixando o valor $p = 0,666$, variamos o andar de início do jogo e o total de andares na torre conseguimos controlar tanto probabilidade de vitória e derrota para diferentes estratégias, quanto o tempo médio de jogo.

Encontramos que, se o jogo começar pelo terceiro andar e a torre possuir 7 andares, então a probabilidade de derrota para um jogador que adota a estratégia vencedora (manter sua porta) é de $0,097$, enquanto, para um jogador que adota uma estratégia de sempre trocar a porta é de $0,950$.

Nesta abordagem, o jogador repete várias vezes o experimento de Monty Hall de forma dinâmica permitindo que ele perceba que, de fato, há diferença entre a adoção de diferentes estratégias. Facilitando a compreensão de que os eventos envolvidos no jogo são dependentes permitindo que o professor (ou expositor do jogo) explique o conceito de independência de forma lúdica.

BIBLIOGRAFIA

[1] SELVIN, S. **A problem in probability.** American Statistician, 1975.

[2] SAENEN, L; HEYVAERT, M; VAN DOOREN, W; SCHAEKEN, W; ONGHENA, P. **Why Humans Fail in Solving the Monty Hall Dilemma: A Systematic Review.** Psychol Belg, 2018.

[3] BATANERO, C.; CONTRERAS, J.M.; DÍAS, C., CAÑADAS, G.R. **Preparing teachers to teach conditional probability: a didactic situation based on the Monty Hall problem**. In: Wassong, T., Frischemeier, D., Fischer, P., Hochmuth, R., Bender, P. (eds) Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014.

[4] Edwards, A. W. F. **Pascal's Problem: The "Gambler"s Ruin'.** International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique, 1983.

A distribuição Beta reparametrizada para batalhas nos *stories* Instagram[375]

MARTINS, Beatriz[376]; MARTINS, Maria Eduarda[2]; VALADARES, Fernanda[377] e FERREIRA, Eric[378]

Resumo: *As batalhas nos stories são uma trend do Instagram e foram modeladas por Valadares (2024) utilizando a distribuição Beta de probabilidades. O presente trabalho traz algumas consequências teóricas da reparametrização proposta por Valadares.*

Palavras-chave: *Distribuição de probabilidade, momentos populacionais, redes sociais.*

INTRODUÇÃO

As redes sociais são, hoje, os principais meios de comunicação e informação da sociedade, pois apresentam alto poder de disseminação e um potencial "viral", proporcionado pela instantaneidade e interatividade que alcança uma infinidade de públicos [1]. Em particular, o Instagram, do grupo Meta, apresenta novas possibilidades de abordagem da informação.Desde seu lançamento em 2010, o Instagram alcançou uma posição de destaque, tornando-se uma das redes sociais mais populares globalmente, sendo um dos aplicativos mais utilizados. Ele facilita a conexão entre pessoas de diferentes partes do mundo, tornando-se uma rede cada vez mais interativa e subjetiva [2].

Uma das crescentes tendências nos *stories* são as batalhas. Seguindo um esquema de chaveamento - aleatorizado por sorteio - competidores são colocados para duelar (dois a dois) utilizando-se a ferramente "enquete". Dessa forma, oponentes apresentados em figuras lado a lado, os seguidores daquela conta são convidados a votar no seu preferido [3]. Dessa forma, é possível captar a opinião dos seguidores, ao eleger o campeão de um campeonato, o segundo colocado, dois terceiros colocados, quatro quartos colocados, e assim por diante. O problema é que esse agrupamento gerado é fruto de apenas uma amostra e carece de procedimentos inferenciais adequados para computar a incerteza existente, compreendendo um campeonato como uma amostra de uma população conceitual de infinitos campeonatos semelhantes.

Para sanar este problema, Valadares (2024) propôs uma reparametrização da distribuição Beta ao vincular seus parâmetros para terem soma constante igual a 10 e, dessa forma, propiciou interpretação prática das estimativas dos parâmetros na escala hedônica, que indica o grau de aceitabilidade por parte dos consumidores [4].

A distribuição Beta é uma distribuição de probabilidade contínua com intervalo [0,1], onde seus parâmetros (positivos) α e β são responsáveis pela forma da distribuição [5]. Compreender os métodos de estimativa dos parâmetros α e β é essencial para a aplicação da distribuição Beta em diferentes contextos. No entanto, em seu trabalho, Valadares (2024) não detalhou quais seriam as consequências dessa reparametrização, que transforma a distribuição Beta de bi paramétrica em uniparamétrica. Dessa forma, este trabalho tem o objetivo de demonstrar essas consequências, em termos de função densidade de probabilidade, distribuição acumulada e momentos populacionais.

[375]Este trabalho foi apoiado pela FAPEMIG.

[376]Graduanda em Matemática Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas.

[377]Mestre em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Alfenas.

[378]Professor do Departamento de Estatística, Universidade Federal de Alfenas.

METODOLOGIA

Valadares (2024) traz o conceito de *força restrita* de um competidor, em intervalo fechado. Na modelagem proposta, a força de cada um dos dois oponentes em uma batalha é entendida como um dos dois parâmetros da distribuição Beta(a,b):

$$f(X|\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} X^{\alpha-1}(1-X)^{\beta-1}$$

Em uma distribuição Beta(a,b) regular, temos que $0 < a, b < \infty$, mas aqui, restringiu-se o espaço paramétrico para $1 \le a, b \le 9$, em analogia à escala hedônica de 9 pontos. Além disso, Valadares (2024) estipulou um vínculo entre os parâmetros (entre as forças dos oponentes). a+b = N, em que $N \in \mathbb{R}_+$ é um a constante arbitrária (aqui assumida como N=10), e $1 \le a, b \le N-1$.

Foi feita uma abordagem teórica para obter algebricamente as consequências da reparametrização proposta por Valadares (2024) e os gráficos decorrentes foram construídos no software R [6].

RESULTADOS

Com a reparametrização de Valadares (2024), temos que $\alpha = \alpha$ e $\beta = 10 - \alpha$. Assim, temos que sua função pode ser reescrita como:

$$f(X|\alpha) = \frac{362880}{\Gamma(\alpha)\Gamma(10-\alpha)} X^{\alpha-1}(1-X)^{9-\alpha} \tag{56}$$

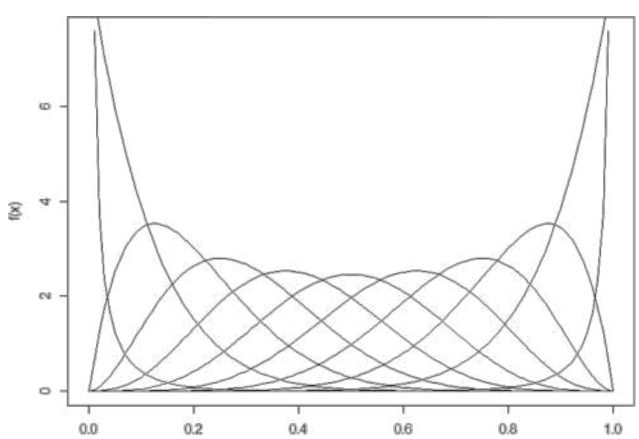
É possível demonstrar que essa é uma função densidade de probabilidade, pois integra 1.

A função de probabilidade acumulada (função distribuição) fica:

$$F(x,\alpha,10-\alpha) = \frac{B(x;\alpha,10-\alpha)}{B(\alpha,10-\alpha)}, \tag{57}$$

com comportamento sigmóide, como pode ser visto na Figura 120.

Fig. 120: Função probabilidade acumulada da distribuição Beta uniparamétrica



Fonte: Dos autores.

A esperança, a moda e a variância da variável Beta podem ser reescritas como:

$$E(X) = \frac{\alpha}{10}, \qquad Var[X] = \frac{10\alpha - \alpha^2}{1100}, \qquad Mo = \frac{2\alpha - 10}{8}. \tag{58}$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Podemos concluir que a partir da distribuição de forma uniparamétrica que foi descrita no trabalho, para um desempenho melhor podemos avançar para o próximo passo, que consiste em obter os estimadores restritos utilizando os métodos dos momentos, que no caso seria a máxima verossimilhança, máxima verossimilhança ponderada e distância mínima, assim realizaremos a implementação no software [6] e no futuro próximo haverá a disponibilização de forma gratuita aos interessados.

BIBLIOGRAFIA

[1] CARNEIRO, João Pedro e VILLAS, Marcos Boas. Cheetos Brasil no Instagram: O uso do seu mascote como porta-voz da marca **Caderno de Estudos em Publicidade e Jornalismo**, v. 1, n. 1, 2022.

[2] RAMOS, Penha Elida Ghiotto Tuão e de Oliveira Martins, Analice. Reflexões sobre a rede social Instagram: do aplicativo à textualidade **Texto Digital**, v. 14, n. 2, 2018.

[3] FERREIRA, E. B.; VALADARES, F. L.; SILVA, C. P.. Battle of cheeses: Tournament via Instagram stories **Sigmae**, v. 12, n. 1, p. 108-115, 2023.

[4] VALADARES, Fernanda Lara. Modelagem de chaveamentos no Instagram via distribuição Beta e inferência bootstrap **https://www.unifal-mg.edu.br/ppgeab/dissertacoes/**, 2024.

[5] MANCHINI, Carlos Eduardo Frantz and PORTELLA, Luan and BAYER, Fábio Mariano. Estimação Robusta dos parâmetros da distribuição Beta. **https://coffeescience.ufla.br/index.php/BBJ/article/view/404**, v. 37, n. 3, p. 350–371, 2019.

[6] R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing. **https://www.R-project.org/**, 2023.

Máscaras africanas, geometria e simetrias

Elementos Culturais Africanos e Ensino de Matemática

Rocha, Bruna[379]; Santana, Naiara[380] e Soares, Luis Carlos[381]

Resumo: *Neste pôster vamos apresentar o relato da experiência de criar e aplicar uma oficina de máscaras africanas em aulas de matemática. Esta atividade foi desenvolvida na disciplina de extensão Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática, em 2023.2, no curso de licenciatura em Matemática da UFBA. Na disciplina montamos uma equipe e após analisar diferentes elementos culturais africanos decidimos criar uma oficina de Máscaras africanas para o ensino de Geometria e Simetrias, no contexto da Lei 10639/03, a ser aplicada em aulas de matemática do Ensino Fundamental II, para isso utilizamos máscaras de diferentes etnias africanas. Após a elaboração e organização do material aplicamos esta oficina em três escolas públicas da região metropolitana de Salvador. Neste trabalho pretendemos descrever os passos para a construção da oficina e alguns problemas de geometria e simetria que podemos abordar com as máscaras.*

Palavras-chave: *Máscara africanas, geometria, simetrias, escolas públicas.*

INTRODUÇÃO

No semestre letivo 2023.2 da UFBA nós cursamos a disciplina de extensão Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática, ministrada pela professora Simone Moraes. Tivemos o desafio de pensar, organizar, criar e aplicar uma oficina para aulas de Matemática do Ensino Fundamental II utilizando elementos culturais africanos.

Optamos por incorporar a rica herança das máscaras africanas, reconhecendo sua fascinante história. Após analisar material bibliográfico sobre máscaras africanas constatamos que há uma grande variedade de máscaras, de diferentes culturas.

Assim, decidimos trabalhar com máscaras de diferentes regiões e tradições africanas, a saber, as máscaras do povo Grebo, da Costa do Marfim; a feminina do povo Tchokwe, de Angola, as do povo Bwa, de Burkina Faso, além das femininas dos povos Punu e Biombo, do Gabão e da Republica Democrática do Congo, respectivamente.

Passando à organização da oficina, preliminarmente produzimos um seminário que apresentamos na aula para mostrar à professora e aos colegas o que pretendíamos fazer na oficina, nesta atividade recebemos sugestões que incorporamos à oficina.

Em seguida passamos a organização dos materiais, planejamento da oficina, e finalmente a aplicação da oficina nas escolas, mesclando arte e matemática, incentivamos a criatividade e o aprendizado prático

[379]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia
[380]Licenciada em Matemática da Universidade Federal da Bahia
[381]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia

dos alunos. Em todas as aplicações da oficina a atividade culminou em um desfile emocionante, em que as máscaras de cada estudantes contavam um pouco de suas histórias.

Após a aplicação nas escolas tivemos um momento para passar aos colegas da disciplina nossas impressões e considerações.

Conhecendo Máscaras Africanas

As máscaras africanas são elementos culturais de extrema importância para os diversos povos de África. São muitos os tipos, significados, usos e materiais que compõem essas peças, sendo que um mesmo povo pode ter várias máscaras diferentes. Apesar de serem reconhecidas como objetos artísticos, as máscaras africanas, na realidade, representam muito mais do que meros adereços para as populações que as utilizam. Elas são símbolos ritualísticos que têm o poder de aproximar as pessoas da espiritualidade.

Essas peças são produzidas como instrumentos essenciais em diversos ritos, como rituais de iniciação, nascimentos, funerais, celebrações, casamentos, curas de doentes e outras ocasiões importantes.

Por exemplo, a máscara Biombo, utilizada em rituais tribais e de circuncisão, geralmente são vermelhas; o povo Grebo tem máscaras femininas e masculinas, as feições das primeiras são mais suaves, harmoniosas e serenas, enquanto que as masculinas têm formas geométricas reconhecidas por seus narizes longos emoldurados por um, dois ou mais pares de olhos tubulares protuberantes; já as máscaras femininas do povo Tchokwe carregam desenhos na face que representam as escarificações e tatuagens tradicionais do povo; as máscaras do povo Bwa simbolizam instrumentos de conexão entre o universo selvagem e o universo social, fazendo uso de padrões geométricos; as máscaras do povo Punu representam rostos de mulheres, utilizadas em funerais e rituais mágicos, representando uma imagem idealizada dos ancestrais e as máscaras do povo Baga representam a beleza feminina nos seios e em cicatrizes no rosto.

Fig. 121: Máscaras Africanas – máscara Biombo, máscara Grebo, máscara do povo Tchokwe, máscara Bwa e máscara do povo Baga. Fonte: https://www.significados.com.br/mascaras-africanas/ e https://www.todamateria.com.br/mascaras-africanas.

Oficina Geometrias e Simetria em Máscaras Africanas

Nesta oficina o objetivo de permitir aos alunos conhecer e explorar a rica cultura das máscaras africanas enquanto aplicavam conceitos de geometria e simetria na criação de suas próprias máscaras. Além disso, nos propomos tivemos a fomentar a apreciação da arte africana e sua relação com elementos matemáticos, destacar a interconexão entre culturas e disciplinas educacionais, promover a colaboração e o trabalho em equipe entre os alunos e incentivar a exploração criativa e a aplicação de conceitos de simetria e construções geométricas durante a criação das máscaras. Na aplicação da atividade utilizamos a seguinte metodologia:

1.o Passo: Introdução dos conceitos básicos de geometria – Apresentamos triângulos, retângulos, quadrados, polígonos e outras formas geométricas, algumas de suas propriedades, como quantidade de lados, ângulos e simetria.

Fig. 122: Formas geométricas planas. Fonte: https://www.preparaenem.com/matematica/formas-geometricas.htm.

2.o Passo: Exploração das máscaras africanas – Entregamos a eles seis máscaras africanas que tínhamos confeccionado anteriormente, pedimos que observassem e destacamos algumas características que as distinguiam, assim como elementos geométricos presentes na estrutura de cada uma.

3.o Passo: Criação de máscaras - Os alunos escolheram um molde geométrico para produzir a máscara, em seguida deveriam utilizar os materiais disponibilizados para confeccionar quadrados, triângulos e outras formas geométricas para criar suas próprias máscaras africanas, nesta confecção questionamos se haviam formas semelhantes. Eles experimentaram diferentes combinações de formas para expressar sua criatividade.

4.o Passo: Ênfase na simetria e equilíbrio: Durante o processo de criação, incentivamos os alunos a utilizarem simetrias e que fizessem a distribuição das formas geométricas de maneira equilibrada em suas máscaras. Isso ajudou a promover uma estética harmoniosa e coesa em seus designs.

Fig. 123: Oficina de máscaras africanas na Escola Municipal Santa Rita e no Centro Educacional Maria Quitéria. Fonte: Acervo dos autores.

CONCLUSÃO

A experiência de criar e aplicar a Oficina Máscaras Africanas, Geometria e Simetrias nos permitiu unir arte e matemática, mais do que uma simples lição, vivenciamos uma jornada de descoberta, tanto em nós, ao conhecer as máscaras e analisar quais seriam mais interessantes para levar à sala de aula com o propósito de trabalhar geometria e simetrias, como pelos alunos, que na confecção das máscaras, se viram incentivados a expressar suas impressões individuais, das histórias contadas e as máscaras apresentadas.

Além disso, ao conectar elementos culturais africanos e matemática elaboramos uma atividade no contexto da Lei 10.639/03, um desafio para o professor de matemática.

Esperamos que as máscaras africanas criadas pelos alunos sirvam como símbolos de inspiração, recordando que, através da educação e da imaginação, podem transcender fronteiras e dar vida a novos horizontes de compreensão e apreciação.

BIBLIOGRAFIA

[1] Oliveira, F. P.; **Inserindo a cultura africana nas aulas de Matemática: um estudo com alunos de 6o ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Betim (MG)**, UFOP, Ouro Preto,

2014.

[2] Forde, G. H. A., **A presença Africana no Ensino de Matemática:análises dialogadas entre História, Etnocentrismo e Educação**,,Dissertação de Mestrado, UFES, Vitória, 2008.

[3] **ENCICLOPÉDIA DE SIGNIFICADOS, Máscaras africanas: o que são, tipos e significados**, disponível em: https://www.significados.com.br/mascaras-africanas/. Acesso em:10/10/2023.

[4] Aidar, L., **Máscaras africanas: importância e significados**, Toda Matéria, disponível em https://www.todamateria.com.br/mascaras-africanas/

Teorema fundamental da álgebra via grupo fundamental do círculo

Boni, Bruno G.[382]; Mortari, Fernando de L.[383]

Resumo: *O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não-constante com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Neste trabalho, provamos o teorema de uma forma clássica, mas que foge do escopo do enunciado. Demonstramos via resultados e conceitos topológicos como: continuidade, caminhos, homotopia de caminhos, grupo fundamental e espaços de recobrimento.*

Palavras-chave: *Teorema fundamental da álgebra, homotopia, grupo fundamental, espaços de recobrimento.*

INTRODUÇÃO

O Teorema Fundamental da Álgebra diz que todo polinômio não-constante com coeficientes em $\mathbb{C}$ possui uma raiz em $\mathbb{C}$. A primeira menção do teorema foi feita por Peter Roth em 1608. A primeira tentativa de prová-lo foi feita por D'Alembert em 1746. Porém, a prova continha algumas falhas. Sua primeira demonstração, plenamente satisfatória, foi apresentada na tese de doutorado do matemático Carl Friedrich Gauss em 1797 quando tinha apenas 20 anos ([3]).

Todas as demonstrações conhecidas para esse resultado transcendem significativamente a Matemática necessária para enuncia-lo. Uma tradicional prova do teorema é feita em teoria de Variável Complexa via Teorema de Liouville ([2]).

O objetivo aqui é demonstrar o teorema com outro método clássico que foge do escopo do enunciado, usando conceitos algébricos como grupos, bem como conceitos topológicos como caminhos, homotopia, espaços conexos por caminhos, espaços simplesmente conexos, grupo fundamental e espaços de recobrimento. Para saber mais sobre esses conceitos ver, por exemplo, [1], [4] e [5].

CAMINHOS, HOMOTOPIA E GRUPO FUNDAMENTAL

Um **caminho** sobre um espaço topológico X é uma função contínua $f : I \longrightarrow X$ em que I é o intervalo unitário $[0, 1]$. Dois caminhos f e g são ditos **homotópicos** se existe uma **homotopia de caminhos** entre eles, isto é, uma função contínua $H : I \times I \longrightarrow X$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $H(s, 0) = f(s)$ para qualquer $s \in I$ e $H(s, 1) = g(s)$ para qualquer $s \in I$.
2. Os pontos iniciais e finais $H(0, t) = x_0$ e $H(1, t) = x_1$ são independentes de t;

[382]Este autor foi apoiado por PET Matemática UFSC
[383]Este autor foi apoiado por Departamento de Matemática UFSC

Prova-se que a relação de homotopia de caminhos sobre qualquer espaço topológico é uma relação de equivalência no conjunto dos caminhos sobre esse espaço. A classe de equivalência de um caminho f sob a relação de homotopia de caminhos é denotada $[f]$ e chamada de **classe de homotopia** de f.

Definimos o produto de caminhos f e g com $f(1) = g(0)$ como sendo o caminho denotado por $f \cdot g$ e dado por

$$(f \cdot g)(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Definimos também o **produto de** duas **classes de homotopia** por $[f][g] = [f \cdot g]$. Além disso, chamamos de **laços** os caminhos fechados, isto é, que possuem o ponto final igual ao ponto inicial. O conjunto de todas as classes de homotopia $[f]$ dos laços que começam e terminam em um mesmo $x_0 \in X$ é denotado $\pi_1(X, x_0)$.

$\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com respeito ao produto de classes de homotopia. Tal grupo é chamado de **grupo fundamental** de X. O espaço topológico que nos interessa é o círculo unitário $(\mathbb{S}^1)$. Denotemos $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ por $\pi_1(\mathbb{S}^1)$. Usando conceitos como **espaços conexos por caminhos**, **espaços simplesmente conexos**, **espaços de recobrimento** e **levantamento de caminhos**, prova-se que o grupo fundamental do círculo é isomorfo ao grupo aditivo dos inteiros $(\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z})$. O isomorfismo manda um inteiro n na classe de homotopia do laço $w_n(s) = e^{2\pi i n s}$, que é um laço que dá $|n|$ voltas no círculo no sentido horário ou anti-horário conforme n seja negativo ou positivo respectivamente. Portanto, compor laços no círculo unitário é, a menos de isomorfismo, a mesma coisa que somar números inteiros.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Apesar de Topologia Algébrica ser normalmente "Álgebra servindo a Topologia", as regras se invertem na demonstração do teorema. Ilustraremos uma ideia para a demonstração com um polinômio especifico.

Ideia da demonstração: Considere o polinômio $p(z) = z^5 - 2z^4 + iz^3 + -z^2 + \frac{i}{2}$. Suponha por absurdo que $p(z)$ não possui raízes em $\mathbb{C}$. Para cada r real positivo, considere o laço $\xi_r : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $\xi_r(s) = re^{2\pi i s}$ que descreve uma volta no sentido anti-horário no círculo com raio r e centro na origem de $\mathbb{C}$. A composição $p \circ \xi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ é um laço sobre $\mathbb{C}$ cuja imagem é a imagem da restrição de p ao círculo com raio r e centro na origem. Esse laço começa e termina em $p(r)$. Para obtermos um novo laço baseado em 1, dividimos a composição por $p(r)$ (podemos fazê-lo pois $p(r) \neq 0$). Para conseguirmos um laço no círculo unitário, normalizamos o nosso laço, dividindo pelo seu módulo, obtendo a fórmula

$$f_r(s) = \frac{(p \circ \xi_r)(s)/p(r)}{|(p \circ \xi_r)(s)/p(r)|} = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|}$$

que define, de fato, um laço no círculo unitário $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ baseado em 1. Conforme r varia, f_r é uma homotopia de laços baseados em 1. Uma vez que $f_0(s)=1\ \forall s \in I$, concluímos, pelo teorema do isomorfismo $(\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathbb{S}^1))$, que $[f_r] \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$ é zero em $\mathbb{Z}$ para todo r, pois o elemento neutro do grupo fundamental é a classe de homotopia dos laços constantes.

Usando que o termo z^5 do polinômio $p(z)$ domina o resto do polinômio quando $|z|$ é muito grande, é possivel mostrar que, para r muito grande, tem-se que f_r é homotópico ao laço w_5.

w_5 é um laço que dá cinco voltas no círculo, enquanto f_r é um laço que dá zero voltas. Pelo teorema do isomorfismo entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ e $\mathbb{Z}$, temos que $0 = [f_r] = [w_5] = 5$, o que é um absurdo de modo que o polinômio $p(z) = z^5 - 2z^4 + iz^3 + -z^2 + \frac{i}{2}$ possui raízes em $\mathbb{C}$. Essa demonstração pode ser generalizada para um polinômio não constante com coeficientes complexos qualquer.

CONCLUSÕES

Essa pesquisa evidenciou que o Teorema Fundamental da Álgebra ultrapassa, e muito, as fronteiras da Álgebra na forma como se pensava a área na época em que o teorema foi enunciado. Também temos a chance de perceber como duas grandes áreas da Matemática podem estar relacionadas e admirar a beleza disso no processo. Um belo problema com uma bela solução.

BIBLIOGRAFIA

[1] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2001.

[2] NETO, A.L. **Funções de uma variável complexa**. Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[3] FINE, B.; ROSENBERGER, G. **The Fundamental Theorem of Algebra**. Springer, 1997.

[4] MARTINS, S.T.; TENGAN, E. **Álgebra Exemplar: um estudo de álgebra através de exemplos**. Projeto Euclides, IMPA, 2020.

[5] KÜHLKAMP, N. **Introdução à Topologia Geral**. Terceira edição, Editora UFSC, 2016.

Utilizando jogo online no ensino de figuras geométricas espaciais

Damasceno, Cailan[384]; Sales, Camila[385]; Teixeira, Hellen[386] e Messias, Maria Alice[387]

Resumo: *Este trabalho aborda a utilização de jogos digitais, como recurso didático, nas aulas de Matemática e analisa os benefícios dessa proposta a partir de uma experiência vivenciada pelos graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará (UFPA), Campus Salinópolis. Esta atividade foi desenvolvida com estudantes do 9ºano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual do referido município. A metodologia utilizada foi o jogo online "Perseguição em Labirinto", disponível na plataforma digital Wordwall, sobre o assunto de Figuras Geométricas Espaciais. Nesse âmbito, destaca-se que os resultados obtidos através dessa experiência, mostram que a interação do aluno com os jogos digitais pode provocar a aproximação do pensar e produzir conhecimento sobre o assunto matemático e assim, configura-se como uma importante ferramenta no Ensino e Aprendizagem de Matemática.*

Palavras-chave: *Jogos digitais, ensino e aprendizagem de matemática, figuras geométricas espaciais.*

INTRODUÇÃO

Na atualidade, o Ensino e a Aprendizagem de Matemática no âmbito do Ensino Fundamental têm se tornado desafiador, uma vez que a forma como se apresenta o conteúdo aos alunos pode originar a disponibilidade ou não para aprender. Para Machado e Mendes (2013), com o auxílio das tecnologias o professor observa como os alunos se relacionam com a informação, como aprendem ou como usam suas habilidades e pensamento crítico. Deste modo, temos que as Tecnologias Digitais também constituem como ferramenta de avaliação das habilidades adquiridas pelos estudantes na aprendizagem de determinado conceito matemático. Sob esse viés, esta pesquisa busca ressaltar a importância do uso das tecnologias como suporte metodológico no processo de Ensino e Aprendizagem, com o intuito de garantir uma proximidade do aluno com o conteúdo e, assim, promover a socialização de pensamentos, raciocínio lógico, troca de ideias, entre outros. Partindo desse pressuposto, este trabalho foi realizado a partir de uma vivência dos graduandos com alunos de uma escola estadual do município de Salinópolis, no Pará, na qual foi realizado aulas e demonstrações de matemática com enfoque no assunto de figuras geométricas espaciais utilizando recursos didáticos e tecnológicos, com o objetivo de promover aos alunos a aprendizagem do assunto de forma lúdica.

Embora o conteúdo de geometria espacial pareça simples de ser ministrado por professores de matemática e de fácil compreensão para os alunos, faz-se necessário o uso de propostas que possam viabilizar a

[384]Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis. Discente da Faculdade de Matemática.
[385]Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis. Discente da Faculdade de Matemática.
[386]Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis. Discente da Faculdade de Matemática.
[387]Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis. Professora Adjunta da Faculdade de Matemática.

aprendizagem de geometria espacial. A Base Nacional Comum curricular (BNCC) propõe que o ensino de matemática aconteça com a utilização de aplicativos e jogos, podendo ser digitais ou não, de modo que o estudante possa analisar os mais diversos tipos de representações e identificar características fundamentais, com o apoio de tecnologias digitais (BRASIL,2018).

CONSIDERAÇÕES METODOLÓGICAS

Segundo Peixoto e Araújo (2012), o computador é entendido como uma ferramenta pedagógica responsável por melhorar a qualidade e otimizar o processo de ensino-aprendizagem. Nesse entendimento, o trabalho foi projetado através da experiência dos graduandos ao realizarem uma aula expositiva utilizando como metodologia jogos online no computador sobre o assunto de figuras geométricas espaciais aos alunos de uma escola estadual de Salinópolis, no Pará. O jogo disposto foi o da plataforma online Wordwall, intitulado "perseguição em labirinto", que consiste em uma plataforma de jogos interativos digitais, com diversidades de minijogos de quizzes, anagramas, competições, e outros, que foi reproduzido utilizando notebook e projetor.

A atividade foi realizada através da disciplina de Metodologia do Ensino da Matemática, na qual foi proposto uma oficina de matemática para os alunos de uma escola da rede estadual de ensino no município de Salinópolis. O trabalho foi realizado em junho de 2023, com vinte graduandos envolvidos, na qual foram criadas aulas de matemática com o uso de jogos lúdicos, sendo alvo trinta e quatro alunos de uma turma do 9º ano do ensino fundamental. Primeiramente, foi feito uma pequena demonstração para os alunos sobre as figuras geométricas espaciais, a fim de saber como estava a compreensão sobre o assunto. Foram trabalhados os conceitos dos poliedros e fórmulas matemáticas para calcular o volume e a área dos sólidos geométricos, assim como a planificação dos sólidos como cubo, pirâmide, cilindro entre outros.

Ao iniciar, o aluno dava start ao seu jogo e logo era apresentado a pergunta, e assim deveria mover seu jogador até a resposta correta, não podendo encostar nos "inimigos" pelo caminho, se não perderia uma de suas vidas. De acordo com as regras do jogo, o tempo para realizar e ir passando de fase era de sete minutos, no final foi feito um ranking e venceu o aluno que respondeu mais perguntas corretas dentro do tempo estimado. Durante o desenvolvimento da atividade, era notório a satisfação dos alunos em participarem da atividade, além de interagirem bastante sobre as perguntas que estavam sendo mostradas.

Layout interativo de perguntas

Fig. 124: Autor

O jogo na prática

Fig. 125: Autor

O propósito deste jogo digital atingiu os objetivos propostos e estimulou a capacidade de interação, aplicação dos conceitos matemáticos, além de fazer estabelecer relações entre os alunos durante o jogo. Dessa forma, percebeu-se que o jogo utilizado despertou o interesse no conteúdo matemático a partir de uma metodologia envolvente, desafiadora e lúdica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou ressaltar a importância que o uso das tecnologias possui como suporte metodológico no processo de Ensino e Aprendizagem, a fim de garantir a aproximação do aluno com o conteúdo e, assim, promover a socialização de pensamentos, raciocínio lógico, troca de ideias, entre outros. Diante disso, pode-se ressaltar que os resultados obtidos sinalizam que o emprego de recursos tecnológicos digitais no ensino de matemática promove o interesse e participação do aluno com o assunto, tornando o aprendizado mais dinâmico e significativo.

Por meio da realização deste trabalho, podemos observar que o uso dos recursos tecnológicos digitais com ferramenta didática auxilia no processo de ensino-aprendizagem, dessa forma, os alunos tiveram a capacidade de compreender ainda mais sobre o assunto de figuras geométricas espaciais. Nessa percepção, tais ferramentas promovem ao aluno uma melhor compreensão da matéria, e melhor interação entre os alunos e com o professor, a fim de gerar saberes de forma divertida.

Embora os resultados desta pesquisa contribuem para o aumento do conhecimento acerca do uso de jogos digitais no ensino da matemática, e como é benéfica a implementação dessas atividades nas aulas, faz-se necessário a implementação de conhecimentos e motivação para os professores desenvolverem tais atividades com os alunos, com o intuito de fomentar as estratégias didáticas de ensino nas aulas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Santos, R. A. B., Andrade, C. S., Jucá, J. M. B., Barreto, C. C.; **A utilização de jogos como ferramenta auxiliar no ensino da Matemática**. Revista Educação Pública, v. 21, nº 42, 23 de novembro de 2021. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/42/a-utilizacao-de-jogos-como-ferramenta-auxiliar-no-ensino-da-matematica.

[2] Silva, J. D. B.; **O uso dos jogos no ensino da matemática. 2022**. 220 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Pedagogia) – Unidade Acadêmica de Educação a Distância e Tecnologia, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2022.

[3] Simões, J.; Richard, M. E. B., Chaves, G. S., Deus, K. A., Gomes, A. N. ; **A plataforma wordwall e suas potencialidades no desenvolvimento de atividades de matemática nas aulas remotas**. Anais educação em foco: ifsuldeminas, [s. L.], v. 2, n. 1, 2022. Disponível em: https://educacaoemfoco.ifsuldeminas.edu.br/index.php/anais/article/view/406. Acesso em: 20 mar. 2024.

[4] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

Metodologias ativas: modelagem matemática na educação básica

Assumpção, Caline[388] e Costa, Váldina

Resumo: *Este trabalho buscou compreender de que forma a modelagem matemática é utilizada na educação básica, com a intenção de incentivar os professores a utilizarem novas metodologias ativas no ensino da matemática, visando o melhor aprendizado aos alunos para que possam criar o interesse pelo estudo. Os referenciais teóricos utilizados no estudo foram de Burak (1987), Barbosa (2004) e Meyer, Caldeira e Malheiros (2011). Por meio de uma abordagem qualitativa, utilizou a pesquisa documental feita no software Buscad utilizando-se algumas palavras-chave. O corpus da pesquisa foi composto por 3 trabalhos e os resultados mostram que é perceptível que há o uso dessa metodologia, apesar de ser em poucos casos, mas o importante é que os professores se adaptam para colocar em prática da melhor forma possível, levando em consideração seus alunos, os conhecimentos por eles adquiridos, o local onde se encontram e a vida que levam. De modo geral, os alunos aprovaram a modelagem matemática e as atividades propostas a partir dela foram diversificadas.*

Palavras-chave: *Modelagem matemática, metodologia ativa, ensino básico.*

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência que estuda objetos abstratos e as relações entre eles por método dedutivo. Segundo Biembengut e Hein (2005) ela é o alicerce de diversas áreas do conhecimento e contribui para o desenvolvimento cognitivo e criativo em diferentes níveis de escolaridade. No ensino básico, é de grande importância, porém, os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) indicam que muitos estudantes enfrentam dificuldades na aprendizagem desta disciplina. Segundo Sidman (1995, p. 289), para os alunos do ensino básico:

> Nos primeiros anos, a maioria deles aprende com vontade, os poucos aprendizes relutantes destacam-se dos outros. A partir dos graus intermediários e da escola secundária até a universidade, a balança muda; estudantes sem nenhuma vontade predominam.

Em setembro de 2022, uma pesquisa do Fundo das Nações Unidas para a Infância (UNICEF) revelou que dois milhões de crianças e adolescentes brasileiros, com idades entre 11 e 19 anos, estão fora da escola. Diante desse cenário e da situação da educação no Brasil, é crucial adotar novos métodos de ensino que despertem o interesse dos estudantes.

Desta forma, este estudo objetiva compreender como a modelagem matemática, enquanto uma metodologia ativa está sendo utilizada nos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio. A pesquisa

[388] Universidade Federal do Triângulo Mineiro

surgiu da curiosidade de saber se as novas metodologias de ensino estão sendo empregadas por professores; em principal a modelagem matemática, visto que estudos mostram um melhor aproveitamento na aprendizagem dos alunos, quando utilizada.

A intenção desta pesquisa é incentivar os educadores do ensino básico no uso das novas metodologias ativas no ensino da matemática, com foco principal na modelagem matemática, visando o melhor aprendizado aos alunos para que possam criar o interesse pelo estudo.

REFERENCIAL TEÓRICO

A educação básica é um dos pilares que constroem a sociedade, sendo de suma importância para crianças e adolescentes. A Constituição Federal de 1988, no artigo 208, estabelece que é dever do Estado garantir a educação básica, sendo obrigatório e gratuito aos cidadãos residentes no Brasil. Um dos grandes defensores da educação, Paulo Freire, com mais de quarenta livros publicados e reconhecido mundialmente; traz em um deles, Pedagogia da Autonomia, escrito em 1996, a seguinte frase: "É fundamental diminuir a distância entre o que se diz e o que se faz, de tal maneira que num dado momento a tua fala seja a tua prática"; isso nos leva a pensar nas metodologias ativas.

Na educação matemática, um grande destaque tem sido as metodologias ativas. Segundo Moran (2013) as metodologias ativas são experiências proporcionadas ao aluno durante o curso e/ou disciplina, permitindo que ele antecipe problemas e situações reais que encontrará em sua vida profissional. Diante das atuais situações em que o ser humano vive, dar essa autonomia ao aluno é considerado uma forma positiva de ensino, fazendo com que o mesmo se torne mais atento e participativo nas aulas.

> É preciso parar para notar que, [...] o estudante como o sujeito participativo na construção da sua aprendizagem e o professor atento a intervir e chegar mais próximo ao sujeito aprendente, buscando compreendê-lo em sua complexidade. (TEOTONIA; MOURA, 2020, p.195).

Já a modelagem matemática, considerada uma das metodologias ativas dentro da área de matemática, segundo Burak (1987, p.21) é "um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões". No Brasil, a introdução da modelagem matemática foi possibilitada por um grupo de professores filiados ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Esses educadores disseminaram essa abordagem como uma alternativa ao ensino tradicional de matemática, utilizando livros, cursos de especialização, artigos, palestras e orientações de trabalhos de conclusão de mestrado e doutorado.

Para Barbosa (2004, p.76), as atividades de Modelagem Matemática oferecem "condições que propiciam determinadas ações e discussões singulares, em relação a outros ambientes de aprendizagem". Além disso, Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) salientam que na Modelagem Matemática "ao invés de se dar uma pergunta para o aluno, em que ele vai ter de usar predeterminada ferramenta matemática para garantir a obtenção da resposta certa, o aluno faz a pergunta para si e para os outros".

TRAJETÓRIA METODOLÓGICA

O presente trabalho utilizou uma abordagem qualitativa, que segundo Denzin e Lincoln (2006) incorpora uma perspectiva interpretativa do mundo, o que implica que os pesquisadores analisam os fenômenos em seus contextos naturais, buscando compreendê-los através dos significados atribuídos pelas pessoas a eles relacionadas.

Para atingir o objetivo proposto, utilizou-se a pesquisa documental que foi realizada no software BUSCAD, utilizando as seguintes palavras-chave: Modelagem Matemática AND Metodologia Ativa AND Ensino Básico. Foram identificados 59 trabalhos relacionados às palavras-chave "Modelagem Matemática", "Metodologia Ativa"e "Ensino Básico"nas plataformas CAPES, Scielo, Periódicos, DOAJ e BDTD. Após uma análise dos títulos, 4 foram excluídos por serem direcionados à graduação, 25 por abordarem outras disciplinas e 8 por envolverem ensino híbrido e/ou tecnologias educacionais em geral, resultando em uma seleção de 21 trabalhos pertinentes. Na análise dos resumos desses 21 trabalhos, foram excluídos 2 voltados para graduação, 2 que não tratavam de modelagem matemática, 9 que não atendiam aos objetivos propostos e 7 que não estavam disponíveis para acesso. Desta forma, o corpus da pesquisa foi constituído de 3 trabalhos, elencados no quadro 1.

Quadro 1 - Lista de trabalhos que compõem o corpus da pesquisa

TÍTULO	AUTOR(ES)	ANO	INSTITUIÇÃO	TIPOLOGIA
A Inserção do Uso do Computador no Processo de Modelagem Matemática Contribuindo para o Aprendizado de Conhecimentos Matemáticos	Silva, Mário José Siqueira da	2010	Universidade Federal do Pará (UFPA)	Dissertação
A Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e o Desenvolvimento de Habilidades Matemáticas em alunos do 7° ano do Ensino Fundamental	Zequim,Katia Cristina	2014	Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)	Dissertação
Modelagem Matemática como Metodologia para o Desenvolvimento do Letramento Estatístico no Ensino Médio	Loli, Adriana Cristina	2021	Universidade Estadual do Centro-Oeste (Unicentro)	Dissertação

Fonte: Elaborado pelos autores, 2023

ANÁLISES

Visto que o objetivo consiste em compreender a aplicação de modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental e médio. Nesse sentido, é essencial examinar de que maneira os estudos abordam e incorporam o emprego da modelagem matemática.

Adriana Cristina Loli conduziu uma dissertação intitulada "Modelagem Matemática como Metodologia para o Desenvolvimento do Letramento Estatístico no Ensino Médio"com 51 alunos, de 16 a 18 anos, em um colégio periférico em Guarapuava-PR. Seu objetivo era criar uma modelagem matemática seguindo as fases propostas por Burak (1992) e analisar os resultados propostos por Gal (2002). O estudo começou com uma avaliação diagnóstica sobre estatística descritiva, revelando apenas 38% de acertos gerais, com as questões de cálculo tendo menos acertos, atribuídos à falta de lembrança das fórmulas e à extensão das questões. Em seguida, os alunos formaram grupos e escolheram temas de interesse pessoal para iniciar o processo de criação da modelagem matemática. A investigação sobre os temas escolhidos foi seguida pelo levantamento do problema, onde os alunos formularam suas questões de pesquisa. Posteriormente, eles trabalharam na resolução das questões de pesquisa, realizando pesquisas bibliográficas e questionários. Por fim, analisaram os dados obtidos e apresentaram suas considerações finais, incluindo a construção de gráficos e tabelas para análise. A autora observa que a atividade foi eficaz no ensino de estatística, proporcionando aos alunos uma variedade de problemas e tópicos para estudar. A escolha dos temas permitiu a criação de materiais adequados, incluindo pesquisas de campo para entender a realidade dos alunos. Essa abordagem enriqueceu a formação dos alunos, tornando-os mais críticos em relação às notícias, capazes de identificar falácias e notícias falsas, e promovendo a construção de opiniões embasadas. A aplicação da modelagem matemática estimulou a curiosidade, a autoestima e a liberdade dos alunos, mesmo aqueles sem experiência prévia com essa metodologia, desenvolvendo as bases necessárias para um aprendizado significativo.

A dissertação de Mário José Siqueira da Silva, designada “A Inserção do Uso do Computador no Processo de Modelagem Matemática Contribuindo para o Aprendizado de Conhecimentos Matemáticos”, foi aplicada a 30 alunos do ensino médio, sendo a maioria da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Mário Barbosa. A princípio foi aplicado um questionário visando formar um perfil dos alunos, saber o que conheciam da área de informática que influenciam no trabalho, como os softwares que seriam utilizados; na atividade proposta utiliza programas como Software Winplot e Planilha eletrônica para criar situações problema envolvendo energia elétrica, onde o aluno deve usar da matemática computadorizada para resolver, os alunos são acompanhados onde o professor tem o papel fundamental de conduzir o estudante e auxiliá-lo no processo da criação do raciocínio.

A dissertação de Katia Cristina Zequim, intitulada "A Resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e o Desenvolvimento de Habilidades Matemáticas em alunos do 7° ano do Ensino Fundamental", envolveu 133 alunos com idades entre 11 e 13 anos. O estudo propôs uma atividade que utiliza a modelagem matemática para resolver problemas relacionados à contaminação do solo e da água pelo óleo de cozinha usado. Estruturada em cinco etapas, a atividade abrangeu conceitos matemáticos como manipulação de medidas, volumes, elaboração de gráficos e tabelas. Iniciando com a conscientização sobre o tema, as etapas seguintes envolvem experimentos práticos para observar os efeitos do descarte inadequado do óleo no solo, explorando temas como oxigenação da água, análise de resultados, gráficos e tabelas. A atividade culminou na ênfase na reciclagem do óleo de cozinha como fonte de renda extra, abordando diversos conceitos matemáticos ao longo do processo. Durante as atividades, a matemática foi empregada diversas vezes, embora a autora tenha identificado algumas dificuldades, como promover o pensamento matemático e geométrico em certas etapas e a falta de estrutura nas escolas públicas para tais atividades. Didaticamente, o projeto incentivou a busca por abordagens mais significativas e atrativas para o ensino da matemática, destacando a diferença entre exercícios convencionais e situações-problema. A importância do trabalho em duplas ou grupos foi ressaltada, juntamente com a inclusão dos pais e outros colaboradores da escola, não apenas para ensinar matemática, mas também para preparar os alunos para a vida em sociedade, incentivando a prática da escuta e do diálogo.

CONCLUSÃO

Tendo em vista tudo que foi abortado e as dissertações lidas, concluo que o uso de metodologias ativas, principalmente modelagem matemática é vantajoso e beneficia tanto os alunos quanto a formação do professor. Dando um enfoque nos alunos, o uso desse método faz com que os estudantes se envolvam com o assunto, fazendo-os perceber que tem matemática em tudo à nossa volta. Já para a formação dos professores, enriquece o seu ensino e sua percepção em relação aos alunos, além de aumentar seu portfólio de ensino.

Desta forma também é perceptível que há o uso dessa metodologia, apesar de ser em poucos casos, mas o importante é que os professores se adaptam para colocar em prática da melhor forma possível, levando em consideração seus alunos, os conhecimentos por eles adquiridos, o local onde se encontram e a vida que levam. De modo geral, os alunos aprovaram a modelagem matemática e as atividades propostas a partir dela foram diversificadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] Assunção, B. G.; Silva, J. T.; **METODOLOGIAS ATIVAS: uma reflexão sobre a aprendizagem na atualidade**. Conedu - Congresso Nacional de Educação, [S. l.], out. 2020. Disponível em: ttps://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2020. Acesso em: 11 jul. 2023.

O problema de Cauchy: visualização geométrica e aplicações

LIBARDI, Camilly[389] e FERREIRA, Fabiana[390]

Resumo: *Este trabalho apresenta o Método das Curvas Características, uma ferramenta para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDP) de primeira ordem com condições iniciais (Problemas de Cauchy). O método simplifica uma Equação Diferencial Parcial para uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) ao longo de curvas que cruzam a condição inicial.*

Palavras-chave: *Equações parciais, curvas características, problema de Cauchy.*

INTRODUÇÃO

O estudo das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) é crucial para entender uma ampla variedade de fenômenos em campos científicos como física e ciências aplicadas. Essas equações são fundamentais para modelar sistemas complexos, como os encontrados na elasticidade, geofísica e transferência de calor. Matemáticos como Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Jean Le Rond D'Alembert e Joseph Fourier foram importantes tanto desenvolvimento do cálculo até os estudos de problemas como o comportamento de ondas vibrantes e a propagação do calor. O estudo das EDP'S é importante porque está diretamente relacionado à solução de problemas reais do mundo. Ele nos dá ferramentas essenciais para prever, descrever e controlar sistemas físicos complexos.

Neste trabalho, vamos abordar o método das características, que visa simplificar equações diferenciais parciais para equações diferenciais ordinárias.

Principais Tópicos e Definições

Definição 9.2 (Equação Diferencial Parcial) *Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve duas ou mais variáveis independentes, x, y, z, t, ..., e derivadas parciais de uma função com relação à variável dependente, isto é, $u = u(x, y, z, t...)$. Em n variáveis independentes, x_1, x_2, ..., x_n, a EDP é expressa por:*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}) = 0,$$

onde $x = (x_1, x_2..., x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função a ser determinada.

É natural questionar se podemos formar "combinações lineares infinitas"de soluções. A resposta é sim! Essa é a forma infinita do Princípio da Superposição.

[389]Universidade Federal do Espírito Santo
[390]Universidade Federal do Espírito Santo

Proposição 9.1 (Princípio da Superposição) *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k, cujos coeficientes estão definidos em um subconjunto aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ seja um conjunto de funções da classe $C^k(\Omega)$ satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$, onde $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω. Então, u satisfaz a equação $Lu = 0$.

De acordo com [2] : "Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região (*condições de contorno*) temos um *problema de valores de contorno* ou, simplesmente, *problema de contorno* [...] Podemos generalizar o conceito de *condições iniciais* impondo o valor da solução e suas derivadas normais ao longo de uma curva ou superfície inicial; o problema correspondente é um *problema de Cauchy* ou *de valor inicial*."

De acordo com [1], a ideia principal do método das características para resolver equações de primeira ordem é encontrar curvas ao longo das quais a edp se reduz a uma equação diferencial ordinária, chamadas de curvas características da equação (pois independem das condições iniciais), e integrar a equação diferencial ordinária obtida ao longo dessas curvas para obter a solução. Segue abaixo um exemplo que modela uma equação do transporte e é um problema de Cauchy onde aplicamos o método das características.

Exemplo 9.1

$$\begin{cases} 2u_x(x,y) + 3u_y(x,y) = 0 \\ u(x,x) = e^{2x} \end{cases} \tag{59}$$

Solução: Reescrevendo a EDP (59) observamos que $(2,3)\cdot(u_x,u_y) = 0$, ou seja, a derivada direcional de u na direção do vetor $(2,3)$ é nula, daí a função u é constante quando percorre a direção do vetor $(2,3)$. Todas as retas com essa direção formam a familia das curvas características planas da equação (59), conforme figura 126. Logo se conhecermos o valor de u em qualquer ponto de alguma dessas retas, saberemos o valor de u em todos os pontos da reta. Obtemos essa informação por meio dos pontos de interseção entre as curvas características e a curva inicial $y = x$. Veja figura 126.

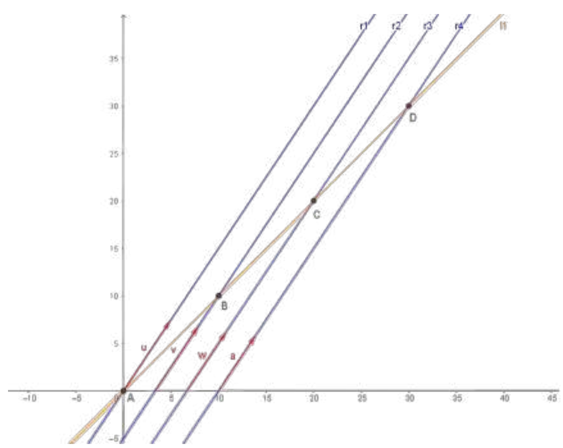


Fig. 126: Curvas características e curva inicial da equação (59)

Fonte:Próprio Autor

As retas características podem ser descritas por: $3x - 2y = k$, com $k \in \mathbb{R}$. Como cada reta, u assume valores constantes, então a solução para (59) será caracterizada por

$$u(x,y) = f(3x-2y).$$

Além disso, pela curva inicial $x = y$ temos $u(x, x) = f(3x - 2x) = f(x)$. Pela condição inicial temos que

$$u(x, y) = f(3x - 2y) = e^{6x-4y}.$$

Motivados pelo exemplo acima, segue abaixo a definição de curvas características para a equação de transporte para cada ponto $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 9.3 (Curvas Características) *As retas*

$$x(t) = c(t - t_0) + x_0$$

são chamadas as retas características da equação de transporte $u_t + cu_x = 0$.

Este método, apesar de apresentar limitações, pode ser aplicado também, para resolver determinados Problemas de Cauchy com coeficientes variáveis, homogêneos e não homogêneos.

CONCLUSÕES

Este estudo nos possibilita reconhecer a importância das equações diferenciais em diversas áreas científicas. Além disso, ressalta a relevância dos métodos de resolução e de visualização das equações, destacando especialmente o Método das Características.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIEZUNER, Rodney Josué. Notas de Aula: Equações Diferenciais Parciais I/II. Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais, 2010;

[2] IÓRIO, Valéria. EDP: Um curso de graduação. 4. ed. Rio de Janeiro: 2018 ;

Solução de EDP via teorema do passo da montanha

Passarin, Carlos Eduardo[391] e Presoto, Adilson Eduardo[392]

Resumo: *No século XIX, o Problema de Dirichlet foi abordado pelo Princípio de Dirichlet, mas suas falhas foram identificadas por Weierstrass. A teoria dos espaços de Sobolev e o método de minimização solucionaram essas falhas, levando ao desenvolvimento de ferramentas como o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz [2].*

Palavras-chave: *Equações diferenciais parciais, minimização, passo da montanha, problema de Dirichlet.*

INTRODUÇÃO

No século XIX, o Problema de Dirichlet foi abordado pelo Princípio de Dirichlet, introduzindo um funcional de energia. Matemáticos como Weierstrass reconheceram suas falhas por volta de 1870, atribuídas à falta de rigor matemático da época. A solução veio com a teoria dos espaços de Sobolev e o método de minimização, conforme [2]. Após isso, várias ferramentas poderosas foram desenvolvidas para atacar problemas em Equações Diferenciais Parciais, dentre eles o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti-Rabinowitz. Neste trabalho, serão abordados alguns resultados importantes no estudo de EDP's, que emergiram após os questionamentos iniciados por Weierstrass acerca do Princípio de Dirchlet.

CONCLUSÕES

Estudou-se as principais ferramentas para obtenção de solução e classificação de solubilidade de equações diferenciais parciais. Além disso, aplicou-se alguns desses métodos em uma mesma EDP, no intuito de compará-los. A investigação sobre as aplicações dessas ferramentas na solução de EDP's, propiciou ao aluno o contato e manuseio de métodos mais sofisticados da Análise e do Cálculo das Variações, bem como a compreensão de sua importância na área.

BIBLIOGRAFIA

[1] EVANS, L. C. *Partial differential equations.* 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. 749 p. (Graduate Studies in Mathematics; v.19)

[2] PONCE, A. C., *Métodos clássicos em Teoria do Potencial.* Rio do Janeiro: IMPA, 2009. (Publicações Matemáticas)

[391] Aluno de Mestrado na Universidade Federal de São Carlos
[392] Docente do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos

Sobre os completamentos de $\mathbb{Q}$:

Os números p-ádicos e o teorema de Ostrowski

Kaneko, Carolina[393] e Lelis, Jean[394]

Resumo: *Este trabalho apresenta o Teorema de Ostrowski, que caracteriza, a menos de isomorfismo, todos os completamentos de $\mathbb{Q}$. Para isso, apresentamos as definições de norma, sequências de Cauchy, e introduzimos o conjunto dos números reais como um exemplo de completamento dos racionais. Em seguida, são introduzidas as definições de valoração p-ádica e do valor absoluto p-ádico. Apresentamos a construção do Corpo dos Números p-ádicos como outro completamento de $\mathbb{Q}$. Segue então o Teorema principal, que caracteriza todas as normas possíveis nos racionais como equivalentes ou ao valor absoluto p-ádico ou ao valor absoluto usual. Concluímos então que todos os completamentos do corpo dos racionais resultam ou em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{Q}_p$, para algum primo p.*

Palavras-chave: *Teorema de Ostrowski, números p-ádicos, completamentos dos racionais.*

INTRODUÇÃO

Ao estudar a distância entre números racionais dada pelo valor absoluto usual, nos deparamos com um problema: de maneira intuitiva, há “lacunas” entre esses números, ou seja, os racionais não são *completos*, dificultando, por exemplo, o cálculo de limites ou a aplicação de teoremas clássicos do Cálculo, como o Teorema do Valor Intermediário. Um dos modos de contornar esse problema é definindo o *Corpo dos Números Reais* $\mathbb{R}$.

Contudo, existem outras formas de medir distância entre os racionais: especificamente na Teoria dos Números, temos os valores absolutos p-ádicos, onde p é um número primo. Para cada primo p, o valor absoluto p-ádico nos permite construir um corpo, chamado *Corpo dos Números p-ádicos* $\mathbb{Q}_p$. Com o estudo dos números p-ádicos, obtemos ferramentas analíticas análogas às utilizadas na análise, que podem ser aplicadas na Teoria dos Números e na Álgebra. Seguem então algumas definições importantes para o trabalho.

Normas e Completamento em $\mathbb{Q}$

Uma função $||\cdot|| : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ *é dita uma norma se satisfaz as seguintes condições:*

1. $||x|| = 0 \iff x = 0$;
2. $||xy|| = ||x||||y||$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$;
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

[393] Faculdade de Matemática ICEN-UFPA
[394] Faculdade de Matemática ICEN-UFPA

A terceira propriedade é chamada de *desigualdade triangular*. Sabemos que o valor absoluto usual

$$|r| = \begin{cases} r & \text{se } r \geq 0, \\ -r & \text{se } r < 0. \end{cases}$$

é uma norma sobre $\mathbb{Q}$.

Lembramos que uma sequência $\{r_n\}_{n\geq 0}$ de racionais é de Cauchy se, para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo N tal que para quaisquer inteiros $n, m > N$ implica que $||r_n - r_m|| < \epsilon$. Dizemos que $\mathbb{Q}$ é completo com respeito à norma $\|\cdot\|$, se para toda sequência de Cauchy $\{r_n\}_{n\geq 0}$, existe um elemento L em $\mathbb{Q}$ tal que $r_n \to L$, quando $n \to \infty$. Sabemos que $\mathbb{Q}$ não é completo com respeito ao valor absoluto usual. De fato, existem sequências de Cauchy que tendem a $\sqrt{2}$, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Nos cursos de Análise Real, aprendemos que $\mathbb{R}$ é o *completamento* de $\mathbb{Q}$ com respeito ao valor absoluto usual, ou seja, o conjunto que contém todos os limites de sequências de Cauchy sobre os racionais.

Corpos p-ádicos

Apresentaremos agora outras formas de medir distância no corpo dos números racionais, os chamados *valores absolutos p-ádicos*. Veremos que os racionais também não são completos com respeito a esses valores absolutos, e que seu completamento com respeito a cada um desses valores gera um conjunto que chamaremos de *Corpo dos Números p-ádicos*. Para isso, segue abaixo nossa construção.

Fixado um número primo p, definimos a valoração p-ádica em $\mathbb{Q} - \{0\}$ como a função

$$v_p : \mathbb{Q} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo número racional $r \in \mathbb{Q}$ com $r \neq 0$, $v_p(r)$ é o único inteiro tal que $r = p^{v_p(r)}\dfrac{a}{b}$, onde $p \nmid ab$. Usando a valoração p-ádica, definimos o valor absoluto p-ádico de $x \in \mathbb{Q}^*$, dado por

$$|x|_p = p^{-v_p(x)},$$

para estender a definição para todo racional, consideramos que $|0|_p = 0$.

Podemos mostrar que o valor absoluto p-ádico como definido é uma norma sobre $\mathbb{Q}$.

Ademais, os racionais não são completos em relação a $|\cdot|_p$, sendo possível construir o seu completamento, o que nos dá $\mathbb{Q}_p$, também chamados de racionais p-ádicos. Como já conhecemos os completamentos dos racionais dado por $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}_p$, uma pergunta natural é: existem outros possíveis completamentos, oriundos de normas distintas da usual e das p-ádicas? A resposta é não, e nosso objetivo final é caracterizar todos os completamentos de $\mathbb{Q}$. Segue então o resultado principal do trabalho.

Teorema 9.3 (Teorema de Ostrowski) *Toda norma não trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente ou ao valor absoluto usual ou ao valor absoluto p-ádico.*

Ideia da Demonstração: Segue das definições de norma que, se duas normas $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ em $\mathbb{Q}$ são equivalentes, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $|x|_1 = |x|_2^{\alpha}$. Segue a ideia de demonstração, dividida em casos:

1. Se $||\cdot||$ é norma não Arquimediana, então $||\cdot|| = |\cdot|_p^{\alpha}$, para algum primo p;
2. Se $||\cdot||$ é norma Arquimediana, então $||\cdot|| = |\cdot|^{\alpha}$, onde $|\cdot|$ é o valor absoluto usual.

Em (1), primeiro mostramos que o menor natural cuja norma é menor que 1, é um primo p. Daí, para todo primo diferente de p, mostramos que sua norma vale 1. Usando o Teorema Fundamental da Aritmética, concluímos que $||x|| = ||p^{v_p(x)}||$, para todo x racional diferente de zero. Então, existe α que satisfaz (1).

No caso (2), como a norma é não trivial, existe algum n natural tal que $||n|| > 1$. Consideramos n_0 o menor n que satisfaz $||n_0|| > 1$, e escrevemos um inteiro qualquer n como uma expansão na base n_0. Usando propriedades de norma, é possível concluir que $||n|| \leq n^{\alpha}C$, para algum $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ e C uma constante que não depende de n. Fazendo a construção para n^N, com $N \longrightarrow \infty$, obtemos $||n|| \leq n^{\alpha}$. Usando novamente as propriedades de norma e desigualdades, é possível mostrar que $n^{\alpha} \leq ||n||$. Para que ambas as desigualdades sejam verdadeiras, $||n|| = n^{\alpha} = |n|^{\alpha}$, como queríamos mostrar.

Assim, se todas as normas possíveis em $\mathbb{Q}$ são equivalentes a $|\cdot|$ ou $|\cdot|_p$, então todos os completamentos possíveis também serão equivalentes ou a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{Q}_p$.

BIBLIOGRAFIA

[1] KATOK, S. **p-adic Analysis Compared with Real**. Providence: American Mathematical Society, 2007.

[2] GOUVÊA, F. **p-adic Numbers**. Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2020.

[3] TAO, T. **Analysis 1**. New Delhi: Hindustan Book Agency, 2009.

[4] SHOKRANIAN, S., SOARES, M., GODINHO, H. **Teoria dos Números**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1994.

[5] MURTY, M. **Introduction to p-adic Analytic Number Theory**. Providence: American Mathematical Society, 2002.

O espectro do operador Grushin na esfera Grushin[395]

Gomes, Clenilton[396] e Marrocos, Marcus[397]

Resumo: *Uma 2D estrutura Quase-Riemanniana é uma estrutura riemanniana generalizada que pode ser definida localmente por pares de campos vetoriais em uma variedade M bi-dimensional. No presente trabalho apresentamos uma generalização do operador Grushin, obtido através do operador Laplace-Beltrami definido em uma estrutura quase-riemanniana. Definiremos a esfera Grushin e consequentemente o operador Grushin generalizado sob essa estrutura e calcularemos o seu espectro.*

Palavras-chave: *Operador Laplace-Beltrami, operador Baouendi-Grushin, teoria espectral, estrutura quase-riemanniana, esfera Grushin.*

INTRODUÇÃO

Estamos interessados em estudar o operador sub-Laplaciano $\mathcal{L}:= \mathrm{div}_\mu \circ \bullet_{sR}$ definido por uma estrutura canônica $Quase - Riemanniana$ na esfera $\mathbb{S}^2$, conhecida como *Esfera Grushin*, onde $\mathcal{L}$ é uma generalização natural do operador Grushin $\mathcal{G} := \partial_x^2 + x^2\partial_y^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Quando expresso em coordenadas esféricas, o operador sub-Laplaciano é representado por:

$$\Delta_{BG} := \frac{1}{cosx}\partial_x(cosx\partial_x) + tan^2 x\partial_y^2 \qquad (x,y) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi)$$

Curiosamente, próximo de $x = 0$, Δ_{BG} tem um comportamento similar ao operador clássico $\mathcal{G}$ em $\mathbb{R}^2$. Um dos nosso principais objetivos é estudar os esféricos e polinômios harmônicos e encontrar os autovalores de $\mathcal{L}$. E para isto enunciaremos alguns resultados que nos será útil mais a frente.

A ESFERA GRUSHIN E O OPERADOR SUB-LAPLACIANO ASSOCIADO

Apresentaremos agora nosso principal operador e levaremos em condição o fato de que nossa variedade M é a esfera $\mathbb{S}^2 := \left\{p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$. E como dito na introdução, estamos interessados em calcular o espectro do operador sub-Laplaciano $\mathcal{L}$, que diferente do Laplaciano clássico, é um operador elíptico degenerado. Vejamos a definição de estrutura **Quase-Riemanniana** e esfera de Grushin e como obtemos o nosso operador em destaque. A título de curisosidade, o operador $\mathcal{G} := \partial_x^2 + x^2\partial_y^2$ em $\mathbb{R}^2$ definido na introdução é obtido quando definimos o operador Laplace-Beltrami sob uma estrutura quase-riemanniana, que apresenta algumas singularidades em termos de primeira ordem, cuja motivação foge do propósito do trabalho.

[395] Este trabalho foi apoiado pela Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)
[396] Aluno de Mestrado no PPGM-UFAM
[397] Professor Titular na Universidade Federal do Amazonas

Definição 9.5 *Diremos que o par de campos vetoriais X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ é um gerador do colchete de Lie se para todo ponto $p \in M$*

$$span\{X(p), Y(p), [X,Y](p), [X,[X,Y]](p), \ldots\} = T_pM.$$

Definição 9.6 *Uma variedade Quase-Riemanniana (2D) é um par $(M, \{X_1, X_2\})$ onde M é uma variedade bi-dimensional e $\{X_1, X_2\} \subset \mathfrak{X}(M)$ é uma família de geradores de colchetes de Lie.*

Definição 9.7 *Seja X um campo vetorial em uma variedade M e $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ o fluxo de X. Dizemos que X é um campo vetorial **Killing** em M, se para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $p \in M$, a diferencial $d\phi_t(p) : T_pM \longrightarrow T_pM$ é uma isometria.*

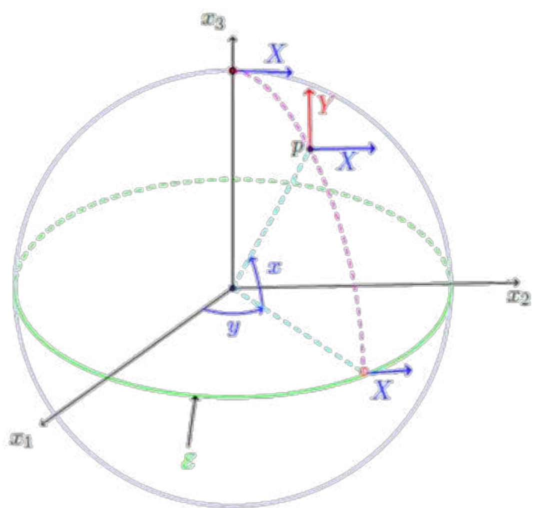


Fig. 127: A esfera Grushin: Os campos vetoriais X e Y são os geradores dessa estrutura em coordenas latitude-longitude (x, y). O conjunto de degenerescência coincide com o equador ϵ. O círculo vermelho no equador significa que o campo vetorial Y é singular nesse local.

Seja μ a forma volume riemanniana padrão em $\mathbb{S}^2$, definimos o sub-Laplaciano

$$\mathcal{L} := div\mu \circ \bullet_{sR} = -X_1^+ X_1 - X_2^+ X_2,$$

onde $\bullet_{sR}$ é o gradiente sub-riemanniano definido por $\bullet_{sR}\phi = (X_1\phi)X_1 + (X_2\phi)X_2$ para alguma $\phi \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$; enquanto div$_\mu$ denota o divergente com respeito a μ tal que $X_1^+ := -X_1 - div_\mu(X_1)$ e $X_2^+ := -X_2 - div_\mu(X_2)$ denota, respectivamente, a forma adjunta de X_1 e X_2 tomados no espaço $L^2(\mathbb{S}^2, \mu)$.

Definição 9.8 *Para algum $n \in \mathbb{Z}$, definimos o operador $\mathcal{L}_n$ em $\mathcal{H}_n$ por $D(\mathcal{L}_n) := \{v \in \mathcal{H}_n; \mathcal{L}_n v \in \mathcal{H}_n\}$ e $\mathcal{L}_n v = \frac{1}{cosx}(cosxv')' - n^2 tan^2 xv, \quad v \in D(\mathcal{L}_n)$.*

Proposição 9.2 $-\mathcal{L}_n v_{n,l} = \lambda_{n,l} v_{n,l}$ *tal que* $\lambda_{n,l} = l(l+1) - n^2$ *onde*

$$v_{n,l}(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-n)!}{(l+n)!}} P_l^n(senx)$$

formam um conjunto ortonormal completo do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_n$ com P_l^n sendo a função de Legendre de primeiro tipo associada. Isto é, as funções $v_{n,l}$ são as autofunções dos operadores $-\mathcal{L}_n$ com autovalores $\lambda_{n,l}$

CONCLUSÕES

Este trabalho foi desenvolvido como motivação para estudar Teoria Espectral em variedades Riemannianas, além disso, é uma continuação de um trabalho apresentado no Workshop de Verão realizado no ICMC-USP. Continuaremos o estudo do operador apresentado explorando possíveis resultados para uma futura dissertação.

BIBLIOGRAFIA

[1] Tamekue, Cyprien. Controllability, Visual Illusions and Perception. Optimization and Control [math.OC]. Université Paris-Saclay, 2023. English. ⟨NNT : 2023UPAST105⟩. ⟨tel-04230895⟩

[2] Tamekue, Cyprien. Null controllability of the parabolic spherical Grushin equation. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations** 28 (2022): 70.

[3] Boscain, Ugo; Laurent, Camille. The Laplace-Beltrami operator in almost-Riemannian Geometry. Annales de l'Institut Fourier, Volume 63 (2013) no. 5, pp. 1739-1770. doi : 10.5802/aif.2813. https://aif.centre-mersenne.org/articles/10.5802/aif.2813/

Variedades tóricas e equisingularidade de Whitney

Santos, Danilo da N.[398] e Dalbelo, Thaís Maria[399]

Resumo: Seja $F(t,z) = F(t,z_1,\ldots,z_n)$ uma função polinomial não constante sobre $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^r$ satisfazendo $F(t,0) = 0$ para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno. Denotando por $F_t(z) = F(t,z)$ e considerando a família $\{F_t\}_t$, podemos associa-la uma família $\{V(F_t)\}_t$ de hipersuperfície em $\mathbb{C}^r$ definidas como sendo o conjunto de zeros de F_t. Em [1], os autores provaram que se a família $\{F_t\}_t$ for *admissível*, ou seja, se para t suficientemente pequeno F_t satisfaz

- sua fronteira de Newton independe de t,
- F_t é Newton não-degenerada e
- F_t é localmente e uniformemente controlada

então a família de hipersuperfícies $\{V(F_t)\}_t$ é Whitney equisingular (e por isso topologicamente equisingular). Além disso, esse resultado não depende de que F_t tenha singularidades isoladas.

Agora vamos considerar uma variedade tórica $X_\sigma \subset \mathbb{C}^r$ gerado por um cone fortemente convexo $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão máxima (como em [2]) e $f(t,z_1,\ldots,z_r)$ uma função polinomial não constante sobre $\mathbb{C}\times X_\sigma$. Nesse sentido $f = F_{|\mathbb{C}\times X_\sigma}$, com F como acima.

O objetivo do nosso trabalho é encontrar condições sobre a família $\{f_t\}_t$ tal que a família de hipersuperfícies associada $\{V(f_t)\}_t$ Whitney equisingular e assim como em [1] isso não dependa da dimensão do conjunto crítico de f_t.

Nesse poste iremos apresentar uma condição de "admissibilidade" para funções sobre variedades tóricas e iremos provar também que existe $R > 0$ tal que o conjunto

$$V(f_t) \cap X_\sigma^{*I} \cap B_R$$

é suave. Aqui B_R é a bola aberta de reio R e centro na origem e $X_\sigma^{*I} = \mathbb{C}^r \cap X_\sigma^I$ onde X_σ^I é uma órbita da ação tórica satisfazendo $f_{|X_\sigma^I} \not\equiv 0$ e $I \subset \{1,\ldots r\}$. Esse resultado é fundamental para construção da estratificação de Whitney que irá implicar no resultado esperado.

Palavras-chave: *Equisingularidade de Whitney , variedades tóricas, singularidades não isoladas.*

[398] Aluno de Doutorado PPGM–UFSCar

[399] Orientadora de Doutorado PPGM–UFSCar

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Eyral and M. Oka, **Non-compact Newton boundary and Whitney equisingularity for non-isolated singularities**, Advances in Mathematics, **316**, 2017, 94–113.

[2] J-P. Brasselet, **Introduction to Toric Varieties**, Publicações Matemáticas – Projeto Euclides, IMPA, 2004.

[3] M. Oka, **Non-degenerate Complete Intersection Singularity**, Actual. Math., Hermann, Paris, 1997.

Equações diferenciais ordinárias e suas aplicações

O modelo de Gompertz e o crescimento de tumores

Macedo Lima, Davi[400] e de Vasconcelos Feio Messias, Maria Alice[401]

Resumo: *Esse trabalho tem como objetivo introduzir ao seu público o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias, bem como algumas de suas aplicações na ciência, com ênfase no chamado Modelo De Gompertz, modelo matemático desenvolvido por Benjamin Gompertz com a finalidade de analisar o desenvolvimento de tumores com o passar do tempo, tema de grande relevância na área da biomedicina.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais ordinárias, modelo de Gompertz, tumores.*

INTRODUÇÃO

Denomina-se Equação Diferencial Ordinária (EDO) uma equação cuja a incógnita é uma função (variável dependente) de uma variável (independente), e que envolve derivadas da variável dependente em relação a variável independente. Vejamos a seguir um exemplo de uma EDO:

$$\frac{dy}{dx} = x^2.$$

A Equação Diferencial Ordinária exemplificada tem como finalidade encontrar uma função $y = y(x)$ tal que, ao derivarmos, encontremos x^2 como resultado. Nesse caso, a função

$$y = \frac{x^3}{3} + 1$$

por exemplo, é uma solução para esta equação.

As EDOs podem ser classificadas pela sua ordem, grau e linearidade[402], e modelam diversos fenômenos em várias áreas da ciência, sendo estes, na maioria das vezes, relacionados ao tempo.

Na área da farmacologia, por exemplo, é possível descrever, ao longo do tempo, o comportamento da concentração de uma droga no organismo após a sua ingestão com o uso dessas equações. Na arqueologia, esse tipo de equação é utilizado para esboçar o volume de substâncias radioativas em fósseis no decorrer do tempo, facilitando a datação dos mesmos. Dentre essas e outras inúmeras aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias, destaca-se aquela que é objeto de estudo deste trabalho, isto é, o chamado Modelo De Gompertz, o qual será descrito na seção subsequente.

[400] Discente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis, davimlima2017@gmail.com

[401] Docente do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Pará, Campus Salinópolis, alicemessias@ufpa.br

[402] Não é objeto de estudo deste trabalho explorar tais especificidades.

O MODELO DE GOMPERTZ E O CRESCIMENTO DE TUMORES

Chama-se tumor qualquer crescimento anormal de um tecido do corpo causado pela proliferação exagerada de células, podendo ser benigno, quando não possui capacidade de se espalhar pelo resto do organismo, ou maligno, quando pode se espalhar e danificar outros tecidos e órgãos, desencadeando, então, o que é identificado como câncer[403]. São diversas as causas que podem provocar o surgimento de tumores, dentre elas, estão os fatores genéticos, a obesidade, a prática do fumo e a ingestão exagerada de bebidas alcoólicas. O tratamento destes tumores pode ser realizado de diferentes formas, dentre as quais, destacam-se a radioterapia, a quimioterapia e o transplante de células-tronco.

Em 1838, com o objetivo de estudar e modelar o desenvolvimento de tumores de forma que mais se aproximasse dos dados médicos de sua época, o matemático inglês Benjamin Gompertz (1779-1865) propôs que o volume de células tumorais se desenvolve ao longo do tempo satisfazendo a seguinte EDO:

$$\frac{dN}{dt} = rN \ln\left(\frac{K}{N}\right),$$

onde:

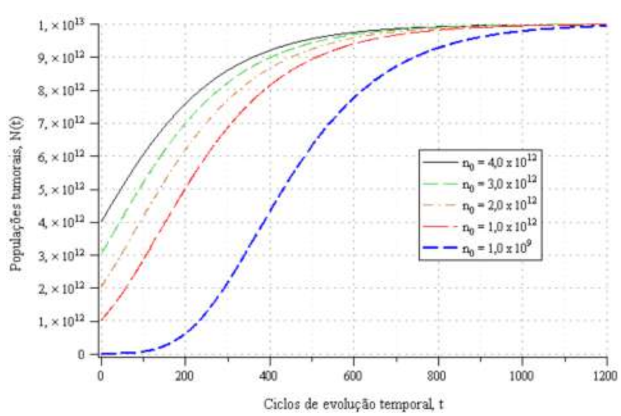
- $N = N(t)$ é a população de células tumorais no instante t;
- r é a constante de crescimento das células;
- K é o tamanho máximo que o tumor pode atingir com os nutrientes disponíveis.

A equação, então proposta, ficou conhecida como Modelo de Gompertz, cuja a solução, considerando uma população no instante inicial, ou seja, $N(0) = n_0$, é dada pela função

$$N(t) = Ke^{e^{-rt}\ln\left(\frac{n_0}{K}\right)}.$$

Apropriando-se dos parâmetros utilizados por uma das referências deste trabalho, pode-se construir o gráfico dessa solução, considerando $r = 6.10^{-3}$, $K = 10^{13}$ células, e diferentes valores para a população inicial (n_0):

Gráfico da função $N(t)$ para vários valores de n_0



Fonte: Domingues (2011, p.106)

Observa-se que seja qual for o valor tomado para n_0, tem-se:

$$N(t) = K.$$

[403] Conjunto de mais de 100 doenças que têm em comum o crescimento desordenado de células.

Ou seja, a população de células tumorais tende a crescer em direção a K na medida que o tempo passa e, mesmo que se por algum motivo a função ultrapasse esse valor, a função continuará tendendo a ele, concluindo-se então que K é a solução de equilíbrio estável do Modelo de Gompertz.

Todo esse estudo, é claro, analisa o crescimento de tumores desconsiderando os tratamentos mencionados no início deste tópico. Pesquisas que modelam esse desenvolvimento com a inclusão de um tratamento também foram desenvolvidas.

CONCLUSÃO

O trabalho apresentando cumpriu com seu objetivo de inserir, ainda que brevemente, o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias e algumas de suas aplicações na ciência. O Modelo de Gompertz, exposto nessa elaboração, é um dos modelos matemáticos mais usados no ramo da biologia para o estudo de populações, sendo desenvolvido aqui não só com a explanação de sua solução geral, mas também de algumas de suas soluções particulares considerando diferentes valores para a população inicial de células tumorais.

Neste trabalho, observou-se o quanto as modelagens matemáticas estão presentes no cotidiano e podem ser essenciais em avanços de vários âmbitos na sociedade, nesse caso em especial, na área da saúde, podendo ser indispensável em estudos envolvendo os tratamentos de câncer.

BIBLIOGRAFIA

[1] Vilhena, M. L. M.; **Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias**. 2014. 70 f. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Curso de Licenciatura Plena em Matemática, Belém, 2014. Disponível em: `https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_17.pdf`. Acesso em: 27 mar. 2024.

[2] Domingues, J. S.; **Análise do Modelo de Gompertz no crescimento de tumores sólidos e inserção de um fator de tratamento**. Biomatemática. v. 21, 2011, p. 103-112. Disponível em: `https://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio21.pdf`. Acesso em: 27 mar. 2024.

Matemática com barbantes:

uma introdução à teoria dos nós

Silveira, Deborah Silva[404] e Malagutti, Pedro Luiz Aparecido[405]

Resumo: *Este trabalho apresenta uma proposta intitulada "Matemática com Barbantes" resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), que visa introduzir de forma lúdica e prática a Teoria dos Nós no ambiente escolar. Por meio de brincadeiras como "Cama de Gato" e "Enlaçando uma Dupla", os alunos são convidados a explorar conceitos como projeção, cruzamento e enlace de nós. A abordagem foi aplicada em salas de aula do 9º ano do Ensino Fundamental, resultando em uma participação ativa dos alunos e uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos envolvidos. Além disso, a proposta promove o desenvolvimento de habilidades cognitivas, motoras e de resolução de problemas.*

Palavras-chave: *Teoria dos nós, matemática com barbantes, ensino de matemática, educação básica.*

INTRODUÇÃO

Os nós desempenham um papel vital na história humana, desde tempos antigos, quando eram usados para amarrar vestimentas e representar proteção contra os elementos naturais. Na cultura celta, eram símbolos de interconexão e eternidade, refletindo uma visão holística da vida. A lendária história do "Nó Górdio" originou a expressão "cortar o nó górdio", significando resolver um problema complexo de maneira simples. Civilizações como os incas também os utilizavam, especialmente para comunicação via quipus. Na ciência moderna, a Teoria dos Nós encontra aplicação em campos como física, matemática e indústria têxtil, evidenciando sua contínua relevância e evolução; nesse sentido, uma introdução da Teoria dos Nós na Educação Básica [406] é viável, possibilitando analogias e referências por meio de brincadeiras e mágicas com barbantes.

BRINCADEIRAS E MÁGICAS COM BARBANTES

Brincadeiras como "Cama de gato" e "Enlaçando uma dupla", além de truques de mágica, são recursos valiosos no ensino da matemática, oferecendo uma compreensão intuitiva de conceitos da Teoria dos Nós como *projeção* e *cruzamento*.

Definição 9.9 *Uma projeção é a representação de um nó em um plano* $2D$.

Definição 9.10 *Um cruzamento é o local da projeção onde dois segmentos de um mesmo nó se cruzam.*

[404]Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

[405]Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

[406]A Educação Básica abrange desde o Ensino Infantil até o Ensino Médio.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento fundamental para a estruturação dos currículos escolares do Brasil, não contempla habilidades específicas relacionadas a essa abordagem. No entando, a BNCC inclui uma unidade temática intitulada "Brincadeiras e Jogos" no Componente Curricular de Educação Física, presente do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Apesar disso, destaca o brincar como direito fundamental de aprendizagem e desenvolvimento, enfatizando a necessidade de conectar as experiências ao longo dos ciclos educacionais.

APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

Essa abordagem foi implementada em duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental em uma Escola Estadual em São Carlos, SP. Embora ambas as salas tenham seguido o mesmo roteiro de aula, cada uma apresentou seu próprio ritmo e características distintas.

De início, nenhum dos estudantes possuía familiaridade prévia com a Teoria dos Nós, contudo, todos demonstraram aptidão para compreender o conceito exposto. A narrativa da Lenda do Nó Górdio foi apresentada como meio de instigar o interesse dos participantes. Posteriormente, foram demonstrados três tipos de nós: o nó trivial, o nó trifólio e uma variação adicional do nó trivial. Utilizando a luz de um dispositivo móvel, criamos uma sombra para o nó, o que auxiliou na explicação do conceito de projeção. Prosseguindo, indagou-se qual dos nós poderia ser transformado no nó trivial, e um dos alunos prontamente se ofereceu para realizar a referida mudança. Na seção dedicada às atividades recreativas [407], constatou-se que uma parcela significativa dos alunos já estava familiarizada com a "Cama de Gato", enquanto alguns também possuíam conhecimento prévio sobre "Enlaçando uma dupla". Durante a elaboração da "Estrela Pitagórica", os participantes enfrentaram dificuldades relacionadas à coordenação motora fina necessária para manipular os fios, apesar disso, eles enfrentaram e superaram os desafios iniciais.

O jogo denominado "O Jogo do Enlaçamento" despertou interesse, caracterizando-se como uma espécie de aposta, na qual o barbante era manipulado visando a formação de dois buracos, com uma probabilidade de 50% de aprisionar o dedo ao ser puxado. Após os alunos acreditarem terem encontrado a solução, foram realizados ajustes no barbante a fim de evitar possíveis aprisionamentos.

Fig. 128: Autoria própria

A proposta também foi implementada como uma oficina durante o horário de almoço dos alunos. Utilizamos uma cartolina como chamariz e oferecemos pirulitos como incentivo para atrair mais participantes

[407] O passo a passo de cada uma está disponível em: Brincadeiras e mágicas com barbante.

e garantir um maior engajamento ao final da atividade.

Fig. 129: Autoria própria

CONCLUSÕES

A proposta se revelou bem-sucedida ao proporcionar uma experiência educacional única, evidenciada pela interação dos participantes e a aplicação prática dos conhecimentos adquiridos. Além de explorar a Teoria dos Nós, as atividades promovem o desenvolvimento do raciocínio lógico, percepção espacial, resolução de problemas e coordenação motora fina. Ao integrar a história dos nós, a Teoria dos Nós e atividades práticas com barbante, essa abordagem se mostra estimulante para a educação matemática. Ela não só permite que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas e motoras, mas também ampliem sua compreensão dos conceitos matemáticos, tornando o processo de aprendizagem mais gratificante e eficaz.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

[2] MALAGUTTI, P. L. A.; SAMPAIO, J. C. V. Mágicas, Matemática e outros mistérios. São Carlos: **EduFSCar**, 2008.

[3] OLIVEIRA, H. S. **Teoria dos Nós**. Orientador: Gabriel Ponce. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. UNICAMP - Campinas, 2018. Disponível em: `https://www.ime.unicamp.br/~gaponce/wp-content/uploads/2019/03/Teoria-dos-N%C3%B3s-Final1.pdf`. Acesso em: 10 de abr. de 2023.

[4] SANTOS, J. E. Uma Breve Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico. 1º ed. Aracaju: **Editora SEDUC**, 2021. v.1. 120 p. Disponível em: `https://siae.seduc.se.gov.br/siae.servicefile/api/File/Downloads/e0d25580-88fe-472f-b9fa-bb1c10cca6a0`. Acesso em: 02 de abr. de 2023.

Matemática dos tributos: IPVA no estado do Tocantins

Bonfim, Delfim Dias[408] e Cabral, Isadora Castro[409]

Resumo: *O presente trabalho se destina a identificar a aplicação conceitual da matemática presente na legislação do Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA) do Estado do Tocantins (TO). Analisar a relação existente entre a linguagem usual e a linguagem matemática e por conseguinte mostrar como conceitos estudados no ensino básico (porcentagem e função afim) podem ser aplicados em situações práticas habituais em uma abordagem interessante e interdisciplinar.*

Palavras-chave: *Função afim, IPVA, porcentagem.*

INTRODUÇÃO

É comum os estudantes durante as aulas de matemática indagar sobre em que aplicar os conceitos matemáticos estudados em situações do cotidiano. Também constantemente apresentam dificuldades na leitura, interpretação e coleta de dados corretamente, o que interfere diretamente no ensino de matemática. Nesse sentido apresentaremos a estreita relação entre a linguagem usual e a linguagem matemática com o propósito de explorar conceitos matemáticos (porcentagem e função afim) a partir da legislação relativa ao Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA) no Estado do Tocantins (TO).

IPVA: INSTITUCIONALIZAÇÃO, CÁLCULO COM E SEM DESCONTO

No que segue, veremos sobre a institucionalização do IPVA, o cálculo do valor IPVA (sem desconto e com desconto). A obrigatoriedade do IPVA, tem seu fundamento na Constituição da República Federativa do Brasil, de 1988 (CRFB/88) em seus Art. 155, inciso III, e Art. 158, inciso III, que seguem *in verbis*:

"Art. 155. Compete aos Estados e ao Distrito Federal instituir impostos sobre: [...]

III - propriedade de veículos automotores."

"Art. 158. Pertencem aos municípios: [...]

III - **cinquenta por cento** do produto da arrecadação do imposto do Estado sobre a propriedade de veículos automotores licenciados em seus territórios" (Brasil, 1988, grifo nosso).

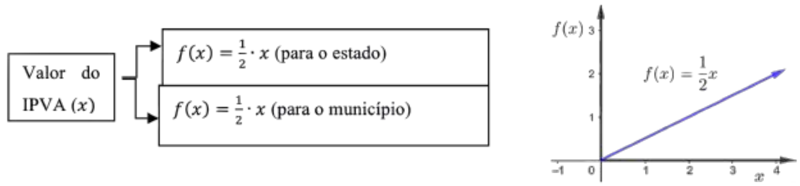
Segundo Dante (2016), temos a seguinte definição: "Uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$." Seja x o valor pago do IPVA de um veículo e $f(x)$ o valor que o ente federativo recebe. Podemos fazer o uso do conceito de função afim. Sendo assim, temos o caso particular de uma função afim em que $a = 12$ e $b = 0$. A Figura 1 mostra o diagrama e a representação geométrica.

---

[408] Prof. do Instituto Federal do Tocantins, *Campus* Dianópolis, `delfim.bonfim@ifto.edu.br`

[409] Discente do curso técnico em informática do Instituto Federal do Tocantins, *Campus* Dianópolis, `isamay2020@gmail.com`

Fig. 130: Diagrama e representação geométrica da divisão do IPVA.



Fonte: Elaborado pelos autores.

O procedimento para obter o valor do IPVA envolve dois fatores. O primeiro deles é o *Valor venal*, que são definidos por Portarias da Secretaria da Fazenda do Estado do Tocantins (SEFAZ/TO), editadas para o respectivo ano calendário, de modo que o proprietário do veículo pode obter esses valores junto ao site da SEFAZ/TO (`http://dtri.sefaz.to.gov.br`). O segundo componente é a *Alíquota.* Conforme o Código Tributário do Estado do Tocantins, em seu Art. 78:

Art. 78. As alíquotas do IPVA são:

I- $1,25\%$ para veículos terrestres utilizados no transporte de passageiros e de cargas, a seguir relacionados: ônibus; micro-ônibus; caminhão; caminhão trator; cavalos mecânicos.

II- 2% para veículos aéreos; aquáticos; [...]

IV- $2,5\%$ para veículos automóveis de passageiros, camionetas pick-up e furgões equipados com motor de até 100 HP[410] de potência bruta (SEAE); motocicletas e ciclomotores equipados com motor de até 180 cm3 de cilindrada. [...]

V– $3,5\%$ para: veículos automóveis de passageiros, camionetas pick-up e furgões equipados com motor acima de 100 HP de potência bruta (SEAE); motocicletas e ciclomotores equipados com motor acima de $180cm^3$ de cilindrada. (Tocantins, 2001).

Consideremos o conjunto A = {Valores venais dos veículos cujas características atendem o disposto no inciso I do Art. 78 }. Assim, se x é o valor venal de um determinado veículo cujasespecificações se enquadram no inciso I do Art. 78, então $x \in A$. Consideremos, também, o conjunto B = { Preço do IPVA do veículo conforme alíquota do inciso I do Art. 78 }. Assim, se $f(x)$ é o valor do IPVA do veículo de valor venal x, então $f(x) \in B$. Como a alíquota mencionada no inciso I do Art. 78 é $1,25\% = \frac{1,25}{100} = 0,0125$, podemos definir a função afim f da seguinte maneira:

$$f\colon A \to B \quad \text{dada por} \quad f(x) = 0,0125x, \quad \text{com} \quad x > 0.$$

Observamos que essa função está bem definida, pois temos um valor venal para cada veículo constante no inciso I, o qual, por sua vez, deverá pagar um valor que corresponde ao IPVA. Com raciocínio análogo, temos as seguintes funções.

Tab. 11: Representação algébrica do valor pago do IPVA.

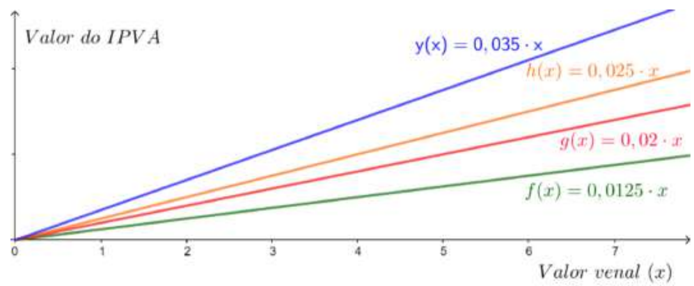
Valores venais (x), conforme Art.78 da Lei nº 1.287/2001	Alíquota	Valor do IPVA $-f(x)$
Inciso I	$1,25\%$	$f(x) = 0,0125x$, com $x > 0$
Inciso II	2%	$g(x) = 0,02x$, com $x > 0$
Inciso IV	$2,5\%$	$h(x) = 0,025x$, com $x > 0$
Inciso V	$3,5\%$	$y(x) = 0,035x$, com $x > 0$

Fonte: Elaborado pelos autores.

[410]HP: Horse Power.

A figura 2 abaixo mostra a representação geométrica das funções acima mencionadas de acordo com suas respectivas alíquotas.

Fig. 131: Representação geométrica do valor do IPVA em função do valor venal e alíquota.



Fonte: Elaborado pelos autores.

O Art. 3º da Portaria SEFAZ nº 1.208, de 14 de dezembro de 2023, diz-nos que "É concedido o *desconto de* 10% sobre o valor do IPVA, caso o contribuinte antecipe seu pagamento, em parcela única, no prazo fixado na Tabela I do Anexo I a esta Portaria" (Tocantins, 2023). Consideremos x o valor inicial do IPVA. O valor $V(x)$, após o desconto de 10% sobre o preço inicial x, é dado por: $V(x) = (100\%)x - (10\%)x = (90\%)x = 0,90x$, com $x > 0$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio de uma análise minuciosa da legislação vigente que abordam sobre o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), em particular ao cálculo adotado estado do Tocantins, podemos identificar a aplicação de conceitos matemáticos básicos tais como porcentagem e função afim, além de contribuir para a compreensão do procedimento da arrecadação, divisão por ente federativo e a fiscalização da aplicação do imposto. Mais ainda, outros conceitos como taxa de crescimento (ou variação percentual), princípio fundamental de contagem e combinação simples podem ser abordados a partir da legislação em vigor. Por fim, mostramos que a matemática está presente em situações rotineiras, aproximando a teoria e a prática bem como contribui para o efetivo exercício da cidadania.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, 1988. Disponível em: `https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm`. Acesso em: 30 mar. 2024.

[2] Dante, L. R.; **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2016.

[3] Tocantins; **Lei nº 1.287, de 28 de dezembro de 2001**. Dispõe sobre o Código Tributário do Estado do Tocantins, e adota outras providências. Palmas, TO 2001. Disponível em: `https://www.al.to.leg.br/arquivos/lei_1287-2001_68306.PDF`. Acesso em: 30 mar. 2024.

[4] Tocantins; **Portaria SEFAZ nº 1.208, de 14 de dezembro de 2023**. Dispõe sobre o lançamento, a cobrança e o pagamento do IPVA. Palmas, 2017. Disponível em: `http://dtri.sefaz.to.gov.br/`. Acesso em: 30 mar. 2024.

Resolução de equações diofantinas lineares via determinantes e frações contínuas.

Bonfim, Delfim Dias; Lima, Laura Maria Ferreira e Pimentel, Ryan Rosa[411]

Resumo: *O presente trabalho objetiva a apresentação de um método de resolução de equações diofantinas lineares, utilizando, para tal finalidade, os conceitos de determinantes e frações contínuas. Apresentaremos a definição de frações contínuas simples finita, convergente e alguns teoremas essenciais ao nosso propósito. Em seguida, mostraremos a relação entre determinantes e as frações contínuas. Por fim, abordaremos sobre as equações diofantinas lineares e o método para resolução utilizando frações contínuas e determinantes bem como uma aplicação na resolução de um problema.*

Palavras-chave: *Equações diofantinas lineares, determinantes, frações contínuas.*

INTRODUÇÃO

Em geral, para resolver equações diofantinas lineares, utilizamos o algoritmo de Euclides estendido (de "trás para frente"). Neste trabalho, apresentaremos um método diferente para resolução de tais equações utilizando frações contínuas e determinantes. Para esse intuito, apresentaremos as definições de frações contínuas simples finita, determinantes e equações diofantinas lineares bem como os resultados fundamentais.

Mostraremos como obter soluções particulares e gerais para equações diofantinas lineares utilizando frações contínuas e determinantes, ilustrando a estreita relação entre esses conceitos. Finalmente, vamos resolver uma situação-problema utilizando o método.

FRAÇÕES CONTÍNUAS: DEFINIÇÃO E RESULTADOS

Inicialmente, definiremos fração contínua simples e alguns resultados essenciais. Omitiremos as demonstrações dos resultados, que podem ser obtidas em [1], [2] e [3].

Definição 9.11 *Uma fração contínua simples finita é uma expressão da forma*

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}, \tag{60}$$

sendo $a_2, \ldots, a_n$ números inteiros positivos e a_1 um número inteiro qualquer. Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são denominados quocientes parciais. Denotaremos (9.11) por $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

[411]Todos os autores são do Instituto Federal do Tocantins-*Campus* Dianópolis. Este trabalho contou com apoio financeiro do Instituto Federal do Tocantins (IFTO).

O Teorema a seguir relaciona frações contínuas simples e finita aos números racionais.

Teorema 9.4 *Qualquer fração contínua simples e finita* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Definição 9.12 *Denominamos convergente de ordem* i *da fração contínua* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *o número*

$$c_i = \frac{p_i}{q_i} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_i}}}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

O Teorema a seguir mostra como obter os numeradores e os denominadores do i-ésimo convergente de forma recorrente (usamos a representação do número em frações contínuas e as condições iniciais).

Teorema 9.5 *O numerador* p_i *e o denominador* q_i *do* i*-ésimo convergente* $c_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ *da fração contínua* $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n]$ *satisfazem as equações*

$$\begin{cases} p_i &= a_i \cdot p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i \cdot q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

com as condições iniciais $p_{-1} = 0$, $q_{-1} = 1$, $q_{-1} = 1$ *e* $q_0 = 0$.

DETERMINANTES E AS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Apresentaremos a relação existente entre as frações contínuas e os determinantes.

Definição 9.13 *O determinante de uma matriz quadrada* A *de ordem* n*, denotado por* $det(A)$*, é um número real a ela associado por meio de operações que envolvem todos os elementos da matriz.*

Para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada A de ordem n, podemos usar o conhecido *desenvolvimento de Laplace*, como segue: escolhemos convenientemente uma fila (linha i ou coluna j) de A, de modo que

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}) \text{ ou } det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det(A_{ij}),$$

sendo A_{ij} a matriz obtida de A por supressão da sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna.

O Teorema 9.6 nos mostra que o máximo divisor comum de dois convergentes consecutivos é 1. A demonstração pode ser feita por indução sobre n, mais detalhes em [1], [2] e [3].

Teorema 9.6 (Fórmula do Determinante) *A relação*

$$\begin{vmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{vmatrix} = p_i \cdot q_{i-1} - p_{i-1} \cdot q_i = (-1)^i \tag{61}$$

é verdadeira para todo $i \geq 0$*, sendo* p_i *e* q_i *o numerador e o denominador, respectivamente, do i-ésimo convergente* (c_i).

O Teorema 9.7 permite obter o convergente c_n, conhecendo apenas os quocientes parciais $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ da fração contínua. A demonstração pode ser feita por indução sobre n, mais detalhes em [1] e [2].

Teorema 9.7 *Dada uma fração contínua simples finita* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$*, o seu* n*-ésimo convergente é dado por*

$$c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}}.$$

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

A resolução de vários problemas em Matemática conduzem a equações cujas soluções são números inteiros (em particular positivos). Sobre as demonstrações omitidas, consultar [1], [2] e [3].

Definição 9.14 *Uma equação da forma $ax + by = c$ ou $ax - by = c$, sendo a, b e c números inteiros não nulos, é denominada equação diofantina linear. Um par ordenado (x_0, y_0) de números inteiros que satisfazem a equação é chamada solução particular da equação diofantina linear.*

Teorema 9.8 *Sejam a e b inteiros positivos tais que $d = mdc(a, b)$. A equação $ax + by = c$ admite soluções inteiras se e somente se d divide c.*

Se $ax + by = c$ possui solução, é imediato verificar que essa equação é equivalente à $a_1x + b_1y = c_1$, em que $a_1 = \dfrac{a}{d}$, $b_1 = \dfrac{b}{d}$ e $c_1 = \dfrac{c}{d}$ tal que $mdc(a_1, b_1) = 1$. Assim, podemos nos concentrar apenas em $ax + by = c$, tais que $d = mdc(a, b) = 1$.

Teorema 9.9 *Se a e b são números inteiros positivos, tais que $d = mdc(a, b) = 1$, então a equação*

$$ax - by = 1 \tag{62}$$

possui infinitas soluções inteiras.

Demonstração. Pelo Teorema 9.4, podemos representar o número racional $\dfrac{a}{b}$ como uma fração contínua simples e finita

$$\frac{a}{b} = [a_1, a_2, \dots, a_n]. \tag{63}$$

Os dois últimos convergentes $c_{n-1} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $c_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a}{b}$ constituem a "chave" para a solução da equação $ax - by = 1$, pois eles satisfazem as relações do Teorema 9.6, ou seja, $p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n$, e, substituindo $p_n = a$ e $q_n = b$, obtemos

$$a \cdot q_{n-1} - b \cdot p_{n-1} = (-1)^n. \tag{64}$$

Se n é par, segue que $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$ é uma *solução particular* da equação $ax - by = 1$. Se n é ímpar, temos que $(-1)^n = -1$. Neste caso, podemos modificar o último termo a_n da expansão da fração contínua obtida em (63), substituindo

$$\begin{cases} \text{se } a_n > 1,\ \dfrac{1}{a_n} \text{ por } \dfrac{1}{a_n - 1 + \dfrac{1}{1}} & \Rightarrow\ [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1] \\ \text{se } a_n = 1,\ \dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}} \text{ por } \dfrac{1}{a_{n-1} + 1} & \Rightarrow\ [a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1] \end{cases} \tag{65}$$

Uma vez que obtivemos a solução particular (x_0, y_0) da equação (62), decorre facilmente a sua *solução geral*. Para isso, consideremos (x, y) outra solução de (62). Logo,

$$ax - by = ax_0 - by_0 = 1 \Rightarrow a(x - x_0) = b(y - y_0). \tag{66}$$

Como $mdc(a, b) = 1$, segue que b divide $x - x_0$. Logo, existe um número inteiro t tal que

$$x - x_0 = bt \iff x = x_0 + bt. \tag{67}$$

Substituindo (67) em (66), obtemos

$$b(at) = b(y - y_0) \iff y - y_0 = at \iff y = y_0 + at. \tag{68}$$

Portanto, qualquer solução (x, y) da equação $ax - by = 1$ é da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 + at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{69}$$

Por outro lado, se (x_0, y_0) é uma solução particular de $ax - by = 1$, é fácil ver que as relações dadas em (69) satisfazem a equação. □

Portanto, as soluções dadas, conforme (69), são denominadas de *solução geral* da equação $ax - by = 1$.

As soluções da equação $ax + by = c$ decorrem do Teorema 9.9. A demonstração pode ser obtida em [1] e [3].

Teorema 9.10 *Se a e b são números inteiros positivos, tais que $d = mdc(a, b) = 1$ e $(x_0 = q_{n-1}, y_0 = p_{n-1})$ é uma solução de $ax + by = c$, então todas as soluções são dadas por*

$$\begin{cases} x = c \cdot q_{n-1} + bt \\ y = c \cdot (-p_{n-1}) - at \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{Z}. \tag{70}$$

Problema 9.1 (OBMEP/2012/N3) Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 13 E) 23

Seja x o número de laços e y o número de botões, temos $0,07x + 0,04y = 2,99 \iff 7x + 4y = 299$. Utilizando o algoritmo de Euclides e utilizando (65) temos $\frac{7}{4} = [1, 1, 3] = [1, 1, 2, 1] = [a_1, a_2, a_3, a_4]$. Como $n = 4$, segue que $x_0 = q_{n-1} = q_3$ e $y_0 = p_{n-1} = p_3$ são soluções da equação $7x + 4(-y) = 1$. Usando o Teorema 9.7 e calculando os determinantes, obtemos

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a_1} & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{a_2} & -1 \\ 0 & 1 & \mathbf{a_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a_2} & -1 \\ 1 & \mathbf{a_3} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 \\ 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}} = \frac{5}{3}. \text{ Logo, } (x_0, y_0) = (3, 5).$$

Os números x e y devem ser positivos e usando 70) segue que

$$\begin{cases} x = 897 + 4t \\ y = -1495 - 7t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 897 + 4t > 0 \\ -1495 - 7t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -224,25 \\ t < -213,57 \end{cases}, \; t \in \mathbb{Z}. \tag{71}$$

Assim, $t = [-224, -223, \cdots, -213]$. Como as blusas são iguais, gastou a mesma quantidade de laços e botões em cada, segue que o número de blusas é um divisor de 299. Logo, os possíveis valores de t que interessam são $t = -224$ e $t = -221$, isto é,

$$\begin{cases} x = 897 + 4 \cdot (-224) = 1 \\ y = -1495 - 7 \cdot (-224) = 73 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = 897 + 4 \cdot (-221) = 13 \\ y = -1495 - 7 \cdot (-221) = 52 \end{cases}$$

Para atender as exigências do problema, temos que ela usou 52 botões e 13 laços. Portanto, a costureira fez 13 blusas.

CONCLUSÕES

Diante o exposto, para valores em que a representação da fração contínua não seja muito grande este método torna-se muito mais elegante e interessante que a abordagem usando o algoritmo de Euclides estendido. Portanto, a utilização de determinantes e frações contínuas constitui-se em uma abordagem alternativa para a resolução de equações diofantinas lineares.

BIBLIOGRAFIA

[1] BONFIM, D. D. **Frações contínuas com aplicações**. UFT, Palmas/TO, 2014. Disponível em `https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=920&id2=372`. Acesso em 04.mar.2024.

[2] MOORE, C. G. **An introduction to continued fractions**. Washington: The National Council of Teachers of Mathematics, 1964.

[3] OLDS, C.D. **Continued fractions**. New York: Handom House The L. W. Singer Company, 1963. (New Mathematical Library Series).

Downside risk e médias móveis para otimização de um portfólio e do processo de compra e venda de ativos financeiros

Rodrigues, Denise Maria[412] e Carvalho, Silvia Maria Simões

Resumo: *No mercado financeiro a incerteza sempre esta presente. Ao montar um portfólio o investidor sempre deseja ter o maior retorno possível. A otimização de uma carteira de investimentos através da Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz associada a Programação Linear e o método Simplex é uma prática recorrente e importante no contexto atual. O presente trabalho também conta com o modelo Downside Risk para a constituição de um portfólio.*

Palavras-chave: *Programação linear, simplex, investimentos, Downside Risk.*

INTRODUÇÃO

Pesquisa Operacional

A Pesquisa Operacional (PO) é um método científico de tomada de decisão, se destacou como uma das grandes evoluções tecnológicas do século XX. Sua primeira aplicação ocorreu em 1938, na Inglaterra, para a realocação de radares. A origem da PO está fortemente relacionada com a Segunda Guerra Mundial, quando necessitou-se dos conhecimentos científicos para resolver problemas militares. Com o objetivo de buscar métodos eficientes para o uso dos recursos escassos durante a guerra, os governos norte-americano e britânico contaram com pesquisadores que estudaram problemas como posicionamento de radares, armazenamento de munição, transporte de tropa, etc.

Programação Linear

Um método a ser destacado da Pesquisa Operacional é Programação Linear (PL). Quando os estudos voltados a PO se intensificavam, o cientista matemático norte-americano George Dantzing, tornava-se especialista em métodos de programação e planejamento. Foi durante seu trabalho na RAND Corporation no projeto SCOOP (*Scientific Computation of Optimum Programs*) que Dantzig desenvolveu o método Simplex (1947) [1]. Sua técnica para resolver problemas de Programação Linear foram aplicadas para a tomada de decisão em problemas militares da Força Aérea.

Um problema de Programação Linear trabalha com uma função linear sujeita a certas restrições também lineares, a qual deve ser maximizada ou minimizada. O presente trabalho envolve problemas que sobre gestão financeira, como o dinheiro é um recurso escasso, torna-se necessária uma tomada de decisão para seu melhor aproveitamento.

---

[412] Afiliação. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo

Forma Padrão

Diz-se que um problema está na *Forma Padrão* quando as restrições são expressadas através de igualdades e todas as variáveis são não negativas [2].

Um problema de PL pode ser descrito na forma matricial:

$$\begin{array}{llcl} min & c^T x & & \\ s.a & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0, \end{array} \tag{72}$$

Onde $A \in^{m\times n}$, $x \in^{n\times 1}$, $c \in^{n\times 1}$ e $b \in^{m\times 1}$ com $m \leq n$. Os coeficientes c_j são conhecidos, denominados coeficientes de custo, x_j são as variáveis de decisão a serem determinadas, a_{ij} são coeficientes tecnológicos e b_i são termos independentes, que representam os recursos associados ao problema.

Ao buscar a solução ótima em uma minimização , deseja-se encontrar $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para toda solução x factível [3].

Simplex

O algoritmo Simplex visa a solução de um Problema de Programação Linear. Dentre as *soluções básicas factíveis* de um Problema de Programação Linear (PPL) pode se encontrar o valor ótimo, denominado *solução básica factível ótima*. Essa propriedade é assegurada pelo *Teorema da Programação Linear* [2].

Teorema 9.11 ***(Teorema da Programação Linear)*** *Dado um problema de programação linear em sua forma padrão (Equação (72)), em que A é uma matriz $m \times n$ de posto m, tem se:*

i *se existe uma solução factível, então existe uma solução básica factível*

ii *se existe uma solução ótima, então existe uma solução básica ótima.*

O algoritmo matemático Simplex seleciona m colunas linearmente independentes de A, formando a matriz quadrada $B_{m\times m}$, denominada *matriz básica*. As $n-m$ colunas restantes da matriz A formam o que é chamado de *matriz não básica*.

O vetor x é separado em duas partes: o *vetor das variáveis básicas* x_B, o qual é formado pelas m variáveis que correspondem às colunas selecionadas na matriz B e o *vetor das variáveis não básicas* x_N é formado pelas $n-m$ variáveis de N.

Se forem fixados valores zeros à x_N a solução obtida através do método Simplex é chamada de *solução básica*, em que:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b \\ \;\; x_N = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Se x_B atende às restrições de não negatividade, ou seja $x_B = B^{-1}b \geq 0$, diz-se que x é uma solução básica factível.

Uma maneira de se representar o método simplex é através do *tableau*. De modo geral, a ideia do método simplex é percorrer através das soluções básicas factíveis de um problema na forma padrão, de modo a diminuir o valor da função objetivo até se encontra o valor ótimo.

Dualidade

Um PPL decorrente de outro é denominado *Dual*, estes são opostos que se complementam. O original é chamado de *Primal*.

A maneira em que o dual se constitui a partir do primal faz com que a solução ótima de um problema fornece a solução ótima do outro também.

A dualidade pode ser expressa pelo par de problemas (74):

$$\begin{array}{llll} & \textit{Primal} & & \textit{Dual} \\ \min & c^T x & \max & b^T y \\ \text{s.a} & Ax = b & \text{s.a} & A^T y \leq c. \\ & x \geq 0 & & y \text{ livre} \end{array} \tag{74}$$

Teoria Moderna de Portfólios

No mercado financeiro a incerteza sempre esta presente. Ao montar um portfólios o investidor sempre deseja ter o maior retorno possível. Se esta fosse a única preocupação, bastava procurar o ativo com maior rentabilidade, entretanto sempre há um risco envolvido ao retorno, e estes apresentam certa proporção.

Para Markowitz, uma carteira deveria ter mais do que um conjunto de bons ativos, ela deveria ser equilibrada, e *diversificada*, o que significa que o capital investido deveria estar em diferentes ativos para que a incerteza acerca a evolução futura dos ativos fosse reduzida. Para otimizar uma carteira, a Teoria Moderna de Portfólios visa o maior lucro possível e a com a redução dos riscos.

A taxa de retorno R_p de um portfólio em um período determinado, com g ativos é dada por :

$$R_p = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \ldots + w_g R_g. \tag{75}$$

Onde: $R_i, i = 1, \cdots, g$ é a taxa de retorno do ativo g no período;
$w_i, i = 1, \cdots, g$ é peso do ativo i no portfólio;

Quando um risco é sistemático, não é possível diminuí-lo através da diversificação, pois ele afeta o mercado como um todo. No entanto, se um risco é não sistemático, aquele que está associado a um setor específico, é possível ser reduzido buscando investir em diferentes setores.

Na Teoria Moderna de Portfólios, também conhecida como modelo média-variância, as variações positivas em torno da média significam risco para a carteira, por essa razão a teoria apresenta algumas premissas que do tornam menos eficiente. O modelo utiliza o desvio padrão como medida única do risco e uma distribuição normal para os retornos, o que nem sempre é satisfeito na prática [4].

Downside Risk

A Teoria Moderna de Portfólios de Markowitz impactou de forma positiva a economia e das finanças, modificando a forma em que investidores constituem suas carteiras de investimentos. Um marco tão importante para economia teve por consequência o desenvolvimento de novos estudos baseados em seus princípios, assim como o modelo *Downside Risk*. A expansão do modelo é conhecido como Teoria Pós-Moderna de Portfólio, do inglês *Post Modern Portfolio Theory* (PMPT).

No modelo matemático da teoria de Markowitz são consideradas as variações de um ativo como risco, sejam elas positivas ou negativas. No modelo Downside Risk apenas as variações negativas são consideradas, ou seja, apenas as oscilações abaixo da média que representam perda ao investidor são consideradas.

O risco de um portifólio neste modelo passa a ser considerado como a semivariância, não mais a variância em sua totalidade. Oscilações positivas não representam perda do capital investido, isto porque significa que o retorno do ativo está acima da média histórica do período, o que significa maior retorno ao investidor.

Seja z_i a diferença entre uma amostra e a média, ou seja, $z_i = x_i - \bar{x}$, considerando apenas as variações de um ativo que estão abaixo da média, tem se que [4]:

$$min\{z_i, 0\} = \begin{cases} z_i, & \text{se } z_i < 0; \\ 0, & \text{se } z_i \geq 0. \end{cases} \tag{76}$$

Assim, a semivariância ζ de n amostras é dada por :

$$\zeta = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{n} \tag{77}$$

A abordagem Donside Risk pode reduzir o risco, mantendo ou melhorando o retorno esperado através da semivariância [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] DANTZIG, G. B. Linear programming. *Operation Research (Informs)*, v. 50 n.1, p. 42 – 47, 2002.

[2] LUENBERGER, D. G. *Linear and Nonlinear Programming.* Reading: Addison-Wesley - fourth edition, 2015.

[3] ARENALES M.; ARMENTANO, V. A. M. R. Y. H. H. *Pesquisa Operacional.* [S.l.]: Campus/elsevier, 2007.

[4] FREITAS, C.; SANTIAGO, Y.; CARVALHO, S. *Downside risk aplicado a carteiras de ações brasileiras durante período pandêmico da covid-19. Trends in Computational and Applied Mathematics,* SciELO Brasil, v. 24, p. 557–574, 2023.

[5] ROM, B. M.; FERGUSON, K. W. Post-modern portfolio theory comes of age. *The Journal of Investing,* Institutional Investor Journals Umbrella, v. 2, n. 4, p. 27–33, 1993.

Aplicação do TDMA na solução numérica de algumas EDPs

Garcês, Deyvisson[413] e Araújo, Manoel[414]

Resumo: *O Tridiagonal Matrix Algorithm (TDMA) é um esquema numérico, decorrente da fatoração LU, para a solução de sistemas lineares cujas matrizes são tridiagonais. A sua eficiência computacional decorre do número reduzido de operações comparado com outros métodos diretos. Essa característica faz com que ele seja largamente utilizado para a solução numérica de Equações Diferenciais Parciais (EDPs), cujas matrizes, após o processo de discretização, resultam em matrizes de banda que podem ser decompostas em matrizes tridiagonais, como o método de Euler implícito usado para a solução da equação do calor unidimensional, ou o método de Gauss-Seidel por linha (LGS), usado na solução da equação de Laplace em duas dimensões. A discretização das equações é feita com o método das Diferenças Finitas, e a implementação computacional será feita com o software GNU OCTAVE.*

Palavras-chave: *TDMA, métodos numéricos, diferenças finitas, equações diferenciais.*

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, será implementado o algoritmo TDMA no Octave para resolver numericamente Equações Diferenciais Parciais como a equação do calor unidimensional e de Laplace. O TDMA destaca-se pela eficiência ao lidar com matrizes tridiagonais, reduzindo o número de operações e simplificando o processo de resolução dessas equações complexas.

TRIDIAGONAL MATRIX ALGORITHM (TDMA)

O TDMA é um método numérico que objetiva resolver sistemas lineares tridiagonais $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde as matrizes $\mathbf{A}$ são da forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \gamma_2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \tag{78}$$

Pela fatoração $\mathbf{LU}$, podemos decompor a matriz $\mathbf{A}$ de tal forma que $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, onde $\mathbf{L}$ é uma matriz triangular inferior e $\mathbf{U}$, triangular superior.

[413]Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará

[414]Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará

Assim, o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$ será equivalente a $(\mathbf{LU})\mathbf{x} = \mathbf{d}$. Fazendo $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$. Então, temos $\mathbf{Ly} = \mathbf{d}$. Dessa forma, resolvendo $\mathbf{Ly} = \mathbf{d}$ e, depois, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, determinaremos a solução para o nosso sistema.

Da igualdade de matrizes (78) e fazendo algumas manipulações algébricas, obtemos os coeficientes das matrizes $\mathbf{L}$ e $\mathbf{U}$:

$$b_k = \beta_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

$$\gamma_k = \frac{c_k}{\alpha_k}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

$$\alpha_{k+1} = a_i + 1 - \gamma_i \beta_i, \qquad k = 1, \ldots, n-1.$$

Com isso, podemos usar substituição direta e reversa para resolver os sistemas $\mathbf{Ly} = \mathbf{d}$ e $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$, obtendo assim a solução procurada.

APLICAÇÃO DO TDMA NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EDPS

Neste trabalho faremos a aplicação do algoritmo para a solução de equações diferenciais usando o método de diferenças finitas. Resolveremos a Equação do calor unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{79}$$

usando o método de Euler implícito e da equação de Laplace em duas dimensões

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{80}$$

utilizando o método de Gauss-Seidel por Linha (LGS).

Em ambas as técnicas, a matriz resultante da discretização tem a característica de ser tridiagonal, o que possibilita a utilização do TDMA.

As soluções numéricas serão obtidas a partir da implementação de um código no software aberto gnu Octave.

CONCLUSÕES

Em resumo, o TDMA, implementado com o GNU Octave, se mostra como uma ferramenta eficiente para a solução numérica de sistemas lineares tridiagonais, especialmente quando aplicado à discretização de EDPs pelo método das Diferenças Finitas.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. de Oliveira Fortuna. Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos Vol. 30. Edusp, 2000.

[2] A. Quarteroni e F. Saleri. CÁLCULO CIENTÍFICO com MATLAB e Octave. Springer Milan, 2007.

[3] H.K. Versteeg e W. Malalasekera. An Introduction to the Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method. London: Longman Group, 1995.

Existência e unicidade de solução para equações diferenciais com memória dependendo do estado via Teorema da Contração[415]

Viana, Edmara da Silva[416]

Resumo: *A teoria de equações diferenciais com memória dependendo do estado ocupa hoje um lugar de destaque na teoria geral de equações diferenciais com memória, com resultados independentes, altamente não triviais e problemas em aberto. Em termos gerais, uma equação com memória dependendo do estado é uma equação diferencial que apresenta termos de memória que podem ser descritos, por exemplo, na forma* $u(\sigma(t, u(t)))$*. Esta simples característica, estabelece uma diferença fundamental com os outros modelos e as outras teorias sobre equações diferencias com memória.*

Palavras-chave: *Equações diferenciais com memória, existência e unicidade de solução, teorema da contração.*

INTRODUÇÃO

A teoria de equações com memória dependendo do estado teve início numa palestra de Rodney Driver sobre uma equação diferencial funcional do tipo neutra deduzida a partir do estudo de um problema de eletrodinâmica, no Congresso "International Sympos. Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics", em 1963. O problema apresentado por Driver, pode ser representado na forma

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(g(t, x(t))), x'(h(t, x(t)))), t \in [0, a], \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [-p, 0] \end{cases} \tag{81}$$

onde $f \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g, h \in C([0, a] \times \mathbb{R}^n; [-p, a])$ e $\phi \in C([-p, a]; \mathbb{R}^n)$. No problema (81) os termos $g(t, x(t))$ e $h(t, x(t))$ são os termos que dão sentido ao conceito de memória dependendo do estado. O objetivo do trabalho foi o estudo e simplificação dos resultados presentes em [2], além de propor o uso do Teorema da Contração para se obter uma única solução do problema (82)-(83). Em [2] é estudada uma classe de equações neutras explícitas com memória dependendo do estado que podem ser representadas na forma

$$u'(t) = Au(t) + F\left(t, u(t), \int_0^t K(t,\tau) u'(\sigma(\tau, u(\tau))) d\tau\right), \ \ t \in [0, a], \tag{82}$$

$$u_{|_{[-p,0]}} = \varphi \in C([-p, 0]; X), \tag{83}$$

[415]Este trabalho foi apoiado pela Fundação de Amparo a Pesquisa de São Paulo (FAPESP)

[416]Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)

onde temos que X é um espaço de Banach, $A : X \to X$ é um operador linear limitado e gerador de um C_0-semigrupo compacto de operadores lineares limitados $(e^{At})_{t\geq 0}$ em X, $\{K(t,s) : t,s \in [0,a]\}$ é uma família de operadores lineares limitados de X em X, $F \in C([0,a] \times X \times X; X)$ e $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times X); [-p,a])$.

Objetivos e resultados

Usando o Teorema do Ponto fixo de Schauder, em [2] é estudada a existência de soluções para o problema (82)-(83). Além disso, também é estudada a unicidade de soluções. Especificamente, em [2] é provado o seguinte resultado.

Teorema 9.12 *Assuma que as condições $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi \in C^1([-p,0]; X)$. Então existe uma solução $u \in C([-p,b]; X)$ de (82)-(83) em $[-p,b]$ para algum $b \in (0,a]$.*

Onde as condições $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_{F,\sigma}$ são:

Condição 9.1 *$\mathcal{L}_\alpha$: $\alpha \in (0,1]$, $K : \{(t,s) : t,s \in [0,a]\} \to \mathcal{L}(X)$ é uma função tal que*

(a) *$K(t,\cdot) \in L^{\frac{1}{(1-\alpha)}}([0,t], \mathcal{L}(X))$ para todo $t \in [0,a]$ e*

$$\Theta(0,b) = \sup_{s\in[0,b]} \Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \|^{\frac{1}{1-\alpha}} d\tau \Big)^{(1-\alpha)} < \infty, \quad \forall\, b \in [0,a]. \tag{84}$$

Condição 9.2 *$\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$: $F \in L^q_{Lip}([0,a] \times X \times X; X)$ para algum $q \geq 1$ e vamos ter que $\sigma \in C_{Lip}([0,a] \times X; [-p,a])$ e $\sigma(t,x) \leq t$ para todo $(t,x) \in [0,a] \times X$.*

Estudando e simplificando o Teorema 9.12, foi proposto outra maneira de encontrar uma única solução para o problema (82)-(83) utilizando o Teorema da Contração e considerando que o operador A é limitado, a seguir enunciamos o resultado obtido e sua demonstração.

Teorema 9.13 *Suponha que as condições $\mathcal{L}_{\mathbf{F},\sigma}$ e $\mathcal{L}_\alpha$ são satisfeitas, que $\sigma(0,\varphi(0)) < 0$ e que $\varphi' \in C_{Lip}([-p,0]; X)$. Então existe uma única solução $u \in C^1([-p,b]; X)$ do problema (82)-(83) para algum $0 < b < a$.*

Demonstração: Sejam ρ, r_1 e $0 < b \leq a$ definidos como na prova do Teorema 1.1 em [2]. Vamos supor que "b" é tal que

$$C_0 \| [F]_{(\cdot,\cdot)} \|_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho)(1 + [\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip}\Theta(0,b)b^\alpha) \| u - v \|_{C([0,b];X)} < 1.$$

Sejam $S(b)$ e $\Gamma : S(b) \to C([-p,b]; X)$ também definidos como na prova do Teorema 1.1 em [2]. Procedendo como na prova mencionada, vemos que $\Gamma(S(b)) \subset S(b)$. Para provar que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração, para $u, v \in S(b)$ e $t \in [0,b]$, note que

$$\begin{aligned}
&\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| \\
&\leq \;\; \Big\| \int_0^t e^{A(t-s)}(F(s,u(s),(\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s,v(s),(\varphi')^\sigma_{K,v}(s)))ds \Big\| \\
&\leq \;\; C_0\Big(\int_0^t \| F(s,u(s),(\varphi')^\sigma_{K,u}(s)) - F(s,v(s),(\varphi')^\sigma_{K,v}(s))) \| ds\Big) \\
&\leq \;\; C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad\; +C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho)\Big(\int_0^s \| K(s,\tau) \| \| \varphi'(\sigma(\tau,u(\tau))) - \varphi'(\sigma(\tau,v(\tau))) \| d\tau\Big)ds \\
&\leq \;\; C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)}\mathcal{K}_F(\rho) \| u - v \|_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad\; +C_0\mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)}\Big([\varphi']_{Lip}[\sigma]_{Lip} \| u - v \|_{C([0,b];X)} \int_0^s \| K(s,\tau) \| d\tau\Big)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad C_0 \int_0^t [F]_{(s,s)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} ds \\
&\quad\ + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) \int_0^t [F]_{(s,s)} \big([\varphi']_{Lip} [\sigma]_{Lip} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \Theta(0,b) b^{\alpha} \big) ds \\
&\leq \quad C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \\
&\quad\ + C_0 \mathcal{K}_F(\rho) [\varphi']_{Lip} [\sigma]_{Lip} \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \Theta(0,b) b^{\alpha} \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \\
&\leq \quad C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \big(1 + [\varphi']_{Lip} [\sigma]_{Lip} \Theta(0,b) b^{\alpha} \big) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} \\
&\leq \quad C_0 \parallel [F]_{(\cdot,\cdot)} \parallel_{L^1(0,b)} \mathcal{K}_F(\rho) \big(1 + [\varphi']_{Lip} [\sigma]_{Lip} \Theta(0,b) b^{\alpha} \big) \parallel u - v \parallel_{C([0,b];X)} .
\end{aligned}
$$

Isto prova que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $S(b)$ e que $\Gamma(\cdot)$ possui um único ponto fixo $u \in S(b)$. Como o operador A é limitado e $F(\cdot, u(\cdot), (\varphi')_{K,u}(\cdot))$ é contínua, segue do anterior que $u(\cdot)$ é a única solução de (82)-(83) em $[-p, b]$. ∎

CONCLUSÕES

Nossos estudos permitiram entender e simplificar o Teorema 9.12 presente em [2], além de propor outra maneira de encontrar uma única solução para o problema (82)-(83), quando consideramos que A é um operador limitado. Em particular, nota-se que em [2] os resultados são provados assumindo que o operador A não necessariamente seja limitado.

BIBLIOGRAFIA

[1] Driver, Rodney D.A functional-differential system of neutral type arising in a two-body problem of classical electrodynamics. **In: International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics. Academi Press,** 1963. p. 474-484.

[2] HERNÁNDEZ, E. **On explicit abstract neutral differential equations with state-dependent delay.** Proc. Amer. Math. Soc., v. 151, n. 03, 2023. p. 1119-1133.

Laboratório de ensino da matemática

Do Planejamento a Ação

Maria Tereza Silva Dionizio, Brizza; Vitória Laureano Santos, Maria; Scorfi Galian, Eduardo[417]; Henrique Brasão Martins, Etienne e Verrengia D'Antonio Regina, Sandra

Resumo: *O Laboratório de Ensino de Matemática é um espaço destinado à reflexão e elaboração de recursos, materiais e ações que visam auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem de matemática tanto de estudantes da rede básica de ensino quanto de professores em formação inicial e continuada. Além dos materiais e da área física que fornece, esse espaço constitui-se como um lugar capaz de suscitar a reflexão de estudantes de graduação integrantes do projeto a respeito do fazer docente em sala de aula. Nesse sentido, o presente trabalho tem por objetivo evidenciar, de forma breve, as ações do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (LEM/UEM), procurando descrever seus objetivos e as etapas necessárias para a organização das atividades realizadas. Ancorados pela pesquisa qualitativa de cunho descritivo apresentamos nossas vivências e aprendizagens nesse espaço.*

Palavras-chave: *Matemática, prática de ensino, recursos pedagógicos, educação básica.*

INTRODUÇÃO

O Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (LEM/UEM) é um espaço voltado "[...] ao desenvolvimento e aplicação de atividades didático-pedagógicas em Matemática" (Zampirolli, Trivizoli, Verrengia, 2020, p.1), contribuindo para a efetivação do tripé universitário: Ensino, Pesquisa e Extensão.

O Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) é um projeto de extensão do Departamento de Matemática (DMA) na Universidade Estadual de Maringá que está em atuação desde sua criação em meados da década de 1980. No decorrer dos anos, recebeu diversas nomenclaturas, passou por mudanças em sua estrutura física e em sua finalidade. Em 2010, sob a Coordenação do Professor João César Guirado, um dos fundadores e responsável pela atual concepção do LEM, o laboratório foi consolidado como um projeto permanente do DMA, vinculado à Diretoria de Extensão da UEM. Constituindo-se hoje em um espaço próprio para o desenvolvimento e aplicação de atividades didático-pedagógicas em Matemática que contribuem para o fortalecimento do tripé Ensino, Pesquisa e Extensão de nossa Universidade.

O projeto possui como objetivos: dar suporte ao desenvolvimento de disciplinas dos cursos ofertados pela Universidade; Elaborar, analisar e avaliar materiais didáticos e atividades que melhorem a relação de ensino/aprendizagem da matemática; Desenvolver atividades que preparem licenciandos para o trabalho com

[417] Universidade Federal do Espírito Santo

a matemática na educação básica; Estimular graduandos a trabalhar como pesquisadores dentro da sala de aula; Estabelecer relações entre a comunidade externa; Apoiar a criação de Laboratórios de Matemática em escolas da educação básica; Promover cursos e oficinas pedagógicas para a formação inicial e continuada de professores; Desenvolver oficinas e gincanas para alunos, tendo em vista despertar gosto e interesse pela matemática.

Dessa maneira, apesar do LEM compor-se como "[...] um local onde se realizam experiências com materiais didáticos", exacerba essa limitação por possuir como característica o "[...] pensar, criar, construir e descobrir estratégias de Educação Matemática" (Turrioni, 2004, p. 64) que servirão de fundamento para futuras práticas pedagógicas e a capacitação e instrumentalização de licenciandos, docentes, discentes da rede básica de ensino de matemática.

Dada a multiplicidade de ações possíveis de serem realizadas, objetiva-se com esse trabalho evidenciar, de forma breve, as ações do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (LEM/UEM), procurando descrever seus objetivos e as etapas necessárias para a organização das atividades realizadas. Para alcançar tal objetivo, nos embasamos na pesquisa qualitativa descritiva, haja vista que essa nos auxilia na descrição de fatos e fenômenos de determinada realidade (Triviños, 1987).

Organização LEM/UEM

Para que as ações do LEM se efetivem se faz necessário um processo de organização que vai do pensamento à ação, do planejamento à efetivação, do envolvimento inicial à avaliação. Esse processo é dividido em cinco etapas que serão aqui denotadas como: (1) Ideação; (2) Planejamento e Estruturação; (3) Realização; (4) Aplicação e (5) Avaliação

A etapa de ideação, é onde surgem as ideias iniciais de materiais manipuláveis, jogos, atividades, oficinas, minicursos, entre outras ações desenvolvidas.

A etapa de planejamento e estruturação, consiste em materializar as ideias iniciais, de forma organizada, ponderada e objetiva, respondendo às perguntas "como?", "porque?", "para que?" e "para quem?".

A etapa de realização, é onde passamos a ter algo concreto, como materiais manipuláveis, jogos, planos de ações, entre outras coisas, de acordo com a demanda. Realizamos ações diversas, nessa etapa, subdivididas em cinco ações: estudar; (re)fazer o concreto; testar e treinar; compartilhar; corrigir e arrumar.

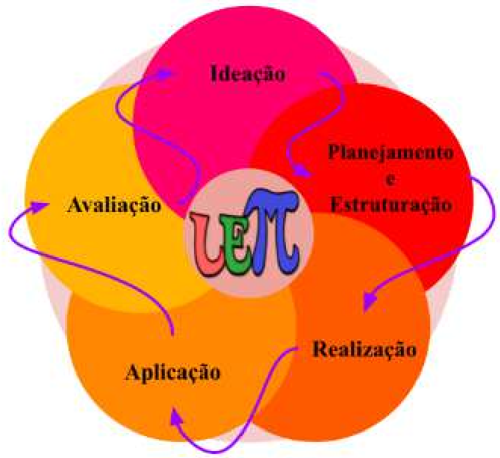
A ação de "estudar", busca compreender os conteúdos e conceitos trabalhados, ferramentas utilizadas, metodologias aplicadas, o público alvo e suas especificidades. Outra ação é "(re)fazer o concreto", isto é, efetivamente produzir algo concreto, definido como objetivo e eventualmente refazer o que estava pronto, mas danificado, desatualizado e/ou em desuso.

A próxima ação, "testar e treinar", consiste na aferição da produção da equipe, quanto à aplicabilidade posterior, consequentemente contribuindo para um avanço no entendimento do material e culminando no desenvolvimento da capacidade de orientação e utilização do material corretamente. (Lorenzato, 2012). A ação "compartilhar" exige dos integrantes, discentes e docentes que explorem seus diferentes pontos de vista em relação ao trabalho que está sendo desenvolvido. A última ação, "corrigir e aprimorar", se resume à autocorreção e aprimoramento, garantindo que eventuais erros não sejam repetidos.

A etapa de aplicação consiste em levar as produções feitas para o público externo, a fim de alcançar professores e estudantes, desde o Ensino Fundamental até o ensino superior, com atividades, oficinas, publicações e apresentações de trabalhos, além de minicursos, que ocorrem dentro e fora do espaço físico do LEM.

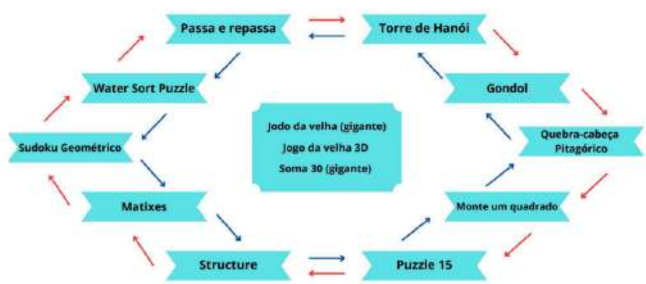
Por outro lado, a etapa de avaliação promove a interação entre as comunidades interna e externa, de modo a instigar trocas de experiências e ideias, além de críticas construtivas e sugestões.

Fig. 132: Etapas constituintes do LEM



Fonte: Acervo próprio.

Fig. 133: Exemplo da etapa: Planejamento e estruturação.



Fonte: Acervo próprio.

Fig. 134: Exemplo da etapa: Realização

Fonte: Acervo próprio.

Fig. 135: Exemplo da etapa: Aplicação.

Fonte: Acervo próprio.

Na Figura 2, apresentamos um esquema do planejamento a ser utilizado em uma gincana com estudantes do Ensino Fundamental II. Na Figura 3, alguns participantes do LEM estão confeccionando um material manipulável com tecido e botões, que auxilia o ensino das quatro operações básicas. Por fim, na Figura 4, discentes participam de jogos matemáticos planejados e organizados pelos integrantes do LEM, em evento realizado em parceria com uma escola da rede pública de ensino da região.

CONCLUSÕES

A gama de possibilidades decorrentes das ações de um Laboratório de Ensino de Matemática são diversas e qualitativamente relevantes para expansão dos conhecimentos matemáticos, desde alunos da Educação Básica à docentes em formação ou formados (Turrioni, 2004). Dessa maneira, descrever o processo de constituição das práticas desenvolvidas no LEM/UEM torna-se uma forma de expôr a potencialidade contida nesse espaço formativo a todos os acadêmicos integrantes do projeto.

O Laboratório de Ensino de Matemática se revela como um espaço rico de oportunidades para o desenvolvimento de diferentes estratégias de ensino, especialmente não tradicionais com ênfase em ricos processos comunicativos e na interação entre alunos e professores. Dentre suas ações, promove o aprendizado e consolidação de conhecimentos matemáticos e didáticos diversos, ao combinar tarefas e atividades atribuídas aos integrantes, de modo que representa um expoente significativo na busca por um meio de ensino não mecanicista e, ao mesmo tempo, mais significativo. Sua estrutura e o ciclo de constituição das atividades e materiais estão voltados para o aprimoramento crescente do LEM, evitando a estagnação ao transitar entre as etapas e ações discutidas, sobre as quais está fundamentado.

O LEM, portanto, pode ser visto como um espaço físico que reúne materiais pedagógicos que propiciam a aprendizagem, mas também como o próprio conjunto de materiais diversos que, utilizado de maneira adequada, promove a aprendizagem, a fixação e a descoberta de conceitos de forma lúdica e envolvente além de caracterizar-se como um rico ambiente formativo (Guirado *et. al*; 2004).

BIBLIOGRAFIA

[1] Guirado, J. C.; Murakami, C.; Santos, D. C. A. dos.; **A Utilização do Laboratório de Matemática no Contexto Escolar.** I Congresso Internacional de Educação e Desenvolvimento Humano. Universidade Estadual de Maringá - UEM, Maringá, 2004.

[2] Zampirolli, T. P. ; Trivizoli, L. M.; Verrengia, S. R, D'A.; **Memórias da trajetória do laboratório de ensino de matemática da UEM.** In: ENCONTRO ANUAL DE

INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 29, 2020. Maringá. Resumos [...]. Maringá: UEM, 2019. Disponível em: http://www.eaic.uem.br/eaic2020/anais/artigos/4114.pdf. Acesso em: 29 abril 2024.

[3] Lorenzato, S.; **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO, Sérgio. O laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas, SP: Autores Associados, 2012. p. 3-38.

[4] Triviños, A. N. S.; **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação.** São Paulo: Atlas, 1987

[5] Turrioni, A. M. S. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores.** Rio Claro, 2004. 165 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2004. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/91124. Acesso em: 15 set. 2023.

Introdução à teoria de atratores e aplicação ao modelo S.I.R.

Oliveira, Eduardo T.[418]

Resumo: *A fim de inferir algumas informações sobre a propagação de doenças modeladas pelo S.I.R., este trabalho utiliza da Teoria de Atratores. Essa área do estudo de sistemas dinâmicos prova-se útil quando queremos descobrir, por exemplo, se eventualmente a doença irá se erradicar ou não, ou mais especificamente, sob quais parâmetros isso é verdade. Dessa forma, a pesquisa consiste no estudo abstrato de semigrupos, ω-limites e atratores e como aplicar esses conceitos na avaliação da dinâmica do sistema EDO's não-lineares que descrevem as taxas de variação das populações S (suscetíveis à doença), I (infectados pela doença) e R(recuperados da doença).*

Palavras-chave: *Semigrupos, atratores, modelagem matemática, S.I.R..*

INTRODUÇÃO

O estudo da matemática abstrata muitas vezes é visto como desconexo com a realidade, porém, mais frequentemente quanto se pensa, pontes são criadas entre esse mundo abstrato e questões atuais, de interesse da população e de outras áreas da ciência. A área de Sistemas Dinâmicos é um desses galhos da matemática que consegue criar vínculos interessantes com o dia-a-dia. Uma dessas ditas pontes, é a modelagem matemática que busca descrever, de maneira analítica, problemas biológicos, físicos, meteorológicos etc., a fim de, com ferramentais matemáticos e possivelmente abstratos, extrair resultados que seriam difíceis de obter apenas analisando dados, por exemplo. Um grande ferramental para realizar essa modelagem são as EDO's (Equações Diferenciais Ordinárias). Nesse contexto, surge este trabalho. Apoiado por uma robusta teoria abstrata de semigrupos e atratores, buscamos estudar o modelo S.I.R.. Nosso objetivo é descrever, sob linguagem de atratores, quando uma doença (modelada pelo S.I.R.) será erradicada ou não.

Esse trabalho é fruto de uma iniciação ciêntifica supervisioada pelo Prof. Alexandre N. Oliveira Sousa do Depto. de Matemática da UFSC, dentro de uma das atividades realizadas pelo PET Matemática UFSC. Propomos apresentar um pôster com o objetivo de explicar o básico da teoria abstrata de atratores e como aplicá-lo a um modelo epidemiológico. O pôster contará com figuras para explicar tanto o modelo quanto as interpretações dos resultados abstratos.

SEMIGRUPOS, ATRATORES GLOBAIS E ω-LIMITES

Uma família $\{T(t)|t \geq 0\}$ (que denotaremos por $T(\cdot)$) de aplicações contínuas do espaço métrico X nele mesmo é chamado de **semigrupo** em X, quando ele possuir as seguintes propriedades: $T(0)x = x$ para todo $x \in X$; $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$; a aplicação $[0,\infty[\times X \ni (t,x) \longmapsto T(t)x \in X$ é uma aplicação contínua. Utilizaremos a noção de semigrupos para tratarmos das soluções do nosso

[418] Apoiado pelo PET Matemática UFSC. Bolsa FNDE.

modelo biológico. Para descrever a dinâmica dele, porém, vamos precisar definir mais alguns conceitos, para uma introdução recomendamos [3, 1]. Nos interessa saber quando um conjunto é atraído por outro, pois será essa a função de um **atrator**, assim definimos a **semidistância de Hausdorff** entre A e B (subconjuntos de X) por: $dist(A,B) :== \sup_{a\in A} d(a,B)$. Logo, dizemos que A **atrai** B sob a ação de $T(\cdot)$ quando $\lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, A) = 0$. Uma ferramenta importante para estudar o comportamento assintótico do semigrupo é um conjunto limite, assim definimos ω**-limite** de B (subconjunto de X) como

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0}\left(\overline{\bigcup_{s\geq t} T(s)B}\right).$$

Por fim definimos o **atrator global** de $T(\cdot)$ como um subconjunto $\mathcal{A}$ de X que é compacto, **invariante** (para todo $t \geq 0$, $T(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$) e atrai todo subconjunto limitado de X pela ação de $T(\cdot)$. Para o fim de estudar o modelo S.I.R. é suficiente utilizarmos resultado que um **atrator** $\mathcal{A}$ **existe** se existir um compacto que atrai todos os limitados de X.

MODELO S.I.R.

O S.I.R. é um modelo biológico que descreve a dinâmica entre o número de uma população suscetível, infectada e recuperada de uma doença. Estudaremos o caso autônomo, ou seja, os parâmetros da EDO não variam com o tempo, ver [2, Section 2].

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = qN - \beta\dfrac{S(t)I(t)}{N(t)} - \mu S(t) + cI(t) & (1)\\ \dot{I}(t) = \beta\dfrac{S(t)I(t)}{N(t)} - \gamma I(t) - (\mu - c)I(t) & (2)\\ \dot{R}(t) = \gamma I(t) - \mu R(t) & (3)\end{cases}$$

$S(t)$: Suscetíveis à doença no tempo t
$I(t)$: Infectados pela doença no tempo t
$R(t)$: Recuperados da doença no tempo t
N: População total $(S + I + R)$
c: Taxa de reinfecção
q: Taxa de natalidade da população
β: Taxa de transmissão da doença
μ: Taxa de mortalidade da população
$\frac{1}{\gamma}$: Tempo médio que um indivíduo fica doente

Lançando mão de resultados de análise qualitativa de EDO's (ver por exemplo [4]), é possível verificar que existem **soluções maximais** para (1)-(3) para qualquer condição inicial $(S_0, I_0, R_0) \in X$, e que essas soluções permanecem em X para todo t, em que $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \geq 0\}$. Note agora que ao somarmos (1), (2) e (3), obtemos uma EDO para N que, por fator integrante, obtemos a seguinte solução:

$$\dot{N}(t) = q - \mu N(t) \Longrightarrow N(t) = \frac{q}{\mu}(1 - e^{-\mu t}) + N(0)e^{-\mu t}.$$

Assim, é fácil observar que $N(t) \xrightarrow{t\to+\infty} \frac{q}{\mu}$. Agora, estamos em condições de mostrar a existência de um atrator para as soluções desse sistema, visto que $B_0 = \{(S,I,R) \in X \mid S + I + R = \frac{q}{\mu}\}$ é um compacto que atrai todas as soluções. O atrator $\mathcal{A}$ é então dado por $\omega(B_0)$. Mais ainda, podemos encontrar os **pontos de equilíbrio** desse sistema e, dessa forma caracterizar atratores que descrevem, sob certas condições, o término da doença.

Vamos provar então que, se $\gamma + \mu + c \geq \beta$, então $\mathcal{A} = (q/\mu, 0, 0)$, ou seja, eventualmente a população S tende à população total N e as populações de infectados (I) e recuperados (R) tendem à 0. Caso $\gamma+\mu+c < \beta$, o ponto $(q/\mu, 0, 0)$ torna-se um ponto de equilíbrio instável e a doença não termina.

CONCLUSÕES

O estudo de sistemas dinâmicos e, em particular, da Teoria de Atratores, pode ser muito útil na obtenção de resultados de interesse científico e popular (pelo menos no que tange problemas modelados matematicamente), exemplificado neste trabalho com o modelo S.I.R.. Assim, é evidente que essa interseção entre a matemática e outras áreas da ciência é de extrema importância para que possamos, cada vez mais, resolver problemas que, até então, eram vistos como de outrem.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARAGÃO-COSTA, Éder Rítis. **Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação**. 2012. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-13042012-162303/.

[2] LÓPEZ-DE-LA-CRUZ, Javier; OLIVEIRA-SOUSA, Alexandre N. **SIR models with vital dynamics, reinfection, and randomness to investigate the spread of infectious diseases**. ARXIV. 2404.12776, 2024

[3] OLIVEIRA-SOUSA, Alexandre N. **Sistemas dinâmicos autônomos**. 2016. 32p. Iniciação Ciêntífica - PETMAT, Universidade Federal de Brasília, Brasília.

[4] VIANA, Marcelo; ESPINAR, Jose M.. **Equações Diferenciais: uma abordagem de sistemas dinâmicos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2021. 536 p. Disponível em: https://edo.impa.br/. Acesso em: 11 ago. 2023.

Possibilidades para o uso de inteligências artificiais no ensino básico da matemática.

Reis, Edvaldo Silva[419] e Rebelo, Wilde Raniely Xavier[420]

Resumo: *Este trabalho explora o impacto da inteligência artificial (IA) no ensino de matemática na terceira década do terceiro milênio. Considerada a "era da inteligência artificial", a disseminação da IA proporciona respostas rápidas e recursos valiosos, como o ChatGPT e o Google Gemini, para professores e alunos. No entanto, seu uso excessivo pode resultar em dependência e semiformação. Além disso, as IA's enfrentam desafios, como dificuldades em questões contextualizadas e compreensão de imagens. Vemos o caráter fundamental do ato de explorar as potencialidades das IA's com cautela, visando uma educação mais conectada e interativa, enquanto se reconhecem e abordam os desafios enfrentados por essas tecnologias no contexto educacional atual.*

Palavras-chave: *Inteligências artificiais, ensino, matemática, educação, educação matemática.*

INTRODUÇÃO

A terceira década do terceiro milênio pode ser perfeitamente chamada de "era da inteligência artificial", visto que sua disseminação no corpo social toma uma proporção gigantesca. Para Vicari (2021, p.73), a interdisciplinaridade abriu espaço para as conversas entre as IA's e as neurociências, a fim de permitir que elas pudessem aprender de um modo muito eficaz, ao que se chama de Deep Learning. Isso, hoje, permite que as inteligências artificiais respondam, mesmo que sem muita precisão (fato que pode ser um ponto de discussão), a qualquer tipo de questionamento proposto. Diante disso, observa-se um panorama muito positivo para a aplicação dessas ferramentas no ensino de matemática a nível básico, em especial o de matemática, que trataremos com maior atenção ao longo deste trabalho.

METODOLOGIA

Esta produção seguiu uma metodologia de pesquisa qualitativa, utilizando uma abordagem exploratória para analisar o uso de inteligências artificiais na educação matemática. A coleta de dados envolveu uma revisão sistemática da literatura acadêmica, incluindo artigos científicos, livros e documentos oficiais relacionados ao tema. Além disso, foram realizadas críticas e reflexões sobre os conceitos, princípios e dilemas éticos discutidos, com o objetivo de integrar perspectivas e correntes filosóficas. A análise dos dados seguiu um fluxo contínuo de revisão e síntese, com o objetivo de identificar padrões, tendências e insights relevantes para a compreensão do tema.

[419]Universidade Federal do Pará (UFPA), edvaldo.reis@icen.ufpa.br
[420]Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA), wilde.xr@gmail.com

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A princípio, é importante salientar que a BNCC, documento dirigente do processo de ensino básico no Brasil, já prevê o uso de "diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática" (BRASIL, 2017; p. 477) e que se deve utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade." (BRASIL, 2018; p. 477).

Percebemos que as IA's têm uma capacidade excelente em questão de síntese e explicação de conceitos, fato que já vem do seu funcionamento, que é de selecionar e mesclar as informações de seu banco de dados a fim de fornecer sempre uma resposta diferenciada, o que pode driblar dificuldades em buscar novos exemplos e/ou formas de repassar os conceitos matemáticos para os alunos. Isso é importante, pois, para Oliveira e Silva (2023, p.20), há espaço para criação de planos de aula direcionados a necessidades dos alunos, visto que essas inteligências também podem identificar dificuldades enfrentadas por estes.

Para além disso, percebe-se que as IA's podem ser aliadas do professor, a partir do momento que ajudam no momento de criação de planos de aula, materiais e explicações contextualizadas e diferentes. Muitas vezes, a criação de exercícios para uso em sala, em testes ou em provas demanda um tempo muito grande, que o uso de IA's podem diminuir, já dando ideia de possibilidades de abordagens inovadoras nos itens de prova. Santos et. al. (p. 10-11) mostra exemplos bem sucedidos das IA's de linguagem, neste caso, mais especificamente, o Chat GPT, criando planos de aula diferentes, criativos e com novas abordagens, além de roteiros para explicar conteúdos de matemática de uma forma mais simples, mas sem perder o rigor necessário. Outro ponto importante é que os alunos possuem espaço para a autonomia, já que, o estudo de matemática é um estudo ativo, no qual teoria e prática se associam de modo íntimo. E as IA's podem abrir espaço para ajudar os alunos com eventuais dúvidas em exercícios, mostrando caminhos que podem ser seguidos. Por exemplo, no estudo de Santos et. al. (2023, págs. 7-9), há a visualização de exercícios de geometria sendo resolvidos de forma correta pelo Chat GPT, com uma explicação detalhada, de forma a possibilitar o entendimento do aluno que está buscando, de forma independente, uma maior compreensão do conteúdo e de suas aplicações.

No entanto, devemos observar alguns pontos perigosos neste uso. O primeiro está no perigo da semiformação do aluno e de uma espécie de "comodismo" por parte do professor, e no perigo de que o estímulo a autonomia do aluno se transforme na dependência cega das ferramentas de inteligência artificial, como observado também por Santos et. al. (2023, p.12), ao dizer que "a utilização de instrumentos digitais no ensino de matemática requer uma postura reflexiva e aprendizado necessário do recurso, além de se construir contextos em que a IA esteja ao serviço do homem", mostrando que sempre devemos estar à frente do processo como sujeitos críticos, cientes de nosso papel no processo educacional, e que não devemos nos deixar ser usados pelos recursos, mas de que eles devem ser o objeto de uso.

Além disso, por serem baseadas na coleta e análise de dados já pré-existentes no seu banco de dados, as IA's estão mais suscetíveis ao erro, principalmente em questões que usam imagens. Em um teste do canal digital Manual do Mundo (2023) percebeu-se a nítida dificuldade que as IA's de linguagem possuem na compreensão de figuras. Mas não só isso, no teste realizado, mesmo que preliminar, a inteligência artificial acertou apenas 12 dos 45 itens de matemática propostos, o que significa um índice de apenas 26,67% em uma situação com itens contextualizados, que são muito cobrados em provas de larga escala. Além disso, Nunes et. al. (2023, p. 5) destaca que as IA's fazem uma média superior a 60% de acertos apenas quando não se consideram os itens com figuras, gráficos ou imagens em provas de matemática de larga escala.

CONCLUSÃO

Portanto, as IA's, que já são amplamente usadas no meio da sociedade do terceiro milênio, devem ser aproveitadas em todas as suas potencialidades, explorando seus potenciais para o apoio na instrumentalização do processo de ensino-aprendizagem de matemática, no entanto, levando sempre em consideração a possibilidade de erro e outros perigos presentes no manuseio destas ferramentas a fim de construir um aluno mais conectado e interativo com o mundo ao seu redor, como o mercado e os padrões da BNCC exigem.

BIBLIOGRAFIA

[1] SANTOS, R. P.; SANT'ANA, C. DE C.; SANT'ANA, I. P. O ChatGPT como recurso de apoio no ensino da Matemática. **Revemop**, v. 5, p. e202303, 11 jul. 2023. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/6837>. Acesso em: 10 abr. 2024

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018

[3] VICARI, R. M.. Influências das Tecnologias da Inteligência Artificial no ensino. **Estudos Avançados**, v. 35, n. 101, p. 73–84, jan. 2021.

[4] MANUAL DO MUNDO. Colocamos Inteligência artificial pra fazer ENEM: Olha no que deu! YouTube, 31 jan 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=4IgCdR–FIc>. Acesso em: 10 abr. 2024.

[5] OLIVEIRA, Rodrigo Marcelo; SILVA, Marcos Ruiz da. O uso da inteligência artificial no ensino da matemática. **Práticas Contemporâneas no Ensino de Física, Química e Matemática**, v. 12, n. 44, 2023.

[6] NUNES, Desnes et al. Evaluating GPT-3.5 and GPT-4 models on Brazilian university admission exams. arXiv preprint arXiv:2303.17003, 2023.

O teorema de Ostrowski

Lima, Edvan[421]; Mesquita, Nathália[422] e Ribeiro, Jacyellen[423]

Resumo: *Neste trabalho abordaremos o tópico de valores absolutos no corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais. Mais especificamente, apresentaremos o Teorema de Ostrowski, que caracteriza todos valores absolutos em $\mathbb{Q}$.*

Palavras-chave: *Teoria dos números, números p-ádicos, valor absoluto, álgebra.*

INTRODUÇÃO

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um *valor absoluto* em $\mathbb{K}$ é uma função

$$|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisfaz:

i) $|x| = 0 \iff x = 0$;

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$;

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Diremos que o valor absoluto é *não arquimediano* no caso de satisfazer a seguinte condição adicional

iv) $|x + y| \leq \max\{|x|, \ |y|\}, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Caso contrário, dizemos que o valor absoluto é *arquimediano.*

Como exemplo imediato de valor absoluto, temos a função definida por

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Tal valor absoluto é chamado *valor absoluto trivial.*

Neste trabalho, estudaremos os valores absolutos não triviais em $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

[421]Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso
[422]Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso
[423]Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso

VALORES ABSOLUTOS EM $\mathbb{Q}$

Claramente, a função módulo define um valor absoluto arquimediano em $\mathbb{Q}$. Abordaremos agora os valores absolutos não arquimedianos em $\mathbb{Q}$, os chamados *valores absolutos p-ádicos.* Seja p um número primo. Para cada $m \in \mathbb{Z}^*$, definimos a *valoração p-ádica de m* (denotada por $\nu_p(m)$) como sendo o expoente da maior potência de p que divide m. Isto é,

$$m = p^{\nu_p(m)} \cdot m_0, \quad (m_0, p) = 1.$$

Convenciona-se que $\nu_p(0) = \infty$. Estendemos o conceito de valoração p-ádica para um racional $x = \frac{a}{b}$ qualquer por meio de

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b). \tag{85}$$

É relativamente fácil mostrar que a função

$$|\cdot|_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

define um valor absoluto não arquimediano em $\mathbb{Q}$ chamado valor absoluto p-ádico.

Note que no contexto do valor absoluto p-ádico, potências de p com expoente grande, tem valores absolutos pequenos. Em particular, a sequência p^n converge para zero. Já os números racionais $x = a/b$ com $a \cdot b$ não múltiplos de p satisfazem $|x|_p = 1$. Tais apontamentos ilustram o quão distinto é o valor absoluto p-ádico do valor absoluto usual.

VALORES ABSOLUTOS EQUIVALENTES

Dizemos que dois valores absolutos $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ num corpo $\mathbb{K}$ são *equivalentes* se eles induzem a mesma topologia em $\mathbb{K}$. Isto é, se todo conjunto aberto de $\mathbb{K}$ com respeito ao valor absoluto $|\cdot|_1$ for também aberto com respeito ao valor absoluto $|\cdot|_2$, e vice versa. É fácil ver que tal noção de equivalência pode também ser formulada em termos de convergência de sequências. Isto é, os valores absolutos serão equivalentes se, e somente se, sequências que convergem com respeito a um deles, também convergem com respeito ao outro.

O principal resultado que será apresentado neste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema de Ostrowski *Todo valor absoluto não trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente a algum valor absoluto p-ádico ou é equivalente ao valor absoluto arquimediano usual, proveniente da função módulo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] GOUVÊA, Fernando Q. **p-adic Numbers: An Introduction**. 3ª ed. Universitext, Springer, 2020.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2014.

[3] MOREIRA, Carlos Gustavo et al. **Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 5ª ed. 2018.

A educação matemática e a dupla excepcionalidade

Moura, Ellen Michelle Barbosa de[424]; Santos, Karla Vanessa Gomes dos[425]; Marçal, Dulcimária Ferreira da Cunha[426] e Moreira, Geraldo Eustáquio[427]

Resumo: *Esta pesquisa objetiva mapear produções que abarquem a prática pedagógica de professores que ensinam Matemática a estudantes que apresentam Dupla Excepcionalidade em produções brasileiras a fim de visibilizar e alargar as discussões sobre a temática. Pesquisa de abordagem qualitativa realizada por meio de mapeamento nos seguintes repositórios: Biblioteca Digital de teses e dissertações, Catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Google Scholar e Scientific Electronic Library Online (Scielo). Os resultados indicam a inexistência de produções brasileiras que explicitem sobre práticas pedagógicas em Matemática com estudantes com Dupla Excepcionalidade em salas de aula regulares. Diante dos resultados, explicitamos a necessidade de pesquisas e de composição de grupos de estudo sobre o assunto a fim de aumentar as discussões e busca de garantia de aprendizagem Matemática de todos os estudantes, inclusive os com Dupla Excepcionalidade.*

Palavras-chave: *Dupla excepcionalidade, educação matemática, matemática, mapeamento de pesquisas.*

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E DUPLA EXCEPCIONALIDADE

Os estudantes que apresentam comportamento de altas habilidades/superdotação (AH/SD) estão contidos no público-alvo da Educação Especial, muitos são matematicamente habilidosos e se destacam na escola. Entre estes estudantes existem os que apresentam Dupla Excepcionalidade (2E) e estão nas salas de aula regulares.

Nas salas de aula é importante compreender que a Educação Matemática é uma área de conhecimento que vai além de saber fazer contas e dominar letras e números, pois visa o desenvolvimento de saberes que permitam que o sujeito seja ativo na sociedade em uma perspectiva crítica, na busca de que todos os estudantes construam conhecimentos matemáticos e tenham condições de ler o mundo a partir da lente Matemática, isso se aplica aos estudantes com Dupla Excepcionalidade.

Na sala de aula inclusiva o/a professor/a que ensina Matemática lida com uma diversidade de estudantes com suas histórias e modos de construir conhecimentos. Muitos apresentam especificidades, sendo incluídos os estudantes público-alvo da Educação Especial, a saber, estudantes com TEA, AH/SD e com deficiência. Dentro desta ampla gama de possibilidades estão os estudantes com Dupla Excepcionalidade.

[424]Secretária de Estado De Educação do Distrito Federal (SEEDF) e Universidade de Brasília (UnB)
[425]Secretária de Estado De Educação do Distrito Federal (SEEDF) e Universidade de Brasília (UnB)
[426]Secretária de Estado De Educação do Distrito Federal (SEEDF) e Universidade de Brasília (UnB)
[427]Universidade de Brasília (UnB)

A possibilidade de o comportamento de AH/SD poder estar associado a uma outra condição, que é caracterizada pela 2E, revela um cenário histórico recente e mais heterogêneo, visto que se trata de AH/SD concomitante com alguma deficiência ou transtorno/distúrbio/síndrome (Nakano; Siqueira, 2012, [4]). Dupla Excepcionalidade é a tradução do termo inglês *Twice-Exceptional, Dual-Exceptionality* apresentado pelo teórico James J. Gallagher em 1975 (Prior, 2013, [5]). O quantitativo de crianças que apresentam comportamento de AH/SD e que simultaneamente são diagnosticadas com deficiências/transtornos/síndromes tem aumentado exponencialmente (Foley-Nicpon *Et Al.*, 2011, [2]; Foley-Nicpon; Assouline; Colangeli, 2013, [3]).

Diante do exposto, o objetivo geral foi mapear produções que abarquem *a prática pedagógica* de professores que ensinam Matemática a estudantes que apresentam Dupla Excepcionalidade em produções brasileiras a fim de visibilizar e alargar as discussões sobre a temática.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Pesquisa de abordagem qualitativa, foi desenvolvida a partir do seguinte questionamento: como está a produção de conhecimento no Brasil sobre práticas pedagógicas em Matemática com estudantes que apresentam 2E nas salas de aula inclusivas? As ações para a efetivação tiveram início com o estudo sobre a temática na perspectiva da Educação Matemática; seguido do mapeamento com as palavras-chave: "dupla excepcionalidade" e "dupla excepcionalidade AND matemática nos seguintes repositórios: Biblioteca Digital de teses e dissertações, Catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), o *Google Scholar e Scielo*. A análise foi feita mediante leitura analítica dos resumos e trabalhos completos, quando necessário.

O MAPEAMENTO: RESULTADOS E DISCUSSÕES

A pesquisa foi realizada em fevereiro de 2024. Os descritores utilizados foram: "dupla excepcionalidade", "dupla excepcionalidade" AND matemática. Os resultados são compilados na tabela a seguir.

Tabela 1: mapeamento das produções que relacionam 2E e Matemática

Repositório	**Resultados obtidos com o termo Dupla Excepcionalidade AND matemática**	**Resultado após leitura de resumo para confirmação da relação entre 2E e matemática**
Catálogo de teses e dissertações da CAPES	3	1
Biblioteca Digital de teses e dissertações	1 (repetido)	0
Scielo	0	0
Google Scholar	10	0
Total:	14	1

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Dos 14 trabalhos selecionados três eram repetidos, 10 não produziam conhecimentos sobre a díade: Educação Matemática/Dupla Excepcionalidade, ou seja, restou uma dissertação intitulada Raciocínio Lógico-Matemático em um aluno do ensino fundamental com Síndrome de Asperger: Dupla Excepcionalidade? escrita por Taverna em 2019 ([6]) para ser lida em sua completude. A referida dissertação foi realizada com um estudante do Ensino Fundamental II de uma escola estadual do estado do Paraná a fim de identificar se existia a Dupla Excepcionalidade, ou seja, não tratava da prática pedagógica. Os resultados apontaram que o estudante apresentava elevado potencial na área lógico-matemática se comparado aos colegas de sua turma, no entanto, não foi possível afirmar que o aluno possuía altas habilidades/superdotação.

A partir do exposto, infere-se que não existem pesquisas brasileiras disponíveis nos repositórios: Biblioteca Digital de teses e dissertações, Catálogo de teses e dissertações da CAPES, *Google Scholar e Scielo* que produzam conhecimentos relacionando a Educação Matemática e a Dupla Excepcionalidade em salas de aula que versem sobre práticas pedagógicas com estudantes com 2E.

CONCLUSÕES

A produção de conhecimento é constante e vai sendo ampliada a partir de demandas sociais, por isso, o fato de não termos encontrado artigos, teses e dissertações nos repositórios escolhidos que abordam a questão da Dupla Excepcionalidade e Educação Matemática nas salas de aula na perspectiva da prática pedagógica é preocupante, pois estes estudantes já estão inseridos no cotidiano escolar e assim faz-se necessário pesquisas acerca desse grupo. Destarte, é necessário que a área da Educação Matemática produza conhecimentos acerca da temática em tela para estes estudantes, quando atendidos nas salas regulares sejam atendidos nas suas necessidades específicas de modo intencional e com base teórica sólida, a fim de visibilizar e contribuir para a efetivação de práticas pedagógicas diversificadas.

AGRADECIMENTOS

Nossos agradecimentos ao Grupo de Pesquisa Dzeta Investigações em Educação Matemática (DIEM); à Fundação de Apoio à Pesquisa do Distrito Federal (FAPDF, Edital 12/2022 - Programa FAPDF *Learning*); à Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF); aos Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília e ao Decanato de Pós-graduação (DPG/UnB) - Edital nº 11/2023.

BIBLIOGRAFIA

[1] Baum, S.; Schader, R.; **Twice-exceptionality: A field whose time has come**. *In:* Fugate, M.; Behrens, W.; Boswell, C.; **Understanding twice-exceptional learners: Connecting research to practice**. United States: Prufrock Press, p. 7-31, 2020.

[2] Foley-Nicpon, M.; Allmon, A.; Sieck, B.; Stinson, R. D.; **Empirical investigation of twice-exceptionality: Where have we been and where are we going?**. Gifted Child Quarterly, n. 55, p. 3-17, 2011. Disponível em `http://dx.doi.org/10.1177/0016986210382575`. Acesso em: 10 jan. 2024.

[3] Foley-Nicpon, M.; Assouline, S. G.; Colangelo, N.; **Twice-exceptional learners: Who needs to know?**. Gifted Child Quarterly, n. 57, p. 169-180, 2013. Disponível em: `http://dx.doi.org/10.1177/0016986213490021`. Acesso em: 7 jan. 2024.

[4] Nakano, T. C.; Siqueira, L. G. G.; **Revisão de publicações periódicas brasileiras sobre superdotação**. Revista Educação Especial, Santa Maria (RS), v. 25, n. 43, p. 249-66, 2012.

[5] Prior, S.; **Transition and students with twice exceptionality**. Australasian Journal of Special Education, v. 37, n. 1, p. 19-27, 2013. Disponível em: `https://sci-hub.se/https://doi.org/10.1017/jse.2013.3.Acessoem:25jan.2024`.

[6] Taverna, C. H.; **Raciocínio Lógico-Matemático em um aluno do ensino fundamental com Síndrome de Asperger: dupla excepcionalidade?**. Dissertação (Mestrado em Educação Especial) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2019.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Análise da estabilidade de sistemas de EDO's utilizando o funcional de Liapunov

Castoldi, Everson Augusto[428] e Tumelero, Gilson[429]

Resumo: *Neste trabalho, será abordado brevemente a teoria de estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO) utilizando a teoria segundo Liapunov. Serão enunciadas as condições para que um sistema seja estável, assintoticamente estável ou instável numa região próxima a um ponto crítico dado. Por fim, serão dados exemplos relacionados a esta teoria, nos casos em que o sistema é linear e não linear.*

Palavras-chave: *estabilidade, função de Liapunov, sistemas de EDO.*

Apesar de todos os avanços da matemática, ainda hoje não existem métodos bem definidos que possibilitem explicitar a solução analítica dos sistemas de equações diferenciais não lineares. Em vista disso, recorre-se a outros métodos, em substituição à resolução analítica, para analisar o comportamento da solução sem encontrá-las de fato.

ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE EDO

Estabilidade de sistemas de EDO com coeficientes constantes

O estudo da estabilidade dos pontos críticos de sistemas de EDO com coeficientes constantes da forma $X' = AX$ pode ser feito a partir dos autovalores da matriz A associada ao sistema. O teorema a seguir expressa um importante resultado sobre a estabilidade desses sistemas.

Teorema 9.14 *Se $X' = AX$ é um sistema linear autônomo de ordem n, cuja matriz dos coeficiente é não-singular, então a origem de $\mathbb{R}^n$ é*

(i) *assintoticamente estável se as partes reais de todos os autovalores de A são negativos;*

(ii) *estável, mas não assintoticamente estável, se A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros de multiplicidade um, nenhum autovalor imaginário puro de multiplicidade maior que um, e nenhum autovalor com parte real positiva;*

(iii) *instável nos demais casos.*

[428]Universidade Tecnologica Federal do Paraná
[429]Universidade Tecnologica Federal do Paraná. Orientador do trabalho

O estudo da estabilidade dos pontos críticos pode ser feito por meio de outras diversas técnicas bem definidas de modo que seja possível explicitar a solução de forma analítica para o sistema. Entretanto, quando estamos tratando de sistemas não lineares, esse resultado é extremamente útil, pois nos possibilita estudar a estabilidade sem encontrar a solução analítica, após utilizar o Jacobiano para linearizar o sistema.

Estabilidade segundo Liapunov

Seja um sistema autônomo da forma $X' = F(X)$. O estudo da estabilidade deste sistema será baseado na ideia de que um sistema mecânico perde energia quando está na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Dito isso, a ideia por trás da teoria de Liapunov é encontrar uma função escalar associada à energia mecânica de um sistema.

Definição 9.15 *Seja Ω uma região de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, e seja $E = E(X)$ uma função a valores reais de classe C^1 em Ω. Então, E se diz positiva definida se $E(X) \geq 0$ para todo X em Ω, e $E(X) = 0$ se e somente se $X = 0$.*
*Se, além disso, $\bullet E \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i} F_i \leq 0$ em todo ponto de Ω, então E se diz **função de Liapunov** para o sistema autônomo $X' = F(X)$.*

Portanto, o problema da estabilidade numa região próxima do ponto crítico do sistema autônomo $X' = AX$ pode ser resolvida pelo teorema a seguir.

Teorema 9.15 *O ponto de crítico do sistema $X' = AX$ é **estável** se existir uma função de Liapunov E para o sistema; **assintoticamente estável** se existir uma função de Liapunov E para o sistema, com a propriedade de que $-\bullet E \cdot F$ é positiva definida em Ω, onde $0 \in \Omega$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; e o ponto crítico é **instável** se existir uma função de Liapunov E para o sistema, com a propriedade de que $\bullet E \cdot F$ é positiva definida em Ω e para cada $\epsilon > 0$ existe um X_0 em Ω com $//X_0// < \epsilon$ e $E(X_0) > 0$.*

Exemplo 9.2 $E(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4}$ *é uma das funções de Liapunov do sistema não linear*

$$\begin{cases} x' = -2x + x^2 y \\ y' = -y + xy^2 \end{cases}, \tag{86}$$

*pois satisfaz as três condições impostas na definição (9.15). Portanto, podemos concluir que $E(x,y)$ é uma função de Liapunov para o sistema (86) e pelo item ii) do **teorema (9.15)**, a origem é assintoticamente estável.*

O exemplo acima nos remete a uma questão natural: Como encontrar a tal função de Liapunov? A seguir daremos uma resposta parcial a questão.

Seja $Y = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$. A função $X(t,Y) = \alpha_1 X_1(t) + ... + \alpha_n X_n(t)$ é a solução de $X' = AX$ que satisfaz à condição incial $X(0) = Y$. Agora, pondo

$$E(Y) = \int_0^\infty ||X(t,Y)||^2 \, dt, \tag{87}$$

se esta integral converge, então a função resultante será a função de Liapunov do sistema.

Note que a função de Liapunov foi construída para um sistema linear. Entretanto, também podemos construir ela para sistemas não lineares da forma $X' = F(X)$. Para isso, usamos o Jacobiano para aproximar a função F, desde que ela seja de classe C^1 numa região Ω de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, isto é, tenha derivadas parciais contínuas em Ω.

Assim, se $F(X) = (F_1(X), ..., F_n(X)$, então F tem uma aproximação linear em cada ponto X_0 de Ω, e a matriz dessa aproximação com relação à base padrão de $\mathbb{R}^n$ é

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X=X_0} \tag{88}$$

Por fim, como obtemos a matriz associada a um sistema linear, podemos usar (87) para encontrar a função de Liapunov para F.

Para construir a função de Liapunov associada ao sistema do exemplo (9.2), consideramos que $J(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ este com solução geral dada por $E(X) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Tomando $Y = (x, y)$ e utilizando (87), temos

$$X(t, Y) = \begin{pmatrix} xe^{-t} \\ ye^{-2t} \end{pmatrix} \Rightarrow E(Y) = \int_0^\infty (x^2 e^{-2t} + y^2 e^{-4t}) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4},$$

que é a mesma função de Liapunov que utilizamos no exemplo (9.2).

Por fim, cabe ressaltar que nem todos os problemas de estabilidade de sistemas não lineares podem ser resolvidos desta maneira. Entretanto, a teoria abordada até aqui já pode ser usada para resolver uma gama de problemas de estabilidade. Para uma abordagem mais ampla da teoria, podem ser consultadas as referências [1] e [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 11.ed. LTC, 2020.

[2] KREIDER, D. L.; KULLER, R. G.; OSTBERG, D. R. **Equações diferenciais**, ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

Geometrizando - um jogo mobile de geometria analítica para incentivar estudantes[430]

Sinoti, Felipe[431] e Santana, Mário[432]

Resumo: *Com o objetivo de gerar mais engajamento e incentivo nos estudos já nos primeiros semestre da graduação, estamos desenvolvendo um jogo de geometria analítica para smartphones. A ideia foi criar um RPG simples, prático e divertido para convidar os estudantes a se tornarem jogadores e desbravarem o mundo de Matrides, enquanto resolvem diversos problemas de G.A.*

INTRODUÇÃO

Este é um projeto de iniciação científica, financiado pelo CNPq, onde nos propomos a desenvolver um jogo educacional que ajudasse os alunos a estudarem geometria analítica de uma forma mais interativa, por meio do motor de jogos da Unity. Portanto, estamos criando um vídeo game contendo um cenário de exploração para o jogador, no qual ele precisa andar, conhecer o mapa e combater monstros através da resolução de questões de Geometria Analítica. Tais questões são referentes aos assuntos propostos na ementa do curso MA141 (Geometria Analítica e Vetores) oferecido na Unicamp. Desta forma, o jogo está sendo construído de modo que conforme o estudante avança no cenário, melhorando seu personagem, obtendo maiores pontuações e desbravando o mundo de Matrides — nome fictício do universo onde o jogo se passa, ele também avança nos conteúdos de geometria analítica, resolvendo questões mais desafiadoras dos assuntos da disciplina. Com esta abordagem, objetivamos aumentar a motivação dos estudantes em se aprimorar no estudo da geometria analítica por meio das melhorias e recordes que estarão dentro do jogo, bem como a motivação do docente através da percepção de um possível avanço no aprendizado dos alunos.

Títulos e Subtítulos das Seções

Os títulos e subtítulos das seções devem ser digitados em fonte Times New Roman, tamanho 12, estilo negrito, e alinhados à esquerda. Os títulos ser escritos em letras maiúsculas, enquanto nos subtítulos só as primeiras letras de cada palavra serão maiúsculas. Eles devem ser numera-dos, usando numerais arábicos separados por pontos. Uma linha em branco de espaçamento simples deve ser incluída acima e abaixo de cada título ou subtítulo

[430]Este trabalho foi apoiado pelo PIBIC-Unicamp e CNPq

[431]Afiliação. Este autor foi apoiado PIBIC-Unicamp e CNPq

[432]Afiliação. Este autor foi apoiado PIBIC-Unicamp e CNPq

DESENVOLVIMENTO

O game criado foi no estilo *RPG Retrô*, onde o player jogará com o personagem principal que, dentro do contexto do universo, é o último cavaleiro da ordem *determinatus* - uma ordem de cavaleiros que proteje o mundo de ameaças. Seu objetivo é impedir os monstros de tomarem conta do mundo de *Matrides* combatendo-os com exercícios de geometria analítica.

Assim, o jogador terá um mapa para explorar e combater as ameaças com os conteúdos estudados em geometria analítica. Ao encontrar um monstro e se colidir com ele, o combate se inicia. Dentro deste combate, o jogador poderá decidir entre fugir da luta (caso não se sinta preparado diante do adversário), ou lutar. No segundo caso, será aberto um menu de opções para o player, onde ele poderá escolher um assunto da matéria para resolver a questão. Assim que for escolhido, uma questão aleatória sobre o tema aparecerá e o player terá certo tempo para resolvê-la. Quanto maior for o tempo gasto na resolução do problema, menor será a efetividade do ataque que ele irá realizar, caso acerte a pergunta. No caso de falha, o personagem não causará dano no monstro. Após isso, é o turno do monstro, que ataca o jogador. O sucesso do monstro é definido com base no nível do personagem. Se o jogador evolui bastante, monstros mais fracos tenderão a errar seus golpes (ou darem dano reduzido). Isso significa que tanto o personagem do jogador quanto os monstros terão atributos-base que definem o quão forte eles são. A princípio, tais atributos serão: vida, força (referente ao dano), defesa e velocidade.

Os atributos pertencentes ao personagem principal poderão ser evoluídos conforme o jogo avança (seja por meio de batalhas ganhas, tesouros encontrados ou melhorias feitas no ferreiro).

Esse sistema utilizado reflete bastante no gênero do jogo, um *RPG*. Desta forma, o jogador tem um estímulo maior para continuar jogando e desenvolvendo suas habilidades.

O jogo ainda não está 100% concluído, porém já está com a arte final e com grande parte da arquitetura do código terminada.

CONCLUSÕES

Em breve lançaremos uma *demo* para verificar a taxa de sucesso e aprendizado que o jogo em sua primeira versão na *play store* - loja de aplicativos da google - terá. Até o momento, colhemos feedbacks e ideias de melhorias de diversos docentes e discentes da UNICAMP durante o desenvolvimento do projeto. De tudo, o mais interessante foi observar a existência de maneiras lúdicas e mais interativas de se aprender os conteúdos de geometria analítica.

PERSPECTIVAS FUTURAS

Mesmo após o término da IC, pretendemos dar continuidade no game. O modo como o conteúdo desta disciplina foi se transformando em um jogo e de como foram pensadas as interações do jogador com o mundo podem ser fatores interessantes para o estimulo do aprendizado desta área e da possível existência de novos jogos educacionais que abordem temas diversos, e que expandam o conhecimento para fora das salas de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] Nos games, um caminho entre conhecimento e ensino. Pesquisa, FAPESP, 25 de abr. 2022. Disponível em: <https://revistapesquisa.fapesp.br/nos-games-um-caminho-entre-conhecimento-e-ensino >. Acesso em: 25. abr. 2022

[2] BOULOS, Paulo; DE CAMARGO, Ivan. Geometria Analítica - um tratamento vetorial. Prentice Hall, 3a edition, 2007.

Cálculo fracionário

Um Estudo da Integral Fracionária de Riemann-Liouville

Silva, Felipe[433] e Ramos, Priscila[434]

Resumo: *O cálculo fracionário tem sido cada vez mais pesquisado afim de resolver problemas nas mais variadas áreas. Este trabalho enfatiza o estudo da Integral fracionária de Riemann-Liouville (IFRL) com o objetivo de apresentar suas propriedades e resultados. Para alcançar o objetivo desse trabalho foi realizada uma ampla pesquisa bibliográfica.*

Palavras-chave: *Cálculo integral, cálculo fracionário, integral fracionária de Riemann-Liouville.*

INTRODUÇÃO

Segundo a história da matemática, em momentos de intensas indagações sobre o cálculo diferencial e integral um questionamento deu origem a área do cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário, a qual é uma generalização dos conceitos do cálculo diferencial e integral clássicos.

O cálculo fracionário é uma área frutífera e alvo de interesse de muitos pesquisadores. Embora o cálculo fracionário estabeleça algumas formulações para derivadas e integrais, este trabalho enfatiza a integral fracionária de Riemann-Liouville e consiste em um texto introdutório elaborado a partir de uma ampla pesquisa bibliográfica.

UMA BREVE REVISÃO HISTÓRICA

O surgimento do cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário, ocorreu em um momento histórico de riquíssimas discussões matemáticas a respeito do cálculo diferencial e integral clássico. Segundo a história da matemática, tudo começou quando L'Hôpital questionou a Leibniz qual seria a interpretação da derivada de ordem $1/2$ da função $f(x)$. Leibniz respondeu que a possibilidade de existir o conceito de tal derivada poderia cair em um paradoxo e que, algum dia, consequências frutíferas seriam geradas.

Atualmente, é crescente o número de pesquisas que envolvem os conceitos do cálculo fracionário para formular e resolver problemas nas mais diversas áreas do saber, como matemática, física, biologia, engenharias e outras ([1], [2], [5]).

FUNÇÃO GAMA

A função gama é muito importante para o cálculo fracionário uma vez que esta é usada para definir o operador de integração fracionária, por isso dedicamos esta seção para apresenta-la.

[433]Universidade Federal do Oeste da Bahia
[434]Universidade Federal do Oeste da Bahia

Conforme proposto por Euler, a função gama pode ser expressa por uma integral imprópria, isto é,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \;\Rightarrow\; \Gamma(x) = (x-1)!.$$

A demonstração pode ser encontrada em [6].

A função gama possui outras formulações, sendo elas as formulações de Gauss e de Weiestras [6].

INTEGRAL FRACIONÁRIA DE RIEMANN-LIOUVILLE

Definição 9.16 *: ([4]) Seja (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ um intervalo finito ou infinito de $\mathbb{R}$. As integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita da função f de ordem α, com $\alpha > 0$ são dadas, respectivamente, por*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \; x > a$$

e

$$I^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau - x)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \; x < b,$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$.

Na literatura são encontrados muitos resultados e relações da IFRL, alguns são destacados a seguir.

Proposição 9.3 *: A Integral fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear.*

Demonstração: ver [6]

Proposição 9.4 *A função gama satisfaz a propriedade de semigrupo se α, $\beta \ge 0$ então*

$$I^{\alpha}\left(I^{\beta} f(x)\right) = I^{\alpha+\beta} f(x)$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 9.5 *(Regra de integração para monômios) Seja $f_\mu(t) = t^\mu$, com $\mu > -1$ e $t > 0$ então*

$$I^{\alpha} f_\mu(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} f_{\alpha+\mu}(t)$$

Demonstração: Ver [3].

CONCLUSÕES

Instigados pelo crescente interesse de pesquisadores na área do cálculo fracionário, este trabalho estudou e destacou alguns resultados referentes à IFRL com o objetivo de despertar o interesse de estudantes para essa área e introduzir conceitos e técnicas.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMMI, Moulay Rchid Sidi; TORRES, Delfim FM. Optimal control of a nonlocal thermistor problem with ABC fractional time derivatives. **Computers and Mathematics with Applications** , v. 78, n. 5, p. 1507-1516, 2019.

[2] ALMEIDA, Ricardo. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. **Communications in Nonlinear Science and Numerical simulations**, v. 44, p.460–481, 2017.

[3] FORSCH, Fabíola Cristiane et al. Existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária. 2019.

[4] KILBAS,Anatoliĭ Aleksandrovich; SRIVASTAVA, Hari M.; TRUJILLO, Juan J. **Teoria e aplicações de equações diferenciais fracionárias**, maisvier, 2006

[5] PULIDO, Martha Aurora Parra. **Derivada fracionária'psi'-Hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers.**. 2020. Tese de doutorado. [sn].

[6] SOUZA, Nicoly Longaretti de et al. Introdução ao cálculo de ordem não inteira. 2022.

10 anos de dissertações do PROFMAT do Cariri cearense: um recorte de gênero

Gonçalves, Francisca Aglaiza Romão Sedrim[435]

Resumo: *O presente trabalho reflete acerca da presença das mulheres na Matemática, mais especificamente no Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT, na região do Cariri cearense, localizada ao centro-sul do estado. Tal presença é investigada por meio das dissertações produzidas por discentes do programa supramencionado, que completou, este ano, 10 anos da primeira defesa local. O PROFMAT é o único programa de pós-graduação em Matemática oferecido na região. Neste trabalho averígua-se, ano por ano, as contribuições femininas e constata-se que há uma grande disparidade de gênero entre os egressos.*

Palavras-chave: *PROFMAT, Cariri, mulheres, matemática, gênero.*

INTRODUÇÃO

A presença tímida de mulheres na turma em que sou egressa despertou em mim o interesse de observar se isso se repetia para os demais anos. Em 2020 e 2021, observei todas as dissertações produzidas e foi possível constatar que o cenário da minha turma se assemelhava às demais. Atualmente, a região completa 10 anos de dissertações, como estão os últimos anos? Esse número cresceu em alguma proporção? Ou se mantém tímido e inalterado? É o que se pretende observar.

BREVE CONTEXTO

Ao falar de 10 anos de dissertações, vale enfatizar que a oferta é anterior a 2014, o PROFMAT foi criado em 2011 e a primeira oferta local foi em 2012, sendo 2014 o ano em que o primeiro discente conclui os pré-requisitos básicos para a obtenção do título de mestre, entre eles, a defesa da dissertação.

Inicialmente o curso era oferecido somente pela Universidade Federal do Cariri - UFCA. A partir de 2018 a oferta passou a ser feita tanto pela UFCA quanto pela nova credenciada, a Universidade Regional do Cariri - URCA, que tem sua primeira defesa em 2020. Dessa forma, nos últimos anos são observados os dados das duas instituições.

[435]Seduc-CE, professora; Seduc-Cedro-PE, professora; Unioeste, discente, aglaizaromao@gmail.com

METODOLOGIA

Esta pesquisa metodologicamente se qualifica como qualitativa, segundo Knechtel (2014), uma vez que a mesma se propõe a observar e refletir acerca de um recorte de gênero a partir da quantificação de informações do objeto, que corroboram com as reflexões.

Inicialmente, fora visitado o repositório de dissertações do PROFMAT [436], situado no site do programa donde foi pesquisado no filtro por "UFCA", pretendendo visualizar os textos de 2014 a 2023, no entanto esse comando também considera as produções da Universidade Federal do Catalão - UFCAT, logo um novo filtro foi feito com "UFCAT", para exclusão das respostas não desejadas. O mesmo procedimento foi realizado com a palavra-chave "URCA" no filtro do repositório.

Vencida essa parte, foram consultadas todas as produções, buscando identificar o gênero da autoria. Os caminhos utilizados para identificar o gênero foram: a) nomes: os mais comuns como João e Maria eram mais fáceis de passar pelo critério de inclusão ou exclusão; b) no caso da dúvida, aplicando-se aos nomes menos comuns, foram lidas as dedicatórias a fim de encontrar algo dito que evidenciasse o gênero; c) os casos em que não foram identificados na dedicatória, foi realizada uma busca no currículo Lattes[437] a fim de, pela via da leitura social da foto do perfil ou pelo texto informado na breve apresentação, identificar; d) os casos em que nenhum dos critérios anteriores fosse eficaz, a pessoa seria consultada via e-mail, mas este último não foi necessário.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Aplicando-se o filtro "UFCA" obteve-se 233 resultados, com o filtro "UFCAT" foram encontrados 103 registros. Logo, as dissertações oriundas da UFCA no período de mencionado foram: $233 - 103 = 130$. De modo análogo, ao buscar por "URCA" foram encontrados 28 textos. No caso da URCA não foi necessária nenhuma exclusão porque o filtro era suficiente, visto que não há outra instituição credenciada que se inicie com essas letras.

Ao todo, a região do Cariri hospeda no repositório do PROFMAT através dessas duas instituições 158 dissertações, sendo 130 da UFCA e 28 da URCA.

Ao passo que os textos eram consultados com a finalidade de identificação do gênero, as disparidades eram evidenciadas. A tabela 1 apresenta esses números ano a ano para os resultados da UFCA e da URCA.

Tabela 1 - Dissertações do PROFMAT produzidas na região do Cariri, no período de 2014 a 2023, observado o gênero da autoria

	Gênero feminino nas duas instituições			Gênero masculino nas duas instituições				
Ano	**Mulheres UFCA**	**Mulheres URCA**	**Total mulheres**	**Homens UFCA**	**Homens URCA**	**Total homens**	**Total de dissertações**	**Percentual feminino observado**
2014	02	Não se aplica	02	31	Não se aplica	31	33	06,06%
2015	01	Não se aplica	01	16	Não se aplica	16	17	05,88%
2016	00	Não se aplica	00	00	Não se aplica	00	00	Não se aplica, pois não houve produção de nenhum gênero
2017	00	Não se aplica	00	13	Não se aplica	13	13	00,00%
2018	02	Não se aplica	02	13	Não se aplica	13	15	13,33%
2019	03	Não se aplica	03	11	Não se aplica	11	14	21,43%
2020	01	00	01	04	02	06	07	14,29%
2021	01	00	01	05	03	08	09	11,11%
2022	01	03	04	11	04	15	19	21,05%
2023	01	06	07	14	10	24	31	22,58%
Total	12	09	21	118	19	137	158	13,29%

Observe onde está escrito "não se aplica" na coluna "Mulheres URCA" se refere aos anos em que a

[436]O repositório das dissertações do PROFMAT – Disponível em: https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/

[437]Currículo disponível em plataforma do CNPq – Disponível em: https://buscatextual.cnpq.br/buscatextual

instituição ainda não tinha arquivos depositados no repositório. O mesmo vale para o ano de 2016 também à UFCA, visto que não há nenhuma dissertação desse ano, de nenhum gênero.

Com base nos dados observados, o percentual geral observado é de $13,29\%$ de dissertações de egressas contra $86,71\%$ de egressos. Em alguns intervalos de tempo é possível se alegrar com tímido crescimento, mas logo em seguida observa-se outra queda, como é o caso da passagem de 2019 (ano que tem um percentual nunca alcançado antes) para 2020 e 2021, onde são observadas quedas sucessivas.

Nos anos de 2022 e 2023, no percentual geral um pequeno crescimento volta a aparecer.

Ao observar de maneira isolada com relação às instituições, vê-se que são nestes últimos dois anos que a URCA aparece com um número mais "equilibrado" de produções por gênero enquanto que a UFCA tem uma queda nesse período, enquanto 11 homens defendem suas dissertações em 2021, apenas uma mulher faz o mesmo. Analogamente, em 2023, uma em 15 discentes a defender sua dissertação é mulher.

CONCLUSÕES

O tímido número de mulheres frente ao número de homens que egressam do PROFMAT na região do Cariri denunciam a desigualdade de gênero na Matemática da região e sugere uma investigação a fim de observar como esses números se comportam a nível estadual, a nível de Nordeste e nacional para que outras conclusões sejam tomadas.

Alguns pontos que se encaixam na baixa frequência de mulheres em outros espaços certamente se encaixam aqui também, como os afazeres domésticos, a maternidade e o estigma de que "meninos são bons em Matemática", mas esses resultados são gritantes e essas justificativas não fazem mais sentido na sociedade atual.

Sugere-se, com base nessa observação planejar formas de acesso, como cotas afirmativas, estratégias de garantia de permanência dessas cursistas no programa, pois nos 10 anos de dissertações observadas não tem um ano sequer onde o percentual geral ultrapasse os 25%, quiçá uma proporção mais próxima dos 50%. Ademais, se faz necessário que outras interseções sejam realizadas, como cor, por exemplo.

BIBLIOGRAFIA

[1] Knechtel, M. R.; **Metodologia da pesquisa em educação: uma abordagem teórico-prática dialogada.** 1a. edição. Intersaberes, Curitiba, 2014.

Referenciais de Monge e Bishop

Garrido, Gabriel de Azevedo[438]

Resumo: *Uma das partes do curso de Geometria Diferencial é o estudo do famoso Referencial de Frenet. Porém, este referencial, como qualquer outro ente matemático, obteve melhoras conforme a teoria foi se desenvolvendo com o tempo. Assim, alguns problemas que o Referencial de Frenet possui, sendo um deles, no cálculo da derivada da curva paralela, são resolvidos com outros referenciais, os quais destacaremos nessa apresentação. Assim, esta apresentação contempla a comparação entre os referenciais de Frenet, Monge e Bishop, os quais fazem parte de uma área de pesquisa dentro da Geometria Diferencial. Ademais, serão discutidas propriedades desses referenciais dentro da Teoria de Curvas em* $\mathbb{R}^3$ *como exemplo, ou seja, mostraremos a relação entre a curvatura e torção e as derivadas dos vetores tangente, normal e binormal.*

Palavras-chave: *Geometria diferencial, referencial de Monge, referencial de Bishop, superfícies parametrizadas.*

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial pode ser descrita como a área da Matemática que estuda as propriedades geométricas de curvas e superfícies com auxílio de ferramentas do Cálculo Diferencial. Sua origem remonta ao século XVII com os trabalhos de Isaac Newton, mas é no século XIX, com os trabalhos de Gauss e Riemann, que ela se estabelece definitivamente como uma área de pesquisa da Matemática moderna.

No curso de Geometria diferencial, são estudados alguns entes da geometria vistos do ponto de vista tanto do cálculo quanto algébrico, além da parte geométrica dos próprios entes. No estudo de curvas e superfícies, é estudado o Referencial de Frenet, mais precisamente, o *Diedro de Frenet* e o *Triedro de Fernet*, ou seja, para curvas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

O estudo desse referencial nos possibilita indagar se este é o melhor que podemos considerar para uma curva e uma superfície parametrizada no plano e espaço Euclidiano. Logicamente, como todas as teorias dentro da Matemética possuem alterações e melhoras, esta teoria do estudo de referenciais possui evoluções que puderam resolver problemas que o Referencial de Frenet tinha em sua construção. Os referenciais que serão apresentados serão os *Referencial de Monge* e *Referencial de Bishop*, os quais trazem soluções e propriedades importantes e que os tornam uma alternativa um tanto mais eficaz em relação ao Referencial de Frenet pelo fato de que as derivadas dos vetores da base ortonormal obtida ser um múltiplo do vetor tangente. Em suma, o problema exemplo, das curvas paralelas, é resolvido.

Preliminares

Considere um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, uma curva regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I, \Omega)$ e um referencial móvel adaptado positivo $\mathcal{R} = \{E_1(t), E_2(t), E_3(t)\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma)$, ou seja, $E_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$,

[438] Afiliação. Universidade Federal de São Carlos - UFSCar. Este trabalho foi apoiado por CNPq

implicando no fato de que o plano normal à curva é gerado pelos vetores $E_2(t)$ e $E_3(t)$. Vale recordar que

$$\left\langle E_i'(t),\ E_i(t)\right\rangle = 0 \quad \text{e, também,} \quad \omega_{ij}(t) := \left\langle E_i'(t),\ E_j(t)\right\rangle = -\left\langle E_j'(t),\ E_i(t)\right\rangle = -\omega_{ji}(t),$$

com $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$. Logo, as equações dadas por

$$\begin{cases} E_1'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_{1j}(t)\, E_j(t) = \omega_{12}(t)\, E_2(t) + \omega_{13}(t)\, E_3(t); \\ E_2'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_{2j}(t)\, E_j(t) = \omega_{21}(t)\, E_1(t) + \omega_{23}(t)\, E_3(t) = -\omega_{12}(t)\, E_1(t) + \omega_{23}(t)\, E_3(t); \\ E_3'(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \omega_{3j}(t)\, E_j(t) = \omega_{31}(t)\, E_1(t) + \omega_{32}(t)\, E_2(t) = -\omega_{13}(t)\, E_1(t) - \omega_{23}(t)\, E_2(t); \end{cases}$$

têm representação matricial da forma

$$\begin{bmatrix} E_1'(t) \\ E_2'(t) \\ E_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & \omega_{13}(t) \\ \omega_{12}(t) & 0 & \omega_{23}(t) \\ \omega_{31}(t) & -\omega_{23}(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(t) \\ E_2(t) \\ E_3(t) \end{bmatrix}.$$

Para que a positividade seja mantida, devemos ter que $E_3(t) = E_1(t) \times E_2(t)$.

Problematização do Referencial de Frenet

Imagine um carro de trilho em uma montanha russa num parque de diversão, em que um dos trilhos dessa montanha russa é uma curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Suponha, também, que as rodas desse carro da montanha russa sejam fixadas no trilho e sejam análogos a pontos da curva γ. Assim, o triedro de Frenet, como já visto nas sessões passadas, possui as equações dadas por

$$\begin{cases} T_\gamma'(t) = \kappa_\gamma(t)\, N_\gamma(t); \\ N_\gamma'(t) = -\kappa_\gamma(t)\, T_\gamma(t) - \tau_\gamma(t)\, B_\gamma(t); \\ B_\gamma'(t) = \tau_\gamma(t)\, N_\gamma(t). \end{cases}$$

Agora, queremos equacionar a curva paralela à γ, o que nos resultaria no outro trilho da mesma montanha russa a uma distância fixada. Ou seja, queremos criar a curva paralela à curva γ com as mesmas propriedades de γ, porém deslocada.

Com efeito, considere a curva paralela à curva γ dada por

$$\begin{array}{rcccc} \beta & : & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \longmapsto & \beta(t) = \gamma(t) + \lambda N_\gamma(t) \end{array}$$

Com efeito, queremos encontrar o vetor tangente à curva β num ponto $\beta(t)$ arbitrário. Ou seja, devemos derivar a função β em respeito a t numa métrica qualquer. Assim,

$$\beta'(t) = \gamma'(t) + \lambda N_\gamma'(t),$$

o que implica que

$$\beta'(t) = \left|\left|\gamma'(t)\right|\right| T_\gamma(t) - \lambda\kappa_\gamma(t)\, T_\gamma(t) - \lambda\tau_\gamma(t)\, B_\gamma(t).$$

Como o vetor binormal $B_\gamma(t)$ possui componentes tangente, ou seja, na direção de $T_\gamma(t)$, e normal, isto é, na direção de $N_\gamma(t)$, então, tem-se que

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \left|\left|\gamma'(t)\right|\right| T_\gamma(t) - \lambda\kappa_\gamma(t)\, T_\gamma(t) - \lambda\tau_\gamma(t)\left(\delta_1 T_\gamma(t) + \delta_2 N_\gamma(t)\right) \\ &= \left(\left|\left|\gamma'(t)\right|\right| - \lambda\kappa_\gamma(t) - \lambda\delta_1\tau_\gamma(t)\right) T_\gamma(t) - \lambda\delta_2\tau_\gamma(t)\, N_\gamma(t). \end{aligned}$$

Portanto, o referencial de Frenet, para uma curva paralela a uma curva dada, não tem a mesma direção tangente que a primeira curva.

Referencial de Monge e Referencial de Bishop

Defina a base positiva de vetores ortonormais dada por $\mathcal{B} = \{T_\gamma^M(t),\ N_\gamma^M(t),\ B_\gamma^M(t)\}$ construido a partir do referencial de Frenet tal que

$$\begin{cases} T_\gamma^M(t) = T_\gamma(t), \ \forall\ t \in I; \\ N_\gamma^M(t) = \cos(\theta(t))\, N_\gamma(t) - \operatorname{sen}(\theta(t))\, B_\gamma(t), \ \forall\ t \in I; \\ B_\gamma^M(t) = \operatorname{sen}(\theta(t))\, N_\gamma(t) + \cos(\theta(t))\, B_\gamma(t), \ \forall\ t \in I; \end{cases},$$

em que a função

$$\begin{array}{rccc} \theta & : & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & t & \longmapsto & \theta(t) = -\displaystyle\int_{t_0}^{t} \tau_\gamma(s)\, ds \end{array},$$

ou seja, uma outra forma de definirmos $\theta(t)$ é de ser a função que verifica

$$\theta'(t) = -\tau(t).$$

Matricialmente, a representação deste referencial é dada pelo produto e igualdade das matrizes a seguir:

$$\begin{bmatrix} T_\gamma^M(t) \\ N_\gamma^M(t) \\ B_\gamma^M(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\gamma(t) \\ N_\gamma(t) \\ B_\gamma(t) \end{bmatrix}.$$

Definição 9.17 *Considere um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma curva regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I,\ \Omega)$. Um referencial móvel ortonormal positivo $\mathcal{X} = \{\mathcal{B}_1(t),\ \mathcal{B}_2(t),\ \ldots,\ \mathcal{B}_n(t)\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma)$ é dito um referencial de Bishop quando*

$$\mathcal{B}_1(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} \quad \textit{e, também,} \quad \mathcal{B}_i(t) \in (\{\mathcal{B}_1(t)\}),\ \forall\ i \in \{2,\ 3,\ \ldots,\ n\}.$$

Matricialmente, este referencial é definido por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_1'(t) \\ \mathcal{B}_2'(t) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1(t) & \ldots & \omega_{n-1}(t) \\ -\omega_1(t) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_{n-1}(t) & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1(t) \\ \mathcal{B}_2(t) \\ \vdots \\ \mathcal{B}_n(t) \end{bmatrix}.$$

O teorema que enunciaremos a seguir garante que existe um referencial de Bishop satisfazendo determinadas condições. Tal demonstração envolve o Teorema de Existência e Unicidade de uma Equação Diferencial Ordinária.

Teorema 9.16 *Considere um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma curva regular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I,\ \Omega)$, $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ e uma base ortonormal positiva $\mathcal{V} = \left\{v_1 = \dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||},\ v_2,\ \ldots,\ v_n\right\} \subseteq \mathcal{T}_{\gamma(t_0)}(\Omega)$, então existe um único referencial de Bishop $\mathcal{X} = \{\mathcal{B}_1(t),\ \mathcal{B}_2(t),\ \ldots,\ \mathcal{B}_n(t)\} \subseteq \mathfrak{X}(\gamma)$ verificando $\mathcal{B}_i(t_0) = v_i \in \mathcal{V}$, para todo $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.*

BIBLIOGRAFIA

[1] CARMO, Manfredo Perdigão do. **Geometria Riemanniana**, 6.ed. Rio de Janeiro, 2019. Projeto Euclides. 1969.

[2] BISHOP, Erret. **There is more than one way to frame a curve**, Amer. Math. Monthly, vol. 82, 1975, pp. 246–251.

UFSCar — XI Bienal de Matemática 2024 — Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Um estudo sobre o envoltório de Grassmann e o envoltório supercomutativo

Monteiro, Gabriel Santana[439]

Resumo: *O presente trabalho está inserido na teoria das Álgebras com Identidades Polinomiais, também conhecida como PI-Teoria. Dizemos que um polinômio em variáveis não comutativas é uma identidade polinomial para álgebra A quando avaliado em quaisquer elementos de A se anula. Assim, uma PI-Álgebra é uma álgebra que admite, pelo menos, uma identidade polinomial não trivial. Desse jeito, a grosso modo, podemos dizer que a PI-Teoria busca relacionar o efeito das identidades polinomiais na estrutura das álgebras que as satisfazem. Neste trabalho damos especial atenção às álgebras de Grassmann, no que diz respeito às suas identidades polinomiais e graduações. Falamos sobre o envoltório de Grassmann e o envoltório supercomutativo de uma superálgebra. O objetivo principal deste trabalho foi encontrar a conexão entre a classificação das superálgebras simples de dimensão finita e o envoltório de Grassmann. Para isto, usamos os conceitos e resultados já existentes nesse contexto, além de utilizar a classificação dos T-ideais verbalmente primos de Kemer. Como se conhece muito pouco sobre o comportamento dos envoltórios mencionados, nossa pesquisa vai na direção de uma boa compreensão de tudo o que já foi realizado já que trata-se de uma teoria recente onde ainda há muito o que desenvolver. Este trabalho foi supervisionado pela Fernanda Gonçalves de Paula (UESC).*

Palavras-chave: *Álgebras graduadas, superálgebras, álgebras supercomutativas, envoltório supercomutativo.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BRANDÃO JÚNIOR, A. P. **Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas**. 2006. 70 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2006.

[2] ALVES, I. Z. M. **Álgebras e Identidades Graduadas**. 2012. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, Brasília, 2012.

[3] SARTORI, K. K. **Polinômios Standard e Simétrico em Álgebras verbalmente primas**. 2017. 43 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, Salvador, 2017.

[439] Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos

A matemática por trás do buscador do Google

Uma análise do algoritmo de busca do Google

Salviano Cesar, Geovana[440] e Lopes Pinheiro, Sávio[441]

Resumo: *Fundada em 1998 na Califórnia, EUA, o Google é uma empresa de tecnologia responsável pelo desenvolvimento da maior plataforma de buscas em ambientes virtuais do mundo. Esta ferramenta apresenta um sistema capaz de medir o nível de importância de cada informação coletada e organizá-las em um sistema classificatório de modo que os tópicos mais relevantes sejam apresentados nas primeiras páginas da plataforma. Essa classificação possui alguns parâmetros baseados em critérios pré estabelecidos, entre eles o Pagerank. O objetivo geral do pôster é enfatizar a estrita ligação entre este método de organização de informações e os conceitos matemáticos que o orbitam.*

Palavras-chave: *Pagerank, Google, grafos.*

INTRODUÇÃO

Google e o método Pagerank

Larry Page era ainda um jovem de 22 anos quando conheceu o ainda graduando Sergey Brin com o qual formou uma longa amizade. A dissertação produzida por eles, intitulada *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine* descrevia de maneira técnica e teórica as propriedades de uma ferramenta de busca capaz de organizar as pesquisas por relevância. A base para que isso fosse possível estava em um algoritmo desenvolvido pelos pesquisadores, que o nomearam de *Pagerank*.

O funcionamento do sistema *Pagerank* tem como base os endereços virtuais das páginas, conhecidos como *links*. Como cada página possui um *link* página, por exemplo: suponha que uma página A contenha um texto explicando o porquê de π ser um número irracional. Eventualmente, surgirá uma página B que também faça essa explicação e ainda referencie a página A como base para a sua pesquisa. E da mesma forma, pode haver o surgimento de uma terceira página C que referencie através do *link* a página B. Quanto mais uma página é referenciada, mais relevante ela se torna para o algoritmo do pagerank e, dessa forma, ela ocupará o topo da lista de resultados para a pesquisa feita pelo usuário.

---

[440]Universidade Federal Fluminense

[441]Universidade Federal Fluminense

Pagerank, Teoria dos Grafos e a Álgebra Linear

O algoritmo do Pagerank analisa a conexão entre as páginas, que pode ser representada por grafos, onde os vértices representam as páginas da web e as arestas os *links* que levam um site a outro. Veja abaixo o exemplo de um grafo que representa 10 páginas que estão conectadas na internet.

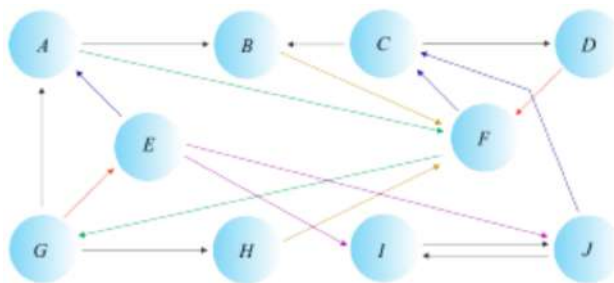


Fig. 136: Esquema representativo da ligação entre páginas

Com a ajuda da Álgebra Linear, o Pagerank consegue ordenar a importância de cada site através de sistemas lineares. Quando um site cita outro, ele acaba dividindo sua relevância, caso ele cite dois ou mais sites, a mesma é dividida em duas ou mais partes. Dessa forma, as equações representam a importância de cada página, onde aparecem os sistemas lineares. E estes por sua vez, quando resolvidos, nos darão o valor do "peso"de cada site para que sejam ordenados por ordem de importância.

Critério de Seleção

Vejamos como funciona o critério de seleção para n-páginas da internet. O peso de uma página é proporcional à soma das citações que esta recebe das outras, ou seja:

$$P_i : x_i \alpha \propto \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j = \begin{cases} \frac{1}{l_{ij}} \; se \; P_i \rightsquigarrow P_j \\ 0 \; se \; caso \; \text{ contrário} \end{cases}$$

com $i = 1, 2, ..., n$. A tabela abaixo resume as variáveis da equação mencionada.

Tab. 12: Váriaveis da Modelagem

Variáveis	Descrição
P_i	$i-$ésima página da internet
$P_i \rightsquigarrow P_j$	A página P_i *linka* a página P_j
x_i	peso da página P_I
$\frac{1}{l}x_i$	importância de P_i, sendo $l \in \mathbb{Z}^+$ o número de vezes que P_i *linkou* para outras páginas

Da equação apresentada, temos:

$$Ax = \lambda x \tag{89}$$

onde λ é o coeficiente de proporcionalidade, $A = (a_{ij})_{n \times m}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$ e $1 \le l_{ij} \le n - 1$. Essa é a modelagem matemática que usaremos para apresentar exemplificações de como o *Pagerank* ordena as prioridades em que as páginas são apresentadas ao leitor. Entre algumas definições importantes dos campos da Algebra Linear e da Teoria do Grafos que serão enunciadas, o seguinte teorema é o principal por trás dessa teoria Matemática do Google e terá suma importância em seu desenvolvimento:

Theorem 9.3 (Perron-Frobenius) *Seja A uma matriz de ordem n, não negativa e irredutível. Então:*

1. *Existe um único autovalor positivo* λ *de* A *tal que* $\rho(A) = \lambda$.
2. *Existe um único autovetor positivo, associado* λ.
3. *O autovalor* λ *é simples, ou seja, tem multiplicidade algébrica igual a um.*

CONCLUSÕES

O trabalho desenvolvido busca apresentar os conceitos abordados, tal como a relação da atividade de pesquisa do Google com a Matemática através da Algebra Linear e Teoria dos Grafos. Seu objetivo é revelar como funciona parte da matemática relacionada ao funcionamento do buscador, mostrando quais pré-conceitos se destacam para esse entendimento e exemplificando o algoritimo com um número específico de páginas.

BIBLIOGRAFIA

[1] BATTI, C. B. **Um pouco da Matemática por trás do algoritmo Pagerank do google.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

[2] SOARES, J. **Um simples estudo da Matemática por trás do Google.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio, 2018.

O teorema espectral e suas aplicações

Detogni, Gileade Trentin[442] e Salomão, Mateus Eduardo[443]

Resumo: *Neste trabalho, serão apresentadas duas versões (uma para operadores autoadjuntos e outra para operadores normais) do Teorema Espectral, um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear. Ademais, serão abordadas aplicações deste teorema nas áreas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Diferencial.*

Palavras-chave: *Teorema espectral, autoadjunto, aplicações.*

INTRODUÇÃO

O estudo da diagonalização de operadores em um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita permite estabelecer condições necessárias e suficientes para tal espaço ter uma base formada por autovetores de um dado operador linear. Quando o espaço admite produto interno, podemos aprimorar este estudo. Neste contexto, é possível definir operadores autoadjuntos e operadores normais, e com isso analisar a existência de bases ortonormais formadas por autovetores. Desta análise, surgem as versões do famoso Teorema Espectral, um dos mais relevantes resultados de Álgebra Linear. Este teorema tem uma vasta quantidade de aplicações e, neste trabalho, apresentaremos uma envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias e uma na área de Geometria Diferencial. Neste resumo não faremos as demonstrações dos resultados abordados, devido à concisão do texto, mas destacamos que as mesmas se encontram nas referências [1], [2] e [3].

O TEOREMA ESPECTRAL

Ao longo do texto, $\mathbb{K}$ representará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$). Além disso, V denotará um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno (que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$), e $L(V, V)$ o espaço vetorial dos operadores lineares de V.

Definição 9.18 *Seja $T \in L(V, V)$. Dizemos que T possui um adjunto se existir um operador linear $T^* \in L(V, V)$ tal que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$ para todos $u, v \in V$. Diremos, neste caso, que T^** é o adjunto *de T. Mais ainda, o operador T é chamado de* autoadjunto *se T admite adjunto T^* e $T^* = T$.*

Um importante resultado que permite caracterizar os operadores autoadjuntos será feito na sequência. Indicaremos por $\overline{[T]}_B^t$ a matriz transposta conjugada de $[T]_B$, que é a matriz de T com relação a uma base B de V.

Proposição 9.6 *Seja $T \in L(V, V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) T é autoadjunto.

[442] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Este autor foi apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

[443] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Orientador do trabalho.

b) *Existe uma base ortonormal* B *de* V *tal que* $[T]_B = \overline{[T]}_B^t$.

c) $[T]_B = \overline{[T]}_B^t$ *para toda base ortonormal* B *de* V.

Em seguida, apresentaremos a versão do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.

Teorema 9.17 (Teorema Espectral (autoadjunto)) *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se* $T \in L(V, V)$ *é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de* V *cujos vetores são autovetores de* T.

Uma consequência imediata do teorema anterior é a seguinte:

Corolário 9.1 *Seja* V *um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se* $T \in L(V, V)$ *é autoadjunto, então* T *é diagonalizável.*

Vale destacar que a recíproca do Teorema Espectral é válida para $\mathbb{R}$-espaços vetoriais, mas não é válida para $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, conforme o contraexemplo a seguir.

Exemplo 9.3 *Seja* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por* $T(v) = (1 + i)v$. *Temos que* 1 *é autovalor de* T *associado a* $(1 + i)$, *mas* T *não é autoadjunto.*

Em seguinda, apresentaremos a definição de operador normal e a versão do Teorema Espectral para tais operadores.

Definição 9.19 *Seja* $T \in L(V, V)$, *onde* V *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial com produto interno. Dizemos que* T *é normal se existir* T^* *e* $T^* \circ T = T \circ T^*$.

Teorema 9.18 (Teorema Espectral (normal)) *Sejam* V *um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, e* $T \in L(V, V)$. *Então,* T *é um operador normal se, e somente se, existe uma base ortonormal de* V *cujos vetores são autovetores de* T.

aplicações

Solução de Sistemas de EDO

Indicaremos um sistema de n equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes por **x' =** A**x**, em que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Relembramos que uma matriz é autoadjunta quando o operador em relação a base canônica associado a tal matriz é autoadjunto.

Teorema 9.19 *Seja* $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ *um sistema de* n *equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Se* A *é autoadjunta, então a solução geral do sistema é da forma*

$$x(t) = c_1\xi_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n\xi_n e^{r_n t},$$

onde $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, $\xi_1, \dots, \xi_n \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *e* $r_1, \dots, r_n$ *são números reais não necessariamente distintos.*

Destacamos que o Teorema Espectral é utilizado na demonstração de tal resultado, para que seja obtida a base ortonormal de autovetores $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, que aparece na solução do sistema.

Curvaturas em Geometria Diferencial

Seja S uma superfície regular orientada e $N : S \to S$ a aplicação normal de Gauss. É conhecido que S é diferenciável e as propriedades de sua diferencial são essenciais no estudo de superfícies. No que segue, dado $p \in S$ denotaremos por T_pS o plano tangente a S em p.

Proposição 9.7 *A diferencial* $dN_p : T_pS \to T_pS$ *da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta.*

Uma vez que dN_p é autoadjunta, o Teorema Espectral nos garante a existência de uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS tal que $dN_p(e_1) = -k_1e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2e_2$. Os valores k_1 e k_2 são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental de S em p, e são as chamadas *curvaturas principais* de S em p. Tais valores têm grande relevância no estudo de Geometria Diferencial.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[2] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

Fábrica matemática: produzindo matemática através de experimentos.

Souza Guedes, Giovanna[444] e Ferreira de Souza, Luryane[445]

Resumo: *Este projeto tem como objetivo aproximar estudantes do ensino básico e superior, por meio de experimentos lúdicos de baixo custo. Essa abordagem visa estimular o pensamento crítico e dedutivo de forma descontraída, enquanto integra a universidade com a comunidade local. Ao promover essa interação, buscamos enriquecer a experiência educacional, democratizar o acesso ao conhecimento científico e criar um ambiente propício para a troca de ideias e experiências entre os participantes.*

Palavras-chave: *Divulgação científica, matemática, experimentos.*

INTRODUÇÃO

Caracterizada pelo desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo, reconhecimento de padrões e estratégias de resolução, a matemática vem se constituindo cada vez mais como uma área do conhecimento essencial para a resoluções de problemas e situações do cotidiano. Apesar de sua importância, ela é muitas vezes temida e evitada devido a exposição precoce do rigor matemático associado a cálculos extensos e desconectada da realidade, resumindo-se dessa forma a uma complexa algebrização. Nessa perspectiva, a Fábrica Matemática busca juntar a matemática a situações lúdicas por meio de experimentos.

A priori, tornar o ensino da matemática mais didático, interativo e divertido, constitui uma ferramenta essencial para aproximar estudantes da educação básica e o conhecimento lógico matemático. Além disso, promover uma aprendizagem significativa por meio de experimentos, resulta no desenvolvimento de habilidades conforme é exigido que as instituições de ensino básico trabalhe com os estudantes. Por conseguinte a divulgação matemática dos projetos desenvolvidos pela Fábrica Matemática democratiza o acesso ao conhecimento e fortalece a capacidade da sociedade de enfrentar os desafios modernos.

Quando olhamos para as estatísticas educacionais, vemos que apenas 8% dos alunos na região Nordeste tem um aprendizado adequado em matemática, de acordo com o PISA 2018 [1]. Em Barreiras, a pontuação média em matemática está abaixo da meta nacional, destacando a urgência de melhorias [2]. Diante desse cenário, surge a necessidade de iniciativas que abordem essas questões de forma eficaz.

Assim, esse projeto foi concebido e elaborado com estudantes da graduação em matemática, da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB) com o objetivo de constribuir para uma aprendizagem significativa da matemática, até então injeçada na educação básica, para práticas lúdicas e experimentais que aproxima os estudantes e estimula a aprendizagem.

[444]Universidade Federal do Oeste da Bahia
[445]Universidade Federal do Oeste da Bahia

DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O projeto Fábrica Matemática foi implementado para criar experimentos de divulgação de matemática e apresentá-los em atividades de divulgação científica, como o Caminhão da Ciência (projeto de extensão da Universidade Federal do Oeste da Bahia) e em escolas da região.

Experimentos e Execução

Como experimentos já construídos e/ou apresentados, temos:

- A **Torre de Hanói**: é um quebra-cabeça onde discos de diferentes tamanhos precisam ser movidos entre três pinos, seguindo regras específicas. O objetivo é transferir todos os discos de um pino inicial para outro, utilizando um pino intermediário, sem colocar um disco maior sobre um menor. Este jogo é usado para ensinar princípios de recursão e estratégia em computação e matemática.
- A **tábua de demonstração do teorema de Pitágoras**: é uma representação visual que confirma o teorema, mostrando que o quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados dos catetos. Esse experimento ajuda a entender e aplicar o teorema de forma prática. Mostrando através de áreas de quadrado uma demonstração do teorema de Pitágoras.
- A **faixa de Moebius**: é uma superfície com apenas um lado e uma única face. Ela é usada para demonstrar conceitos de topologia e geometria, desafiando nossa intuição sobre superfícies. Comparamos as características da faixa de Moebius com a superfície cilíndrica e discutimos características como orientabiblidade do cilindro e de superfícies não orientáveis como a faixa de Moebius. Mostramos também o que ocorre com a faixa caso cortamos a faixa de Moebius ao meio ou numa razão de um terço da faixa, mostrando que no primeiro caso não temos como resultado uma outra faixa de Moebius, já no segundo caso temos uma faixa de Moebius, respectivamente [3].
- O **ábaco** e o **soroban**: são ferramentas usadas para cálculos matemáticos básicos. Eles ajudam no desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e agilidade matemática, usando contas para representar e manipular números de forma eficiente.

Atualmente, as atividades de produção dos experimentos ocorrem na sala designada para o projeto Fábrica Matemática. As apresentações são realizadas em diversos locais, incluindo a Biblioteca da UFOB e escolas da região. O contato com a comunidade externa é estabelecido por meio de exposições itinerantes, durante as quais os experimentos são exibidos e os participantes são desafiados a resolver os problemas matemáticos. Após a resolução desses desafios, são feitas breves apresentações explicando os conceitos matemáticos abordados nos experimentos, complementadas por curiosidades sobre o tema. O projeto também conta com uma página do instagram Fábrica Matemática (@fabrica.mat) para divulgação de suas atividades e de conteúdos de divulgação matemática.

Fig. 137: Apresentação da Fábrica Matemática no projeto "Caminhão da Ciência", na cidade de Barreiras - BA. 09/04/2024.

CONCLUSÕES

Em resumo, o projeto fortalece a área de matemática, introduzindo os estudantes à divulgação científica e oferecendo materiais inovadores de apoio para disciplinas e práticas de ensino. Ele torna a matemática mais acessível e interessante por meio de experimentos interativos, promovendo um ambiente descontraído para a divulgação da disciplina e aproximando os estudantes da sociedade.

BIBLIOGRAFIA

[1] DADOS DE APRENDIZAGEM. Ciências: Percentual de Alunos com Aprendizado Adequado. Disponível em: <https://paises.qedu.org.br/dados-de-aprendizagem/> Acesso em: 19 mai. 2023.

[2] QEDU IDEB - Barreiras/BA Disponível em: <https://qedu.org.br/municipio/2903201-barreiras/ideb> Acesso em: 19 Mai. 2023.

[3] PEREGRINA, R. C. C. Fita de Moebius : desenrolar de matemática superior no ensino médio, **Dissertação PROFMAT da UNIRIO**

Análise da flutuação de torcedores de um time de futebol sobre o viés de recorrências

Oliveira Neto, Guilherme Luiz de[446]; Costa, Ronaldo Campelo da[447] e Farias de Oliveira, Luiz Gustavo[448]

Resumo: *Este trabalho analisa a variação no número de torcedores de um time de futebol usando recorrências lineares de primeira ordem não homogêneas. Utilizando como dados o número de torcedores atuais* p_0*, a taxa anual de natalidade* i*, a taxa anual de mortalidade* j *e, além disso, um fator constante anual* R *que mede o número de torcedores que desistem de torcer pelo seu time, modelamos e analisamos essa flutuação, identificando condições para possível extinção da torcida. Os resultados destacam a importância das recorrências na estratégia dos clubes, enquanto a beleza do enunciado e a solução deste problema residem na simplicidade e na universalidade das equações de recorrência linear, que permitem capturar a complexidade dinâmica da torcida de forma elegante e precisa, permitindo uma análise geral. Ao observar como os fatores de natalidade, mortalidade e desistência influenciam a evolução do número de torcedores ao longo do tempo, somos conduzidos a uma compreensão mais profunda não apenas da matemática envolvida, mas também da interação entre aspectos sociais e econômicos do fenômeno do apoio a um time de futebol.*

Palavras-chave: *Matemática discreta, recorrências, crescimento/decrescimento de torcedores, modelagem.*

INTRODUÇÃO

A paixão pelo futebol no Brasil vai além das arquibancadas, refletindo-se na quantidade de torcedores ao longo do tempo. Por meio de recorrências lineares, modelamos como fatores como natalidade, mortalidade e desistência de torcer afetam o tamanho da torcida. Essas equações fornecem uma estrutura matemática para entender a evolução da flutuação do número de torcedores, destacando a importância das recorrências lineares na análise e no planejamento estratégico de clubes de futebol, onde prever o comportamento do crescimento/decrescimento da torcida.

[446] *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI.
[447] *Campus* Picos. Este autor foi apoiado pelo IFPI.
[448] *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI.

Caracterizando o Belo Problema

Para calcular o número de torcedores de um time de futebol ao longo do tempo, podemos utilizar uma equação de recorrência linear de primeira ordem não homogênea. Representemos o número de torcedores em um determinado ano como p_n, onde n é o número do ano.

A cada ano, o número de torcedores pode ser descrito da seguinte maneira: a **taxa de natalidade**, representada pela variável i, corresponde ao aumento no número de torcedores; a **taxa de mortalidade**, representada pela variável j, corresponde à diminuição no número de torcedores; e além disso, um **número fixo** R de torcedores deixa de torcer pelo time anualmente. Portanto, podemos expressar a recorrência como:

$$p_{n+1} = p_n + p_n \times i - p_n \times j - R$$

Isso pode ser simplificado como:

$$p_{n+1} = p_n \cdot (1 + i - j) - R$$

A equação acima nos permite calcular o número de torcedores em qualquer ano, dado o número inicial de torcedores p_0, a taxa de natalidade i, a taxa de mortalidade j e o número fixo R de torcedores que deixam de torcer a cada ano. Se desejar uma previsão para vários anos no futuro, basta aplicar essa equação sucessivamente, usando o resultado de um ano como entrada para o próximo ano.

Neste estudo, procuramos resolver o intrigante problema da dinâmica da torcida do São Paulo, cujo enunciado é "A torcida do São Paulo tem hoje p_0, membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desistem de torcer. Admita i>j, determine o número de torcedores daqui a n anos e, análise se está torcida está condenada a extinção?", utilizando conceitos de recorrências lineares para oferecer uma visão elegante e perspicaz.

Contextualizando o Problema

Ao abordar a questão da flutuação do número de torcedores ao longo do tempo, mergulhamos em uma jornada matemática que vai além da mera análise numérica, buscando encontrar beleza tanto no enunciado do problema quanto em sua solução.

Ao modelar a variação da torcida ao longo dos anos, utilizando equações recursivas que consideram taxas de natalidade, mortalidade e desistência, mergulhamos na essência matemática do problema. Essas equações, embora simples em sua formulação, revelam a complexidade subjacente da dinâmica da torcida e nos permitem extrair insights valiosos sobre seu comportamento futuro.

Portanto, este estudo não apenas busca resolver um problema específico, mas também procura encontrar beleza tanto no processo de formulação do enunciado quanto na elegância da solução matemática, oferecendo uma perspectiva única que combina precisão analítica com uma apreciação mais ampla da interseção entre matemática e fenômenos sociais.

CONCLUSÕES

Este estudo ressalta a importância das recorrências lineares na análise da dinâmica da torcida de um time de futebol ao longo do tempo, revelando padrões e tendências essenciais. Ao utilizar equações recursivas, identificamos fatores influentes, como taxas de natalidade, mortalidade e desistência, além de extrair condições para possível extinção da torcida. Essa abordagem não apenas oferece insights sobre a paixão pelo futebol no Brasil, mas também combina a elegância da teoria matemática com a complexidade do mundo real, fornecendo uma perspectiva valiosa para compreender e gerenciar os aspectos sociais e econômicos desse fenômeno culturalmente significativo.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, Volume 2. Coleção do Professor de Matemática. Ed. SBM: 6. ed. - Rio de Janeiro, 2006.

[2] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**, Volume 4: Enunciados e Soluções dos Exercícios. Coleção do Professor de Matemática. Ed. SBM: Rio de Janeiro, 2007.

[3] LIMA, R. C. S. **Anotações sobre equações de diferença-Recorrências**. Universidade Federal Fluminense - UFF-RJ, 2009.

[4] MOREIRA, C. G. T. A.. **Seqüências Recorrentes**. Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina no.4 - pp. 53-69, 2007 (Artigo de divulgação).

[5] POLLMAN, H. S. **Equações de Recorrência**. Rio de Janeiro: SBM, EUREKA! n. 9, p. 33-40, 2000.

[6] Morgado, A. C., Pinto Carvalho, P.C., **Matemática Discreta**, - 2.ed. Rio de Janeiro: SBM,2015. 294p. (Coleção PROFMAT).

[7] Pacheco, Adriano Mendes., **Modelagem matemática no ensino de equações de recorrência**, - Trabalhos de Conclusão de Curso: Mestrado Profissional em Matemática, 2013. 49p. (Profmat/SBM-UFMT).

Uma demonstração da redutibilidade completa da representação exponencial complexa

Lima, Guilherme[449]

Resumo: *A teoria de representações de grupos permeia diversos ramos do conhecimento e tem sido usada, por exemplo, para estudar vibrações moleculares, grafos e grupos mais complexos. Um problema de interesse em tal teoria é o de saber quando uma dada representação é completamente redutível. Neste trabalho apresentamos uma demonstração da redutibilidade completa da representação exponencial complexa.*

Palavras-chave: *Álgebra, representação de grupos, representação exponencial.*

INTRODUÇÃO

Em geral, e principalmente para representações de dimensão maior > 3, não há um método para determinar a redutibilidade completa de uma representação.

Por outro lado, é conhecido − no caso em que o grupos representado é finito, e o espaço de representação complexo −, que representações nessas condições são completamente redutíveis, o que não vale para grupos infinitos.

Neste trabalho, usando um teorema de decomposição e propriedades de representações (além de rudimentos de equações diferencias e álgebra linear), mostramos que a representação exponencial complexa é completamente redutível.

Definições e Teoremas

Definição 9.20 *Uma representação linear de um grupo G sobre um corpo K é um homomorfismo*

$$T : G \to GL(V_K) \tag{90}$$

onde V_K é um espaço vetorial, denominado espaço de representação, e $GL(V_K)$ é o conjunto das transformações lineares invertíveis de V_K em V_K.

O exemplo seguinte introduz nosso objeto de interesse.

[449] Universidade de São Paulo

Exemplo 9.4 (Representação exponencial) *Seja $G = (\mathbb{C}, +)$ o grupo complexo aditivo. Sabemos da teoria de equações diferenciais (ver página 64 de [1]) que, o caminho diferenciável x, definido por*

$$x'(t) = x(t)A \tag{91}$$

sujeito à condição

$$x(0) = I_n \tag{92}$$

onde $x'(0) = A$ é uma matriz complexa de ordem n, e I_n é a matriz identidade de ordem n, tem a forma

$$x(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \tag{93}$$

e satisfaz:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad \forall t, s \in \mathbb{C} \tag{94}$$

isto é, é um homomorfismo. Além disso, sabemos que

$$det(e^A) = e^{tr(A)} \neq 0 \tag{95}$$

consequentemente, define uma representação.

Definição 9.21 *Seja $T : G \to GL(V)$ uma representação de G em V. Um subespaço $U \subset V$ é dito invariante sob T (ou T-invariante), se*

$$T(g)u \in U, \quad \forall g \in G \;\; e \;\; \forall u \in U \tag{96}$$

Definição 9.22 *Uma representação $T : G \to GL(V)$ é dita irredutível se ela não possui subsespaços T-invariantes não triviais, i.e, diferentes de V e $\{0\}$.*

Definição 9.23 *Uma representação $T : G \to GL(V)$ é dita completamente redutível se para todo subsespaço $U \subset V$, T-invariante, existe um subespaço T-invariante W, tal que $V = U \oplus W$.*

Dada uma representação $T : G \to GL(V)$, e um subespaço T-invariante U, define-se uma nova representação, chamada de representação *quociente*, denotada por $T_{V/U}$, que satisfaz $T_{V/U}(g)(v + U) = T(g)v + U$, para todo $g \in G$ e $v \in V$.

O teorema seguinte estabelece uma relação entre a decomposição do espaço de representação e a redutibilidade completa da representação. Sua demonstração pode ser encontrada em [3].

Teorema 9.20 *Seja $T : G \to GL(V)$ uma representação de G. Seja*

$$V = V_1 + \cdots + V_n \tag{97}$$

uma decomposição de V, onde os V_i são subespaços invariantes e minimais[450]*. Então T é completamente redutível. Mais ainda, para todo subespaço invariante U, existem índices $i_1, \ldots, i_p$ tais que*

$$V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p} \tag{98}$$

O próximo teorema é uma consequência do anterior. Ele assegura que, se uma representação é completamente redutível, qualquer representação quociente também o é.

Teorema 9.21 *Toda representação quociente de uma representação completamente redutível também é completamente redutível.*

Combinando os dois últimos teoremas, obtemos o

Teorema 9.22 *A representação exponencial $x : t \in \mathbb{C} \mapsto e^{t\alpha} \in GL(V)$, onde V é um espaço complexo de dimensão finita n, e $\alpha : V \to V$ um operador linear; é completamente redutível se, e somente se, α é diagonalizável.*

[450] Com minimais queremos dizer que, a representação, restrita a um subespaço invariante, é irredutível.

BIBLIOGRAFIA

[1] Doering, C. I.; Lopes, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*, sexta edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[2] Steinberg, B. *Representation Theory of Finite Groups:* An Introductory Approach, New York: Springer, 2012.

[3] Vinberg, E. *Linear Representation of Groups*. Translated from the Russian by A. Iacob, first edition reprint, Switzerland: Birkhaüser, 2010.

A hipótese de Riemann e a distribuição dos números primos.

Barata, Gustavo Alves[451]

Resumo: *A busca por um padrão na distribuição dos números primos é um problema em aberto na matemática que perdura na comunidade científica a séculos. Dado o impacto e importância desses números para a construção e entendimento da matemática e para o mundo, essa busca se torna essencial. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar a história por trás da distribuição dos números primos, de modo que será dividido em duas partes: a história acerca do Teorema dos Números Primos e a Hipótese de Riemann.*

Palavras-chave: *Teorema dos números primos, função zeta, hipótese de Riemman.*

INTRODUÇÃO

Na Grécia Antiga, os números primos já eram vistos como essenciais para entender a Matemática, dada a sua importância na construção dos números naturais. Na Idade Moderna e Contemporânea, os números primos são de extrema importância para a área da Teoria dos Números, devido a grande quantidade de teoremas presentes nela que os envolvem.

Dessa forma, vários matemáticos famosos estudaram os números primos em algum momento de suas vidas, por diversos motivos e objetivos, como Friedrich Gauss, Pafnuty Chebyshev, Jacques Hadamard, Leonhard Euler e Bernhard Riemann. Porém, há uma questão que assombra os matemáticos desde a Grécia Antiga: como os números primos estão distribuídos nos números naturais e, além disso, como localizá-los de forma eficiente?

O objetivo deste trabalho é, justamente, apresentar a história que originou um dos teoremas mais importantes acerca dos números primos e sua distribuição e, também, um dos principais problemas em aberto na Matemática que é intimamente ligado a ele: a Hipótese de Riemman.

TEOREMA DOS NÚMEROS PRIMOS (TNP)

Desde Euclides (c.350-300 a.C), sabemos que há infinitos números primos, mas entender a sua distribuição foi (e ainda é) um verdadeiro desafio. Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático a fazer uma estimativa realmente boa sobre o comportamento desses números. O grande avanço de Gauss foi mudar a pergunta que os matemáticos se faziam: em vez de querer saber a localização precisa de qualquer número primo, ele quis saber a quantidade de números primos entre 1 e outro número natural N.

Em 1792, por volta dos 15 anos de idade, enquanto estudava logaritmos utilizando um livro que ganhara de presente, Gauss percebeu que havia uma tabela de números primos na contracapa e achou curiosa a sua presença. Denotando por $\pi(N)$ a função que conta a quantidade de números primos entre 1 e N (ex:

[451]FACMAT/UFPA

$\pi(10) = 4$), Gauss decidiu dividir esse número N por $\pi(N)$. Ao realizar essa operação, Gauss percebeu que ela se aproximava cada vez mais do $\ln(N)$ conforme o valor atribuído a N aumentava. Dessa forma, Gauss conjecturou que

$$\ln(N) \sim \frac{N}{\pi(N)} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(N) \sim \frac{N}{\ln(N)}.$$

O matemático Pafnuty Chebyshev (1821 – 1894) conjecturou, em dois artigos de 1848 e 1850, a seguinte lei assintótitca:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \quad = \quad 1,$$

ou seja, para valores de x suficientemente grandes, $\pi(x)$ é assintoticamente igual a $x/\ln x$.

No ano de 1859, Benhard Riemman (1826 - 1866) tentou provar esse resultado. Porém, para que a demonstração funcionasse, Riemman teve que assumir como verdadeira uma hipótese acerca de uma função conhecida como função zeta de Riemman. De forma independente, no ano de 1896, Jacques Hadamard (1865 – 1963) e de la Vallée-Poussin (1866 – 1962) conseguiram provar essa lei tendo como base o trabalho de Riemman. No entanto, eles conseguiram fazer isso de forma que não foi necessário assumir a hipótese feita por Riemman, que será melhor apresentada no capítulo seguinte. Dessa forma, tal limite ficou conhecido como **Teorema dos Números Primos (TNP)**.

HIPÓTESE DE RIEMMAN

A Hipótese de Riemman é um dos problemas em aberto mais famosos da Matemática. Ela está presente na lista "Problemas do Milênio" elaborada pelo Instituto Clay de Matemática (CMI), proposta em 2000, junto de outros 6 problemas. A Hipótese de Riemman é, também, o único dentre esses 7 a pertencer a uma outra lista de problemas em aberto extremamente famosa: os 23 Problemas de Hilbert, de 1900. A Hipótese de Riemann surge justamente no estudo sobre a distribuição dos números primos. Porém, antes de falarmos propriamente dela, devemos comentar sobre um elemento muito importante em sua origem: a função zeta de Riemman.

Tal função é uma série infinita e foi enunciada pela primeira por Leonhard Euler (1707 – 1783) em seu artigo *"Variae observationes circa series infinitas"*. A princípio, Euler trabalhou com variáveis inteiras e reais. Essa série foi, mais tarde, chamada de função zeta por Riemman e denotada pela letra grega e é dada da seguinte forma:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

Investigando essa série, Euler percebeu que ela tinha uma profunda relação com os números primos, que ficou conhecida como Fórmula do Produto de Euler:

$$\zeta(s) \quad = \quad \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

em que p percorre todos os números primos.

Em 1859, Riemann foi convidado para participar da Academia de Ciências de Berlim, e fazia parte do protocolo que novos membros escrevessem um trabalho para apresentar. Dessa forma, publicou um artigo intitulado *"Sobre o Número de Primos Menores Que Uma Dada Magnitude"*. Foi publicado na área da Teoria dos Números e que, em sua maioria, trazia mais esboços de ideias do que provas. Apesar disso e de ter sido seu único artigo nessa área, ele se tornou um dos mais influentes e importantes para ela nas décadas seguintes.

O objetivo de Riemman nesse paper era provar o Teorema dos Números Primos. No decorrer desse trabalho, Riemman consegue chegar em uma função equivalente à $\pi(x)$. Porém, para que ela fosse verdadeira e, consequentemente, provasse o TNP, Riemman teve que estudar os zeros da função $\zeta(s)$, em que s é um número complexo.

Através da equação funcional

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

onde Γ é a função Gama, constatou-se que a função $\zeta(s)$ era igual a zero nos inteiros negativos pares $\{-2, -4, -6, -8...\}$ (que ficaram conhecidos como zeros triviais) e quando $0 < Re(s) < 1$ (que ficaram conhecidos como zeros não-triviais). Acerca dos zeros não-triviais, Riemman teve que fazer a seguinte hipótese: todos os zeros complexos de $\zeta(s)$ tem parte real igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, $Re(s) = \frac{1}{2}$. E essa simples, mas poderosa hipótese ficou conhecida como **Hipótese de Riemman**. Desta forma, neste trabalho, apresentaremos a demonstração do TNP, dada por [1], e discutiremos algumas propriedades importantes da função zeta de Riemann.

BIBLIOGRAFIA

[1] MOREIRA, C. G. *et al.* **Teoria dos Números**: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro. 3 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. p. 500. (Projeto Euclides).

[2] GOMES, Lucas V. de O.G. **Sobre a distribuição dos números primos**. Uberlândia: Repositório UFU, 2020.

[3] DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos**: a história de um problema não resolvido na matemática. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

Conceitos trigonométricos na competição MOBFOG

Rossi, Gustavo e Salvador, José A.[452]

Resumo: *Este trabalho mostra como as relações trigonométricas podem ser aplicadas a exploração da competição de lançamentos de foguetes. Apresentamos uma atividade de competição da MOBFOG – Mostra Brasileira de Foguetes [3], que é uma prática, bem descontraída e introduz noções trigonométricas para alunos do 9° ano do Ensino Fundamental. Os alunos constroem e lançam um foguete construído com garrafa pet cujo objetivo é atingir o maior alcance. Para o sucesso do experimento, a plataforma de lançamento deve ser montada obedecendo propriedades trigonométricas para obter o ângulo de lançamento ideal de 45°. Construímos tabelas com tentativas contendo ângulos de lançamento e alcance, e usamos o software LOGO em que simulamos o trajeto do foguete aplicando diferentes velocidades e variando os ângulos de lançamento. Com isso, os alunos perceberam que, para uma mesma velocidade de lançamento do foguete, pode-se alcançar objetivos diferentes quando variamos o ângulo de lançamento da plataforma com o horizonte como obter a altura máxima ou o maior alcance, o que é justificado pela trigonometria.*

Palavras-chave: *MOBFOG, lançamento oblíquo, trigonometria.*

INTRODUÇÃO

A dificuldade em trabalhar trigonometria em sala de aula tem sido cada vez mais visível e os alunos chegam cada vez menos preparados para enfrentar os estudos do ano escolar em que se encontra e os anos seguintes.

Uma geração onde a tecnologia está presente desde os primeiros anos de vida, em que as respostas tem que ser imediatas, prender a atenção dos alunos apenas falando em sala de aula já não é mais viável, o que nos leva acharmos outros meios de atingi-los e darmos sequência aos estudos de Matemática.

Os documentos oficiais [1, 2] apontam a utilização de diferentes metodologias para atingir os nossos alunos, concretamente, citamos alguns itens que o projeto político-pedagógico das unidades escolares vem considerando:

"utilização de diferentes mídias como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem e construção de novos saberes (Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio 4/5/2011 - Projetos Políticos Pedagógicos/Cap. VIII)."

Baseando nesta temática, como outros pesquisadores corroboramos, de forma a atingir os alunos e adequar melhor o conteúdo aos padrões atuais e de buscar aperfeiçoar-se. Considerando as diferentes ferramentas e materiais disponíveis o professor pode incrementar sua ação pedagógica. Segundo Sousa, Moita e Carvalho (2011, p. 20) [4]:

[452] DM - UFSCar

"[...] é de se esperar que a escola, tenha que "se reinventar", se desejar sobreviver como instituição educacional. É essencial que o professor se aproprie da gama de saberes advindo com a presença das tecnologias digitais da informação e da comunicação para que estes possam ser sistematizadas em sua prática pedagógica."

DESCRIÇÃO

Visando sanar as dificuldade que nós professores encontramos no ensino de trigonometria, utilizamos a tecnologia disponível no ambiente escolar e trabalhamos com materiais didáticos para a Olimpíada de Foguetes, que já era praticada na escola, porém não era relacionada em momento nenhum a interdisciplinaridade explicita com a Matemática. A competição da Mostra Brasileira de Foguete (MOBFOG)[3] ($19^{a.}$ (edição em 2024) consiste em grupos de 3 alunos que devem montar uma plataforma de lançamento, utilizando cano de construção com conexões, como base para o foguete feito de garrafa pet, com diferentes ferramentas e propulsores, como uma câmara com gás sob pressão e uma abertura em uma das extremidades, permitindo o escape do gás para o lançamento. Esse escape gera uma força que impulsiona o foguete na direção oposta para tentar o maior alcance. As formas de lançamento propostas pela competição, podem ser na forma de pressurização ou reação química.

Para o sucesso nos testes escolhemos a melhor combinação dos parâmetros e variáveis, como a escolha adequada da base de lançamento.

Inicialmente os alunos podem construir uma tabela com os valores do ângulo de lançamento e o respectivo alcance, mantendo outros parâmetros constantes.

Tab. 13: Ângulo de lançamento, alcance e altura do foguete

Ângulo de lançamento θ	**Alcance Δx**	**Altura**
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	...	...
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	...	...
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	...	...
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	...	...

Com este objetivo, as unidades trigonométricas auxiliam na montagem da plataforma de lançamento de maneira a atingir o máximo alcance, sendo que, os conhecimentos matemáticos e as técnicas de montagem interferem no resutado do experimento. Utilizando representação geométrica, a decomposição vetorial, o estudo das razões trigonométricas acaba sendo inserido na montagem da plataforma em que os alunos devem buscar o melhor ângulo possível.

Para ajudá-los nesta análise, utilizando de recursos tecnológicos, os alunos tiveram computadores disponibilizados onde utilizaram o software gratuito LOGO, e com ele simularam alguns ângulos de lançamentos e velocidade e puderam perceber mesmo que utilizassem a melhor composição para o lançamento, caso o ângulo não fosse o adequado a distância final sofreria interferência. Utilizando alguns materiais e sequências didáticas os alunos puderam projetar, utilizando a linguagem adequada do LOGO e verificar em forma de gráfico as possíveis trajetórias de lançamento. Com isso eles, chegaram a conclusão de que o ângulo de 45° é o que deveriam utilizar na base de lançamento para ter o melhor desempenho possível no alcance do foguete.

CONCLUSÕES

Analisando os dados que foram coletados, percebeu-se que houve uma grande participação dos alunos, não tendo nenhuma desistência neste período, porque foi uma atividade curricular fora do cronograma escolar, com grande aprovação dos alunos. O desempenho destes alunos em sala de aula referente ao assunto e entendimento de relações trigonométricas foi nítido, onde eles puderam perceber a lógica de aplicação e o motivo de sua utilização. Associando a parte teórica com formas diferenciadas de se buscar conhecimento facilitou o trabalho e enriqueceu o ambiente da sala de aula e fora dela. Os alunos começaram a prestar mais atenção durante as aulas e a interagir melhor com o professor e os próprios colegas

BIBLIOGRAFIA

[1] BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 12 out. 2023.

[2] BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. 4/5/2011. Projetos Políticos Pedagógicos/ Cap: VIII (Pág. 38)**. Equipe Técnica do DPEM/ NETO, A. S. *et all.*

[3] MOBFOG. **Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica.**
Mostra Brasileira de Foguetes. in http://www.oba.org.br/site/?idcat=29 &p=conteudo&pag=conteudo. Acesso em: 15 jan. 2024.

[4] Sousa, R. P, Moita, F. M. C. S. e Carvalho, A. B. G. **Tecnologias Educacionais na Educação**. Campina Grande - PB. EDUEPB. 2011

Fórmulas de área e coárea[453]

Casellato, Henrique[454].

Resumo: *O estudo das fórmulas de área e coárea são imperativos no ramo da Teoria Geométrica da Medida, pois com elas, torna-se possível calcular, por meio da integração do jacobiano do mapeamento Lipschitz* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$*, respectivamente, a medida n-dimensional da imagem de* f *(quando* $n \leq m$*) e a integral da medida* $(n-m)$*-dimensional dos conjuntos de nível de* f *(quando* $n \geq m$*). Esses resultados são extensões da famosa fórmula de mudança de variáveis para integrais de Riemann no Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis. Para entender por completo os conceitos de área e coárea, são necessários alguns conceitos preliminares, como propriedades de diferenciação de funções Lipschitz, o teorema de Rademacher, mapeamentos lineares e jacobianos. Por fim, o objetivo desse trabalho é introduzir as fórmulas de área e coárea (junto com uma breve explicação dos fundamentos preliminares) e suas aplicações mais comuns.*

Palavras-chave: *Geometria, coárea, área, medida, integração.*

CONCEITOS PRELIMINARES

Para entender por completo as fórmulas de área é coárea, antes é preciso introduzir alguns conceitos importantes, desde funções Lipschitz até Jacobianos.

Definição 9.24 *Seja* $A \subset \mathbf{R}^n$*, a função* $f : A \to \mathbf{R}^m$ *é chamada de* ***Lipschitz*** *se*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \tag{99}$$

para alguma constante C *e para todo* $x, y \in A$*. A menor constante* C *que satisfaz (99) para todo* x, y *é denotada por*

$$Lip(f) \equiv \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; x, y \in A, x \neq y\right\}$$

Definição 9.25 *Uma função* $f : A \to \mathbf{R}^m$ *é chamada de* ***localmente Lipschitz*** *se para cada compacto* $K \subset A$*, existe uma constante* C_K *tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K|x - y|$$

para todo $x, y \in K$*.*

Teorema 9.23 *(Teorema de Rademacher) Seja* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *uma função localmente Lipschitz, então* f *é* $\mathcal{L}^n$ *diferenciável quase-sempre.*

[453]Parte do trabalho de Iniciação Científica apoiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e orientada pelo Prof. Hermano Frid, DCM/USP-Ribeirão Preto.

[454]Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

Teorema 9.24 *(Teorema da decomposição polar) Seja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ um mapeamento linear.*

1. *Se $n \le m$, existem dois mapas, um simétrico $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ e um ortogonal $O : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que $L = O \circ S$.*
2. *Se $n \ge m$, existem dois mapas, um simétrico $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ e um ortogonal $O : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ tal que $L = S \circ O^\star$. Com $A^\star$ representando o adjunto de A.*

Definição 9.26 *Seja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é linear.*

1. *Se $n \le m$, $L = O \circ S$ e o **Jacobiano** de L é definido como $\|L\| = |\det S|$.*
2. *Se $n \ge m$, $L = S \circ O^\star$ e o **Jacobiano** de L é definido como $\|L\| = |\det S|$.*

Definição 9.27 *Seja Df a matriz gradiente de f. O Jacobiano de f é definido como $Jf(x) \equiv \|Df(x)\|$ ($\mathcal{L}^n$ q.s. x).*

FÓRMULA DA ÁREA E APLICAÇÕES

Nesta seção, assume-se que $n \le m$.

Teorema 9.25 *(Fórmula da área) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz, então para cada subconjunto $\mathcal{L}^n$-mensuráveis $A \subset \mathbf{R}^n$,*

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{H}^0(A \bigcap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y).$$

Ou seja, a integral do Jacobiano de f em A é igual à integral do número de pontos da pré-imagem $A \bigcap f^{-1}(y)$ (também chamada de função de multiplicidade) vezes a medida de Hausdorff n-dimensional de y.

Exemplo 9.5 *Uma aplicação da fórmula da área é no **comprimento de uma curva** ($n = 1$, $m \ge 1$), com $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz e injetiva. Escrevendo $f = (f^1, ..., f^m)$ e $Df = (\dot{f}^1, ..., \dot{f}^m)$ da forma que $Jf = |Df| = |\dot{f}|$ ($\cdot = \frac{d}{dt}$). Para $-\infty < a < b < \infty$, define-se uma curva $C \equiv f([a,b]) \subset \mathbf{R}^m$, então*

$$\mathcal{H}^1(C) = \text{"comprimento" de } C = \int_a^b |\dot{f}| dt$$

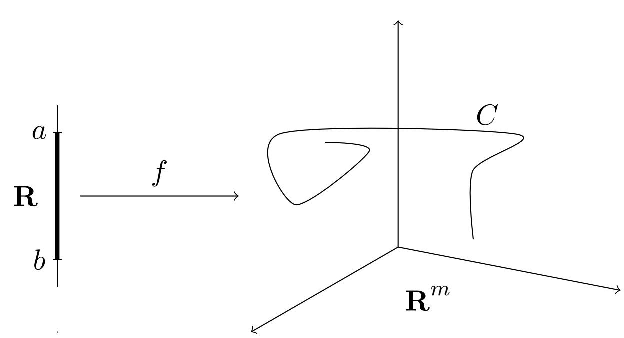


Fig. 138: Comprimento da curva.

FÓRMULA DA COÁREA E APLICAÇÕES

Nesta seção, assume-se que $n \ge m$.

Teorema 9.26 *(Fórmula da coárea) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz, então para cada subconjunto $\mathcal{L}^n$-mensuráveis $A \subset \mathbf{R}^n$,*

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \bigcap f^{-1}(y))dy.$$

Nota-se que a fórmula da coárea é uma generalização "curvilínea" do teorema de Fubini.

Para dar um exemplo de aplicação da fórmula da coárea precisaremos dos dois seguintes resultados que são consequências do Teorema 3.1.

Teorema 9.27 *(Fórmula de mudança de variáveis) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz, então para cada função $\mathcal{L}^n$-mensurável $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $g|_{f^{-1}(y)}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$-somável para $\mathcal{L}^m$ q.s. y e*

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x)Jf(x)dx = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-m} \right) dy.$$

Proposição 9.8 *Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ Lipschitz, com $\operatorname{ess\,inf} |Df| > 0$. Seja também $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $\mathcal{L}^n$-somável, então*

$$\int_{\{f>t\}} g dx = \int_t^{\infty} \left(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds.$$

Exemplo 9.6 *Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ dada por $(x, y) \mapsto y - x^2$. Temos que $Df(x) = (-2x, 1)$ e $|Df(x)| = \sqrt{1 + 4x^2}$, sabe-se que $Df(x) = (-2x, 1)$ e $|Df| = \sqrt{1 + 4x^2}$, então*

$$\int_{\mathbf{R}^2} g dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{y=x^2+t\}} \frac{g}{\sqrt{1+4x^2}} d\mathcal{H}^1 \right) ds.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] EVANS, Lawrence C.;GARIEPY, Ronald F. Measure theory aad fine properties of functions **CRC Press, Inc.**, 1992.

Introdução às superfícies de Riemann

Cohomologia de feixe

Torres, Jaider[455]

Resumo: *Uma superfície de Riemann é uma variedade complexa de dimensão* 1*. Ou seja, são espaços topológicos Hausdorff, conexos e segundo contáveis que localmente se assemelham ao plano complexo. Exemplos importantes de superfícies de Riemann incluem a esfera de Riemann* $\mathbb{C}_\infty$*, o toro complexo* $\mathbb{C}/\Lambda$*, e as curvas algébricas projetivas suaves, que desempenham um papel fundamental na geometria algébrica. Começamos estudando a categoria de superfícies de Riemann e examinando suas propriedades algébricas e topológicas. Em seguida, nos aprofundamos no estudo dos divisores sobre essas superfícies e sua correspondência com fibrados lineares. Introduzimos a teoria dos feixes e apresentamos um exemplo de cohomologia de feixes sobre o plano complexo.*

Palavras-chave: *Superfícies de Riemann, divisores, feixes e cohomología de feixes.*

INTRODUÇÃO

Vamos introduzir os objetos que estudamos neste trabalho.

Definição: (Superfície de Riemann) Uma ***superfície de Riemann*** é um espaço topológico X Hausdorff, conexo e segundo contável, junto com uma estrutura complexa sobre X.

Definição: Seja X uma superfície de Riemann, p um ponto de X e f uma função definida em uma vizinhança W de p. Dizemos que f é *holomorfa* em p se existe uma carta $\varphi_\alpha \in \mathcal{A}_X$, com $p \in \operatorname{dom}\varphi_\alpha$, tal que $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é holomorfa em $\varphi_\alpha(p)$. Dizemos que f é *holomorfa* em W se é holomorfa no sentido anterior em cada ponto $p \in W$.

Feixes e Divisores

Os feixes e pré-feixes sobre espaços topológicos, inicialmente, têm como principal uso conhecer as funções que satisfazem condições locais em um ponto e sua cohomologia permite saber quais das propriedades locais são globais no espacio.

Definição: Um *feixe* (de grupos abelianos) sobre $M \in \mathrm{Top}$ é um espaço topológico $\mathscr{J}$, juntamente com uma aplicação $\pi : \mathscr{J} \to M$, tal que:

(1) π é um homomorfismo local.

(2) Para cada $p \in M$, o conjunto $\mathscr{J}_p = \pi^{-1}(p) \subset \mathscr{J}$ tem uma estrutura de grupo abeliano.

(3) As operações de grupo de cada $\mathscr{J}_p$ são contínuas em relação à topologia de $\mathscr{J}$.

Definição: Um pré-feixe $\mathscr{F}$ (de grupos abelianos) sobre $M \in \mathrm{Top}$ consiste de:

[455]Universidade Estadual de Campinas

(1) Uma base U_α para cada $U \in \tau_M$.

(2) Um grupo abeliano $\mathscr{J}_\alpha = \mathscr{F}(U_\alpha)$ para cada $U_\alpha \in U_\alpha$.

(3) Um homomorfismo $\rho_{\alpha\beta} : \mathscr{J}_\beta \to \mathscr{J}_\alpha$ para cada inclusão $U_\alpha \subset U_\beta$ tal que $\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} = \rho_{\alpha\gamma}$ sempre que $U_\alpha \subset U_\beta \subset U_\gamma$.

Denotamos este pré-feixe como $\mathscr{F} = U_\alpha, \mathscr{J}_\alpha, \rho_{\alpha\beta}$.

Denotamos por $\mathcal{O}_X, \mathcal{M}_X$ e $\mathcal{C}_X$ aos feixes de germes de funções holomorfas, meromorfas e contínuas sobre a superfície X.

Consideremos os feixes $\mathcal{O}_X^*$ de germes de funções holomorfas que não se anulam em nenhum lugar e $\mathcal{M}_X^*$ de germes de funções meromorfas não identicamente nulas; em ambos os casos, a estrutura de grupo no feixe é multiplicativa, e $\mathcal{O}_X^* \subset \mathcal{M}_X^*$. O feixe quociente $\mathcal{O}^D = \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$ é chamado de feixe de germes de divisores na superfície de Riemann. Para uma função meromorfa $f \in \Gamma(U, \mathcal{M}_X^*)$, i.e., uma seção local de $\mathcal{M}_X^*$ em U, o divisor de f será denotado por $div(f)$; assim, $div(f) = \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(f) \cdot p$ onde a soma pode ser restrita ao subconjunto discreto de U consistindo de pontos nos quais $\mathrm{ord}_p(f) \neq 0$.

Podemos fazer construções cohomológicas sobre superfícies de Riemann. Desta forma, obtemos o primeiro grupo de cohomologia de uma superfície de Riemann X, $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$. Este grupo será chamado de grupo de fibrados lineares complexos sobre X; e uma classe de cohomologia $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ será chamada de um fibrado linear complexo sobre X.

Os elementos do feixe de germes de divisores estão em correspondência com os feixes invertíveis em uma superfície fixa de Riemann X, $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. C. Gunning (1966). *Lectures on Riemann Surfaces*, Princeton University Press.

[2] Miranda, Rick (1995). *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society.

[3] Bartolo A. E. (2020). *Superficies de Riemann*, American Universidad de Zaragoza, CIEN.

[4] R. Hartshorne (1977). *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*, Springer.

[5] Zaldívar, F (2013). *Notas de geometrıa algebraica*, Instituto de Matemáticas de la UNAM.

O soroban e sua importância no ensino de matemática

Silva Alves, Jaqueline Stefane[456] e Ferreira de Souza, Luryane[457]

Resumo: *Este trabalho apresenta o contexto histórico do ábaco, a importância do soroban, ábaco japonês, na inclusão de pessoas com deficiência visual e a sua importância no ensino de matemática. Tendo como objetivo expandir o conhecimento dessa ferramenta de cálculo e ensinar a sua utilização para jovens do ensino médio. Portanto entende-se que o soroban é uma ferramenta importante para o ensino de matemática, principalmente na inclusão de todos.*

Palavras-chave: *Soroban, instrumento, ábaco, ensino, inclusão.*

INTRODUÇÃO

No início da humanidade não haviam instrumentos que possibilitasse o cálculo de grandes quantidades, logo as pessoas utilizavam os dedos para fazer cálculos simples. Assim, com o avanço das civilizações e com a criação de comércios, houve a necessidade de se criar um instrumento para o auxílio desses cálculos, de maneira mais rápida e mais eficaz do que o método anterior.

Atualmente ainda não há um consenso em relação à origem do ábaco. Segundo Monteiro (2014, apud BUENO e SANTOS, 2022, p.4), a noção de fazer cálculos com um instrumento surgiu com os chineses, e tem registro da sua utilização em meados de 2500 a 3000 a.C. Esses instrumentos eram chamados de ábacos. A Tábua de Salamis é considerada o primeiro ábaco que se tem registro na história, encontrada em 1846 na ilha de Salamis, na Grécia.

Neste trabalho iremos priorizar o soroban, ábaco japonês, que foi criado a partir do Suanpan (ábaco chinês). O Suanpan foi levado para o Japão no início do século XVI por Kambei Moori e, até 1868, eles utilizavam o ábaco japonês e o ábaco chinês. Conforme Filho (2013, apud BUENO e SANTOS, 2022, p.10), o estilo chinês possui duas contas superiores com valor cinco e cinco contas com valor um e o estilo japonês apresenta uma conta superior de valor cinco e cinco contas inferiores de valor um. Portanto, com as mudanças que sofreu ao longo do tempo, atualmente o soroban de uso universal é com uma cota superior valendo cinco e quatro cotas inferiores valendo um.

O soroban foi trazido para o Brasil em 1908 por imigrantes japoneses. Porém o seu conceito foi difundido em 1956 por Fukutaro Kato. De acordo com Fernando Souza Filho (2013, apud BUENO e SANTOS, 2022, p.12.), ao chegar no Brasil em 1956, Fukutaro Kato já vinha com sua experiência no ensino de Shuzan (Soroban). Desse modo, ele imediatamente começou a auxiliar o estudo de soroban em cooperativas agrícolas e posteriormente inaugurou a primeira sala de aula no ensino de soroban, no bairro da liberdade em São Paulo.

[456]Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia
[457]Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias, Universidade Federal do Oeste da Bahia

Em 1949 o soroban foi incluído no ensino de matemática para deficientes visuais no Brasil devido a alterações propostas por Joaquim Lima de Moraes. Após Joaquim perceber que os materiais utilizados anteriormente apresentavam muita dificuldade de aprendizagem, ele adaptou o soroban adicionando borracha compressora no instrumento, facilitando assim o manuseio deste e assim tornando a aprendizagem de matemática para pessoas com deficiência visual mais rápida e eficiente. Conforme Ortiz (2017, apud BUENO e SANTOS, 2022, p.18), a aplicação deste elemento está sendo maravilhosa e é evidente que por meio do uso e das habilidades de manuseio, o estudante conquista autonomia para calcular e a matemática deixa de ser teórica e passa a ser mais prática.

A introdução do soroban no ensino de matemática traz para os estudantes uma autonomia e auxilia na construção do raciocínio lógico para resolução de problemas e operações matemáticas, visto que quando o estudante utiliza o instrumento ele consegue diferenciar unidade, dezena e centena. Além disso, como escreveu Silva (2014, apud MELO, 2022, p.19), "o ábaco precisa estar aliado a outras estratégias, ao planejamento e às atividades em si, e, em especial, nas ações de ensino do professor". Portanto a aprendizagem com o soroban pode tornar a matemática mais divertida e leve, porém isso depende também da abordagem utilizada pelos professores.

Este trabalho é parte da divulgação matemática do projeto Fábrica Matemática que tem em sua finalidade ensinar assuntos de matemática em escolas públicas do ensino médio na cidade de Barreiras na Bahia. O projeto Fábrica Matemática é um projeto de extensão na Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB) que por meio de oficinas apresenta a matemática para jovens estudantes, conseguindo assim explorar assuntos vistos em sala de aula de maneira mais leve e dinâmica, resultando no maior entendimento destes assuntos. Através deste projeto buscamos explorar e elucidar conceitos matemáticos de maneira acessível e lúdica

REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA NO SOROBAN

O soroban é um instrumento de cálculo feito de madeira ou plástico, composto por hastes verticais que contêm contas deslizantes e uma barra divisória horizontal. Ele contém duas partes, a parte superior está as contas que valem 5 e a parte inferior as contas que valem 1. Cada haste vertical representa uma unidade, dezena, centena e assim por diante. O soroban é lido da esquerda para a direita. Atualmente o soroban mais utilizado é composto por 21 hastes. Para representar um número no soroban primeiro é importante posicioná-lo em uma superfície plana e horizontal, por exemplo uma mesa. Após posicionar, o indivíduo pode movimentar as contas, sem que as hastes deslizem. Ao movimentar uma das contas em direção a haste principal horizontal é representado um número.

CONCLUSÕES

Desde a sua origem o ábaco vem sendo utilizado como ferramenta de cálculo. Atualmente ele é usado pelos países orientais como calculadoras. Porém vimos que além de um instrumento para auxílio de contas em comércios, ele também é utilizado para aprendizagem e inclusão. Entende-se que o ábaco tornou-se importante na disseminação do ensino de matemática em escolas e hoje em dia a sua importância está sendo bastante estudada por pesquisadores.

Entende-se que com o soroban pode-se aprender várias operações matemáticas como por exemplo a soma e a subtração, que ensinamos neste resumo. Sendo assim o soroban torna-se um importante instrumento no auxílio do ensino matemático, principalmente em turmas de anos iniciais. O objetivo deste trabalho é apresentar o soroban em escolas de ensino médio do oeste da bahia e ensinar a esses estudantes como fazer as operações de adição, subtração e multiplicação.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUENO, T. F.; DOS SANTOS, M. B.; BORGES, D. A .Do Ábaco ao Soroban adaptado: os benefícios para a pessoa com deficiência visual. **Revista Brasileira de Educação, Cultura e Linguagem**,v. 6, n. 11, p. 111–131, 2022.

[2] Da Antiga Roma ao Japão – A SAGA DO SOROBAN MODERNO. Master Soroban.Disponível em: https://mastersoroban.com.br/historia-do-soroban-da-antiga-roma-ao-japao-a-saga-do-soro ban-moderno/. Acesso em: 16. mar 2024

[3] MELO, J. R. Currículo e ensino de matemática: o ábaco como recurso didático visando uma aprendizagem significativa. **Conjecturas**. [S. l.], v. 21, n. 4, p. 480–501, 2021.

[4] SOROBAN – A calculadora das pessoas com deficiência visual. Civiam. Disponível em: https://civiam.com.br/uma-breve-historia-do-soroban/. Acesso em: 16. mar 2024.

[5] Soroban: Você sabe como funciona o ábaco japonês?. Coisas do Japão. Disponível em: https://coisasdojapao.com/2017/08/soroban-voce-sabe-como-funciona-o-abaco-japones-cd j/. Acesso em: 16 mar. 2024

Formas quadráticas, topologia e o estudo dos invariantes na teoria dos corpos

Severino, Jéssica Duarte[458]

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais da teoria algébrica de formas quadráticas e suas aplicações na teoria de corpos, servindo de base para estudos avançados de mestrado. Mais especificamente, focamos na relação entre formas quadráticas, a construção e análise dos anéis de Witt e o seu comportamento subordinado às extensões de corpos, permitindo uma abordagem dos invariantes de corpos relacionados a formas quadráticas.

Os invariantes da teoria dos corpos desempenham um papel crucial ao estabelecer conexões entre Álgebra, Geometria e Topologia. Na Geometria, fornecem medidas que capturam aspectos fundamentais da forma e da estrutura dos objetos geométricos, enquanto na Topologia, são utilizados para investigar propriedades como conectividade, compacidade e orientabilidade de determinadas estruturas (espaços topológicos, variedades diferenciáveis ou algébricas, etc).

Um exemplo típico de invariante de corpos/anéis é o que chamamos de level. Mais especificamente, dado um anel comutativo R^{R}, o level (ou nível) de R^{R} é definido como

$$s(R) = \min\{n : -1 = e_1^2 + \cdots + e_n^2 : e_i \in R\}^{s(R)=\min\{n:-1=e_1^2+\cdots+e_n^2 : e_i \in R\}}.$$

Caso -1^{-1} não seja uma soma de quadrados em R, denotamos $s(R) = \infty^{s(R)=\infty}$. Calcular o level de um anel (ou corpo) específico é um problema, em geral, difícil, e que pode envolver a interação entre várias áreas da Matemática.

Por exemplo, se considerarmos um corpo F^{F} obtemos $s(F) = 2^{ks(F)} = 2^{k}$ para algum inteiro positivo k^{k}. A situação muda drasticamente no caso dos anéis: para todo inteiro positivo n^{n}, o domínio

$$A_n := \mathbb{R}[x_1, \cdots, x_n]/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{A_n:=\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_n]/(1+x_1^2+\cdots+x_n^2)}$$

tem level n^{n}.

A prova de que $s(A_n) = n^{s(A_n)=n}$ envolve, dentre outras coisas, a aplicação do emblemático Teorema de Borsuk-Ulam, o que inclusive, permite explorar os invariantes associados a formas quadráticas sobre corpos/anéis e sua relação com as propriedades topológicas dos espaços correspondentes.

No futuro, pretende-se aprofundar a compreensão dos temas acima, explorando por exemplo, as conexões entre ordens, valorações e formas quadráticas, bem como suas aplicações em temas recentes de pesquisa (como Teorias Abstratas de Formas Quadráticas, Multi-álgebras e Lógica).

[458]Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação- ICMC/USP.

BIBLIOGRAFIA

[1] Andradas, C.; Bröcker, L.; Ruiz J. M.; **Constructible sets in real geometry.** Vol.33. Springer Science & Business Media, 1996.

[2] Roberto, K. M. A.; Ribeiro, H. R. O.; Mariano, H. L.; **Quadratic structures associated to (multi) rings.** Categories and General Algebraic Structures, 16(1):105–141, 2022.

[3] Roberto, K. M. A.; Mariano, H. L.; **K-theories and free inductive graded rings in abstract quadratic forms theories.** Categories and General Algebraic Structures, 17(1):1- 46, 2022.

[4] Roberto, K. M. A.; Mariano, H. L.; **On superrings of polynomials and algebraically closed multifields.** Journal of Pure and Applied Logic, 9(1):419–444, 2022.

[5] Ribeiro, H. R. O.; Roberto, K. M. A.; Mariano, H. L.; **Functional relationship between multirings and the various abstract theories of quadratic forms.** São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 16:5–42, 2022.

[6] Dickmann, M; Miraglia, F.;**Special groups: Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms.** Number 689 in Memoirs AMS. American Mathematical Society, 2000.

[7] Dickmann, M; Miraglia, F.;**Faithfully quadratic rings.** Number 128 in Memoirs AMS. American Mathematical Society, 2015.

[8] Dickmann, M.; Schwartz, N.; Tressl M.; **Spectral spaces.** Vol. 35 of New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2019.

[9] Efrat, I.; **Valuations, orderings, and Milnor K-theory.** Number 124. American Mathematical Soc., 2006.

[10] Elman, R. S.; Karpenko, N.; Merkurjev, A.; **The algebraic and geometric theory of quadratic forms.** Vol 56. American Mathematical Soc., 2008.

[11] Lam Tsit-Yuen; **Orderings, valuations and quadratic forms.** Vol. 52. American Mathematical Soc., 1983

[12] Lam Tsit-Yuen; **Introduction to quadratic forms over fields.** Vol. 67. American Mathematical Soc., 2005.

Equações de evolução fracionárias em escalas de interpolação e aplicações

de Andrade, Bruno[459] e Santos, Jeverson[460]

Resumo: *Este trabalho trata do estudo de equações de evolução lineares e semilineares com derivada fracionária de Caputo e parte linear governada por um operador setorial. No primeiro caso, estudamos estimativas sobre as famílias de operadores lineares associadas ao problema em escalas abstratas de interpolação e condições suficientes para boa-colocação global e regularidade espacial de soluções brandas. Na caso semilinear, estudamos a existência e unicidade de soluções brandas locais para o problema e sua possível continuação para um intervalo máximo de existência. Também estudamos o problema de regularidade espacial e dependência contínua em relação aos dados iniciais. Por fim, estudamos aplicações dos resultados abstratos em alguns modelos importantes, a saber, as equações de difusão-onda fracionárias e equações de placas fracionárias.*

Palavras-chave: *Equações de evolução fracionárias; Boa colocação e regularidade de soluções; Equação de difusão-onda; Equação da placa fracionária.*

INTRODUÇÃO

Este trabalho é dedicada ao estudo de boa colocação e regularidade espacial para equações de evolução semilineares da forma

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \ t > 0, \\ u(0) = u_0, u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{100}$$

onde D_t^α é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (1,2)$, $A : D(A) \subset X_0 \to X_0$ é um operador linear tal que $-A$ é setorial no espaço de Banach X_0, f é uma função não linear satisfazendo certas condições e $u_0, u_1 \in X_1 := D(A)$. Os principais resultados aqui apresentados estão contidos nas referências [2].

Um exemplo importante onde essas equações aparecem naturalmente é a teoria da viscoelasticidade linear unidimensional. As equações básicas desta teoria são dadas por

$$\sigma_x(x,t) = \rho u_{tt}(x,t), \qquad \epsilon(x,t) = u_x(x,t), \ \epsilon(x,t) = J_0\sigma(x,t) + \dot{J} * \sigma(x,t), \tag{101}$$

onde ρ é a densidade, u é o deslocamento, σ é a tensão e ϵ é a deformação. A função material J, que representa a característica do material onde ocorre o fenômeno, é não negativa e não decrescente. Seu valor

[459] Afiliação. Este autor foi parcialmente apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (CNPq) sob a Bolsa 310384/2022-2.

[460] Afiliação. Este autor foi apoiado parcialmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES).

inicial $J_0 = \lim_{t\to 0^+} J(t) = J(0^+) \geq 0$ é chamado de característica instantânea. A equação de evolução para o deslocamento $u(x,t)$ pode ser derivada das equações acima de tal forma a obter

$$u_{xx} = \epsilon_x(x,t) = (J_0 + \dot{J}*)\sigma_x = (J_0 + \dot{J}*)\rho u_{tt}. \tag{102}$$

Se considerarmos os chamados materiais do tipo potência, cuja função material é dada por

$$J(t) = \frac{1}{\rho a}\frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}, \quad 0 < \gamma \leq 1, \ t > 0,$$

onde a é uma constante positiva e Γ é a função Gama de Euler, a equação (102) ganha a forma

$$\partial_t^\alpha u = a u_{xx}, \tag{103}$$

com $1 \leq \alpha = 2 - \gamma \leq 2$ e ∂_t^α é a derivada fracionária de Caputo em relação ao tempo. Seguindo as referências [1] e [3], a lei da fluência anterior é fornecida por modelos viscoelásticos cujo a relação tensão-deformação verifica

$$\sigma = \rho a \partial_t^\alpha \epsilon, \ 0 < \gamma \leq 1.$$

Para $\gamma = 1$ temos a situação do fluido Newtoniano, onde a representa a viscosidade cinemática. Neste caso, a equação (103) é a equação de difusão. Quando $\gamma = 0$, segue que (103) torna-se a equação da onda de D'Alembert com velocidade de onda $c = \sqrt{a}$. Na situação intermediária $0 < \gamma < 1$, a equação de evolução (103) é chamada de equação de difusão-onda fracionária.

No Capítulo 1 deste trabalho relembramos alguns conceitos e fatos gerais que serão úteis no estudo das equações de evolução fracionárias. No Capítulo 2 começamos estudando os métodos de interpolação real. Apresentamos as principais propriedade do J-método e do K-método, além de comprovar sua equivalência. Estudamos também as escalas de interpolação-extrapolação abstratas e apresentamos as escalas de potência fracionárias associadas a operadores setoriais como um exemplo. O Capítulo 3 contem os enunciados e demonstrações dos principais resultados a cerca do estudo da equação (100). Primeiramente, assumindo que A é um operador setorial compatível com a ordem de derivação $\alpha \in (1,2)$, provamos que as famílias de Mittag-Leffler $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ são fortemente contínuas e admitem extensões analíticas para setores adequados do plano complexo. Adicionalmente, estudamos condições suficientes para a boa colocação global da versão linear de (100). Como aplicação deste último resultado, estudamos a equação linear de difusão-onda não homogênea

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \Delta u + f, \ \text{em } [0,\infty) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases}$$

onde $u_0, u_1 \in L^q(\mathbb{R}^N)$, $1 < q < \infty$, $N \geq 1$, e $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada. De fato, para uma constante adequada $\tilde{\eta}_q \in (1,2)$ e todo $\alpha \in (1, \tilde{\eta}_q)$, a equação linear de difusão-onda tem uma solução branda dada por

$$u(t,x) = E_\alpha(tA_q)u_0(x) + S_\alpha(tA_q)u_1(x) + \int_0^t R_\alpha((t-s)A_q)f(s,x)ds, t \in [0,\infty) \text{ e } x \in \mathbb{R}^N$$

Ainda no Capítulo 3 estudamos o problema semilinear (100) na situação onde o termo não linear é uma função que satisfaz uma condição do tipo localmente Lipschitz. Esse tipo de suposição é bastante geral e permite tratar, por exemplo, equações com não linearidades do tipo gradiente. No centro de nosso estudo deste problema está o efeito suavizante de $\{E_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$, $\{S_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$ e $\{R_\alpha(tA)\}_{t\geq 0}$. De fato, com este resultado fornecemos condições suficientes para a existência de uma única solução branda $u \in C([0,\tau], X_1)$ dada por

$$u(t) = E_\alpha(tA)u_0 + S_\alpha(tA)u_1 + \int_0^t R_\alpha((t-s)A)f(s,u(s))ds, \quad t \in [0,\tau].$$

Além disso, a solução depende continuamente dos dados iniciais e obtém um efeito de regularização imediato. Como aplicação, consideramos a equação de difusão-onda não linear

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \Delta u + |u|^{\rho-1}u, \ \text{em } (0,\infty) \times \Omega, \\ u = 0, \ \text{em } [0,\infty) \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), \ \text{em } \ \Omega, \end{cases}$$

onde $\rho > 1$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira suficientemente regular $\partial\Omega$, $\alpha \in (1,2)$ e ∂_t^α é a derivada fracionária de Caputo. Sob condições adequadas, garantimos a existência de uma única solução branda $u \in C([0,\tau], L^q(\Omega))$ para o problema acima, que pode ser continuada até um tempo máximo de existência $t_{max} > 0$ tal que $t_{max} = \infty$ ou $\limsup_{t\to t_{max}^-} \|u(t)\|_{L^q(\Omega)} = \infty$.
Além disso, esta solução obtém uma regularização imediata e depende continuamente dos dados iniciais. As aplicações supramencionadas estão contidas no Capítulo 4, o qual contém também um estudo sobre a equação da placa fracionária com não-linearidades do tipo gradiente no contexto de dados iniciais em H_0^1.

BIBLIOGRAFIA

[1] Caputo, M. and Mainardi, F., Linear models of dissipation in anelastic solids, *Riv. Nuovo Cimento*, Series II, 1, (1971) 161.

[2] de Andrade, B. and Santos, N., Fractional evolution equations in abstract interpolation-extrapolation scales and applications. Artigo submetido, 2023.

[3] Mainardi, F. and Tomirotti, M., Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions, *Annali di Geofisica* 40, (1997) 1311.

Ponto fixo de Banach e aplicações

Fernandes, João Gabriel[461] e Rampazo, Patrícia

Resumo: *O Teorema do Ponto Fixo de Banach tem importância em diversas áreas da matemática, em especial, Cálculo e Álgebra Linear numéricos e Equações Diferencias Ordinárias. Alguns exemplos que decorrem desse resultado garantem, sob certas condições, a existência de um único ponto fixo em uma aplicação. A partir disso, aplicam-se métodos iterativos para encontrar de raízes de funções e soluções de sistemas lineares. Da mesma forma, utiliza-se esse Teorema para demonstrar o Teorema de Picard que assegura solução única para Problemas de Cauchy.*

Palavras-chave: *Método de Newton, método de Gauss, teorema de Picard.*

INTRODUÇÃO

Um ponto de uma aplicação é dito ponto fixo quando, num mesmo conjunto, é levado em si mesmo pela aplicação. Apesar da definição simples, na matemática diversos problemas consistem em determinar se uma aplicação possui um ponto fixo. Neste aspecto, a partir do Teorema do ponto fixo de Banach pode-se garantir existência e unicidade de diversos tipos de equações: equações de uma variável real, equações integrais lineares e não lineares de Fredholm e equações diferenciáveis ordinárias.

Além de garantir unicidade e existência de uma equação, o teorema mostra o processo iterativo para obtenção da solução, sendo possível também estimar o erro no n-ésimo iterado. Estes fatores são o que torna o tema relevante. O presente trabalho tem como objetivo fornecer um panorama geral acerca dos conceitos envolvidos na formulação do Teorema do Ponto Fixo de Banach assim como de algumas de suas aplicações.

Títulos e Subtítulos das Seções

O poster contém 3 seções com os seguintes títulos e subtítulos:

- Definições básicas;
- Teorema do Ponto Fixo;
- Aplicações:
  - Método de Newton;
  - Método de Gauss-Jacobi;
  - Teorema de Picard.

[461] INFES-UFF

CONCLUSÕES

Após explorar as ideias que envolvem o Teorema do Ponto do Fixo de Banach e suas aplicações pode-se identificar que os critérios de convergência do método de Newton e Gauss-Jacobi estabelecem as condições em cada espaço para garantir que a aplicação utilizada para obtenção da solução é uma contração e, por consequência, satisfaz a hipótese do teorema.

Analogamente, a demonstração do teorema que garante solução única para EDO's consiste em mostrar que um operador no espaço de funções é uma contração, determinando assim que ele possui um único ponto fixo, sendo este ”ponto” a função que soluciona a EDO. Em síntese, é possível verificar alguns dos diversos espaços métricos onde o Teorema do ponto de Banach tem significativa utilidade.

BIBLIOGRAFIA

[1] [LIMA, E. L.] "Análise no espaço $\mathbb{R}^n$". - *Brasília, Ed Universidade de Brasília; São Paulo, Ed. Blucher Ltd 1970.*

[2] [KREYSZIG, E.] Introductory Functional Analysis with Applications. - *New York:Wiley, 1989.*

[3] [OLIVEIRA, C. R.] Introdução à Análise Funcional. - *2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.*

Os teoremas de Pappus e Desargues

Pillar, João Pedro Galdino[462]

Resumo: *No presente trabalho serão apresentados o Teorema de Pappus e o Teorema de Desargues, sendo estes teoremas da Geometria Euclidiana, que sob as hipóteses garantem a colinearidade de três pontos. O objetivo será realizar a demonstração destes teoremas utilizando a Geometria Projetiva, e citar aplicações de ambos.*

Palavras-chave: *Geometria projetiva, teorema de Pappus, teorema de Desargues.*

INTRODUÇÃO

Os Teoremas de Pappus e Desargues, são resultados que podem ser demonstrados apenas com resultados da Geometria Euclidiana, porém pode-se realizar as demonstrações de uma forma elegante utilizando a Geometria Projetiva, sendo este o objetivo, serão abordados os conceitos básicos e alguns resultados desta geometria, com ideia de projetivizar os Teoremas para realizar a demonstração e ao chegar na tese, voltar para a sua forma euclidiana. Por fim, serão vistas duas aplicações dos teoremas mencionados anteriormente. Neste resumo, serão omitidas as demonstrações dos resultados prévios aos Teoremas, devido á concisão do texto, estas encontram-se nas referências, bem como as demonstrações feitas estão resumidas pelo mesmo motivo.

TEOREMAS DE PAPPUS E DESARGUES

Tanto o Teorema de Pappus quanto o de Desargues tem a versão projetiva análoga à versão euclidiana, trocando assim pontos e retas por pontos projetivos e retas projetivas. Nesse contexto, ilustraremos os dois teoremas em sua versão euclidiana já que não se pode fazer a visualização destes no plano projetivo $\mathbb{RP}^2$. E a seguir enunciaremos o Teorema de Pappus em sua versão euclidiana, e posteriormente, após fazer uma contextualização sobre a Geometria Projetiva, enunciaremos o Teorema de Desargues em sua forma projetiva. Abaixo seguem as ilustrações, à esquerda o Teorema de Pappus e à direta o Teorema de Desargues.

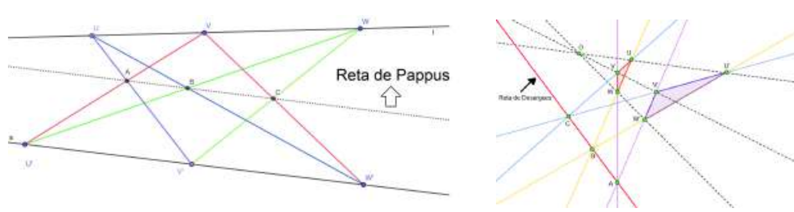


Fig. 139: Autoria própria

[462]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Teorema 9.28 (Teorema de Pappus) *Sejam quaisquer duas retas distintas l e s no Plano Euclidiano, tomando os pontos U, V e W pertencentes a l e U', V' e W' pertencentes a s, com todos os pontos distintos, traçemos os segmentos:* $\overline{UV'}$,$\overline{UW'}$,$\overline{VU'}$,$\overline{VW'}$,$\overline{WU'}$ e $\overline{WV'}$. *Considere os pontos A = VW' ∩ V'W, B = UW' ∩ U'W e C = UV' ∩ U'V . O Teorema de Papus afirma que assim os ditos pontos A, B e C são colineares.*

Como comentado previamente, faremos agora uma breve introdução à alguns conceitos e resultados da Geometria Projetiva, que serão utilizados para a demonstração dos teoremas.

Definição 9.28 *O Plano Projetivo* $\mathbb{RP}^2$*, será o conjunto quociente obtido de* $\mathbb{R}^3$*-* $\{0\}$*, com a relação de equivalência* $v \sim w \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R}; v = \lambda w$*. Iremos chamar então* $\mathbb{RP}^2$ *de* ***Plano Projetivo*** *e seus elementos de* ***pontos projetivos****.*
Notação: *Denotamos um ponto projetivo (a classe de equivalência) por* $\overline{v}$ *onde* $\overline{v} = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$*.*

Definição 9.29 *Um subconjunto* $r \subset \mathbb{RP}^2$ *é uma* ***reta projetiva*** *se r for a imagem de um plano* Γ *pela projeção* $\Psi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^2$*.*
Notação: *Denotamos uma reta projetiva por* $r_{\bar{\eta}}$ *onde* η *é um vetor normal ao plano* Γ*. Além disso, diremos que três pontos projetivos são* ***colineares*** *se existe uma reta projetiva que os contém.*

Visto que agora estamos trabalhando com uma Geometria não Euclidiana, temos algumas diferenças do que estamos habituados, um dos principais resultados que chamam atenção é, que nesta, quaisquer retas projetivas tem interseção, isto é, não existem retas paralelas, e ainda, dadas duas retas projetivas, conseguimos descobrir qual é a interseção, segue abaixo tal resultado.

Proposição 9.9 *Duas retas projetivas distintas,* $r_{\bar{\eta}}$ *e* $r_{\bar{\upsilon}}$ *concorrem em um único ponto* $\bar{v}$*, tal que* $\bar{v} = \overline{\eta \times \upsilon} \in \mathbb{RP}^2$*.*

Proposição 9.10 *Três pontos* $\bar{u}$*,* $\bar{v}$ *e* $\bar{w}$ *são colineares se, e somente se,* $\det[u, v, w] = 0$*.*

Proposição 9.11 *Por dois pontos projetivos* $\bar{v}$ *e* $\bar{u}$ *incide uma reta projetiva* $r_{\bar{\eta}}$*, onde* $\bar{\eta} = \overline{v \times u} \in \mathbb{RP}^{2*}$*.*

Agora que conhecemos alguns entes desta Geometria, principalmente se tratando de colinearidade, será introduzida a noção de colineação em $\mathbb{RP}^2$, e alguns outros resultados relacionados a tal.

Definição 9.30 *Uma* ***colineação*** *é uma aplicação biunívoca* $\psi : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ *que preserva a colinearidade, isto é, se* $\overline{u}, \overline{v}$ *e* $\overline{w}$ *são pontos projetivos colineares, então as imagens* $\psi(\overline{u}), \psi(\overline{v})$ *e* $\psi(\overline{w})$ *são pontos projetivos colineares.*

Proposição 9.12 *Se* $\overline{u}$*,* $\overline{v}$*,* $\overline{w}$ *e* $\overline{t}$ *são pontos de* $\mathbb{RP}^2$ *não colineares três a três, então existe uma colineação A:* $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ *induzida por um operador linear invertível A:* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, tal que:* $\overline{A}(\overline{e}_1) = \overline{u}, (\overline{e}_2) = \overline{v}, \overline{A}(\overline{e}_3) = \overline{w}$ *e* $\overline{A}(1 : 1 : 1) = \overline{t}$*.*

Teorema 9.29 (Teorema de Desargues Versão Projetiva) *Se* $\Delta = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ *é um conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares,* $\Delta' = \{\overline{u'}, \overline{v'}, \overline{w'}\}$ *outro conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares tais que a interseção* $\Delta \cap \Delta' = \varnothing$ *e além disso,* $\{\overline{p}\} = r_{\overline{\eta}_{uu'}} \cap r_{\overline{\eta}_{vv'}} \cap r_{\overline{\eta}_{ww'}}$*. Então, os pontos projetivos* $\overline{a}, \overline{b}$ *e* $\overline{c}$ *são colineares, em que:* $\overline{a} = r_{\overline{\eta}_{vw}} \cap r_{\overline{\eta}_{v'w'}}$*,* $\overline{b} = r_{\overline{\eta}_{uw}} \cap r_{\overline{\eta}_{u'w'}}$*,* $\overline{c} = r_{\overline{\eta}_{uv}} \cap r_{\overline{\eta}_{uv'}}$*.*

Daremos a ideia principal de como realizar as demonstrações de ambos os teoremas. Iniciamos tomando 4 pontos projetivos (do enunciado) não colineares 3 à 3, e assim utilizamos a Prop. 9.12, para que a menos de uma colineação, tais pontos são da forma $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$ e $(1 : 1 : 1)$, adiante, toma-se outro ponto do enunciado sendo este colinear à dois dos citados acima, e assim usamos a Prop. 9.10, para ver a forma dos outros pontos. Seguimos fazendo isso e usando conveninentemente as Proposições 9.9, 9.10 e 9.11 encontra-se a representação dos pontos que queremos mostrar serem colineares. Tendo estes, finalizamos as demonstrações verificando que o determinante da matriz as quais as colunas são os representantes destes pontos é 0, logo 9.10 garante a colinearidade que queríamos mostrar. Por fim, algumas aplicações de ambos os teoremas:

Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores? Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores cada uma de modo que cada árvore está em exatamente três filas? E, por fim, como podemos plantas 9 árvores em dez filas de três árvores?

O Teorema de Desargues responde a primeira e segunda pergunta, já o Teorema de Pappus responde à terceira, à observar em Figura 139, temos exatamente o que se pede nos problemas das árvores, sendo cada árvore um ponto.

CONCLUSÕES

Em virtude do que foi mencionado, podemos observar que apesar de os teoremas focados no trabalho serem da Geometria Euclidiana, podemos demonstrá-los de uma forma mais simples, utilizando a Geometria Projetiva, assim, fazendo com que a prova se resuma a calcular determinantes de matrizes 3×3, que por sua ver é mais vantajoso do que a utilização de resultados mais pesados, os quais usam-se para a demonstração da GE. Ademais, nota-se que além da beleza dos teoremas, estes tem aplicação nos problemas das árvores, que consiste em plantar árvores enfileiradas sob certas condições.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARROS, Abdênago; ANDRADE, Plácido. **Introdução a geometria projetiva**. SBM, 2010.

Códigos corretores de erros

Algumas aplicações

Balan, João Victor[463] e Peixoto, Rafael[464]

Resumo: *Os códigos corretores de erros têm sido uma área de estudo muito ativa nos últimos anos, tendo sua utilidade em diversos campos como computação, matemática e também na engenharia aeroespacial. Nesse texto iremos dar ênfase a algumas aplicações dos códigos.*

Palavras-chave: *Códigos, corretores, erro, detectores, Mariner.*

INTRODUÇÃO

Os códigos corretores de erros são uma ferramenta presente na vida de inúmeras pessoas, seja do mais simples como fazer compras no mercado ou até mesmo receber imagens de um planeta mandado por uma sonda a milhões de quilômetros de distância. Eles têm, por essência, a função de mandar informações codificadas e, através de redundâncias inseridas neste código, eles são capazes de detectar e corrigir eventuais erros causados.

O processo de enviar uma informação usando os códigos consiste em uma fonte emitindo a informação, que passa por um codificador de fonte que transforma os dados em um código, depois este passa por um codificador de canal responsável por adicionar redundância a esse código, e então ele é enviado via um canal (ondas de rádio, linha de telefone, fibra ótica, etc), onde pode sofrer alguma interferência que prejudica o código. Um decodificador de canal recebe esse código danificado, encontra o erro e o corrige mandando para o decodificador da fonte, que converte o código para informação novamente.

O processo acima descrito pode ser esquematizado como mostra a figura 140.

Esquema de envio de um código

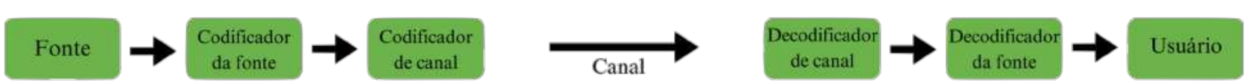


Fig. 140: Autoria própria

A seguir mostraremos alguns exemplos de códigos.

[463] Universidade Federal do Triângulo Mineiro.
[464] Universidade Federal do Triângulo Mineiro.

Códigos Detectores de Erros

Os códigos detectores são ferramentas que, por meio de redundâncias presentes no código, conseguem encontrar erros causados por ruídos ao passar pelo canal transmissor. Entre eles está o código de barras (EAN-13), atualmente utilizado no Brasil para identificação de produtos à venda, que será enfatizado neste texto.

Exemplo de código EAN-13

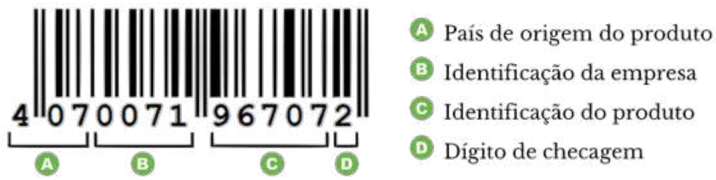


Fig. 141: Autoria própria

EAN-13

O código EAN-13 consiste de 13 dígitos, onde os doze primeiros, $(v_1, v_2, ..., v_{12})$ indicam o país de origem, o fabricante e o produto em si , enquanto o ultimo (d) é o digito de checagem. O código em si é um vetor (v) 10-ário com comprimento 13 da seguinte forma: $v = (v_1, v_2, ..., v_{12}, d) \in \mathbb{Z}_{10}^{13}$.

A componente d é determinada de maneira que $c \cdot v = 0$, onde c é o vetor de checagem dado como: $c = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$.

Verificaremos agora o dígito de checagem no código $v = (4, 0, 7, 0, 0, 7, 1, 9, 6, 7, 0, 7, d)$, visto na figura 141:

$c \cdot v = 0$

$\rightarrow (4, 0, 7, 0, 0, 7, 1, 9, 6, 7, 0, 7, d) \cdot (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) = 0$

$\rightarrow (4) + (0) + (7) + (0) + (0) + (7.3) + (1) + (9.3) + (6) + (7.3) + (0) + (7.3) + (d) = 0$

$\rightarrow 108 + d = 0$

Como estamos em $\mathbb{Z}_{10}$, $d = 2$, portanto o dígito de verificação esta correto. Caso houvesse algum erro de leitura, este último dígito não estaria compatível indicando a existência de um erro.

Códigos no Contexto Espacial

Dentro do contexto espacial, existem diversas aplicações dos códigos corretores de erros. Uma delas é a comunicação entre sondas e a base de comando na Terra, onde esta comunicação muitas vezes sofre de interferência por radiação solar, assim causando erros ao código. O programa Mariner se destacou no avanço da teoria de códigos.

Mariner 4

No ano de 1964 a sonda Mariner 4 foi enviada a marte, mas só em 1965 que a sonda mandou as primeiras fotos da superfície marciana. Ela transmitiu 22 fotos em preto e branco tendo cada uma 200×200 pixels. A cada um desse pixels foi atribuído um dos 64 tons de cinza pré-programados e então um codificador de fonte transforma esta informação em um elemento de $\mathbb{Z}_2^6$. Na época o transmissor era tão lento que estes vetores eram enviados sem uma codificação de canal.

Mariner 9

Comparando com os sondas anteriores, a Mariner 9 em 1971 teve um avanço muito grande na teoria de códigos, além de um grande aumento na capacidade do transmissor. As imagens agora foram divididas em 700×832 pixels, o que melhorou muito a resolução. O código da fonte foi mantido ainda com as 64 palavras que são os tons de cinza dos pixels, onde o vetor (0,0,0,0,0,0) representa a cor branca e o (1,1,1,1,1,1) representa o preto, porém agora com a implementação do código de canal.

O código usado no canal é chamado de Código de Reed-Muller de Primeira Ordem R(1.m), onde no caso da sonda $m = 5$. A codificação feita leva cada vetor de 6 dígitos a um novo vetor agora com 32 dígitos através da multiplicação do código da fonte pela matriz geradora de R(1.5). Este código é capaz de detectar até 15 erros e corrigir até 7 erros.

Codificaremos agora o vetor $b = (0,0,0,0,1,1)$ que representa um dos tons de cinza. Multiplicando o vetor pela matriz que gera o código,

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

obtemos o vetor c = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0) que representa a mesma tonalidade de cinza, porem com 32 dígitos, possibilitando a detecção e correção dos erros.

BIBLIOGRAFIA

[1] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. Códigos Corretores de Erros. Segunda edição **Rio de Janeiro**, IMPA, 2017.

[2] MENEGHESSO, Carla. Códigos Corretores de Erros, Monografia, UFSCAR, **São Carlos**, p.61, 2012.Dez, 2017.

[3] DIAS, J. S.; CORNELISSEN, M. G. O Código da Nave Espacial Mariner 9 . Revista Ciências Exatas e Naturais, **São João Evangelista, MG**, Vol 19, 2, Jul/Dez, 2017.

Introdução à teoria dos matroides

João Vitor Apolinário Araújo Godinho[465] e Allan de Oliveira Moura[466]

Resumo: *O intuito deste pôster é apresentar uma iniciação à teoria dos matroides, abordando os principais criptomorfismos, e a equivalência dentre eles, além de algumas classes de matroides, explorando, principalmente, a relação dos matroides com a álgebra linear, teoria dos grafos e geometria projetiva. Além disso, tratamos da representação geométrica de matroides com posto (dimensão) até 4.*

Palavras-chave: *Matroides, grafos, combinatória, matemática discreta.*

Introdução

Um matroide é uma estrutura matemática que abstrai a noção de independência (e, complementarmente, de dependência). O matemático estadunidense Hassler Whitney foi o principal pioneiro da teoria, introduzindo os matroides em um artigo de 1935. Desde então, o estudo dos matroides foi desenvolvido o suficiente para que esteja relacionado, amplamente, com outras áreas da matemática, além de constituir, por si próprio, uma atual área de pesquisa.

Matroides podem ser abordados por variados métodos axiomáticos, que são equivalentes, ainda que nem sempre a equivalência seja óbvia ou intuitiva, os chamamos de *criptomorfismos*. Estudamos como definir os matroides através de conjuntos independentes, circuitos, bases, a função posto e pelo operador de fecho.

A álgebra linear e a teoria dos grafos são como progenitores da teoria dos matroides e muita da terminologia usada com os matroides é herdada dessas duas áreas. Além disso, alguns matroides surgem diretamente do estudo de espaços vetoriais e são, naturalmente, ditos *vetoriais*, enquanto que outros são obtidos de grafos e são ditos *cíclicos*. Existem outros tipos de matroides, como os *uniformes*, os matroides *de partição* e os matroides *transversais*.

Matroides

Nessa seção, mostramos alguns modos de definir matroides. Além dessas, existem muitas outras maneiras de defini-los.

Conjuntos Independentes

Definição. Um *matroide* M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, em que E é um conjunto e $\mathcal{I}$ uma coleção de subconjuntos de E, que satisfaz as seguintes propriedades:

(I.1) $\varnothing \in \mathcal{I}$, (Não-Trivialidade)

(I.2) Se $I_2 \in \mathcal{I}$ e $I_1 \subseteq I_2$, então $I_1 \in \mathcal{I}$, (Hereditariedade)

[465]Universidade Federal de Viçosa. Bolsista do PICME.
[466]Universidade Federal de Viçosa. Orientador.

(I.3) Se I_1 e I_2 pertencem a $\mathcal{I}$ e $|I_1| < |I_2|$, então existe um elemento x pertencente a $I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$. (Aglutinação)

Chamamos E de *conjunto-base* do matroide M e dizemos que M é um matroide sob E, escrevemos $E(M)$. Os elementos de $\mathcal{I}$ são chamados de conjuntos *independentes* de M. Quando é necessário, denotamos $\mathcal{I}$ por $\mathcal{I}(M)$. Um subconjunto de E, que não pertence a $\mathcal{I}$, é chamado de *dependente*.

Circuitos

Em uma coleção de conjuntos A, os elementos ditos *minimais* são tais que não contém nenhum outro elemento de A.

Definição. Um conjunto dependente minimal em um matroide arbitrário M é chamado de *circuito* de M. Denotamos por $\mathcal{C}(M)$ a coleção de circuitos de M.

As seguintes propriedades caracterizam os elementos de $\mathcal{C}$:

(C.1) $\varnothing \notin \mathcal{C}$, (Não-Trivialidade)

(C.2) Se C_1 e C_2 são elementos de $\mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$, (Empilhamento)

(C.3) Se C_1 e C_2 são elementos distintos de $\mathcal{C}$ e $x \in C_1 \cap C_2$, então existe um elemento C_3 pertencente a $\mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$. (Eliminação)

Um matroide M pode ser definido pela coleção $\mathcal{C}(M)$, conforme o teorema abaixo.

Teorema. Seja E um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as propriedades **C.1**, **C.2** e **C.3**. Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de E que não contém elementos de $\mathcal{C}$. Então, $(E, \mathcal{I})$ é um matroide tal que $\mathcal{C}$ é a sua coleção de circuitos.

EXEMPLOS

Matroides Vetoriais

Teorema. Seja E o conjunto dos rótulos das colunas de uma matriz $A_{m,n}$ sob um corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos X de E tais que o multiconjunto de colunas rotuladas por X é um conjunto linearmente independente no espaço vetorial $V(m, \mathbb{F})$, de dimensão m sob um corpo $\mathbb{F}$. Então, $(E, \mathcal{I})$ é um matroide.

Exemplo. Seja A a seguinte matriz, em que cada coluna é rotulada pela letra abaixo:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} a & \; b & \; c & \; d & \; e \end{matrix} \end{array}$$

Tem-se que $E = \{a, b, c, d, e\}$ é o conjunto dos rótulos das colunas da matriz e $\mathcal{I} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{d, e\}\}$ é a coleção de subconjuntos de E tais que as colunas rotuladas pelos elementos dos subconjuntos são linearmente independentes. Qualquer subconjunto de E que não pertença à $\mathcal{I}$ é dependente.

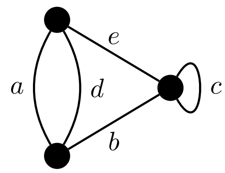
Um matroide obtido de uma matriz é chamado *vetorial*. Qualquer matroide isomorfo a algum matroide obtido de uma matriz é dito *representável*.

Matroides Cíclicos

Teorema. Seja E o conjunto de arestas de um grafo G e $\mathcal{C}$ a coleção de conjuntos de arestas dos ciclos de G. Então, $\mathcal{C}$ é a coleção de circuitos de um matroide sob E.

Qualquer matroide isomorfo ao matroide obtido de um grafo é dito *gráfico*.

Exemplo. Considere o grafo G abaixo:



Note que $E = \{a, b, c, d, e\}$ e que $\mathcal{C} = \{\{c\}, \{a, d\}, \{a, b, e\}, \{b, d, e\}\}$. Observamos que o matroide obtido de G é isomorfo ao matroide obtido da matriz A, visto no exemplo anterior. Os conjuntos independentes são os subconjuntos próprios dos elementos de $\mathcal{C}$. Esse matroide é, então, gráfico e representável. Existem matroides que não são gráficos e nem representáveis.

BIBLIOGRAFIA

[1] OXLEY, J. **Matroid Theory**. 2th ed. New York: Oxford University Press Inc., 2011.

[2] GORDON, G.; MCNULTY, J. **Matroids: A Geometric Introduction**. New York: Cambridge University Press, 2012.

Tour geométrico com MathCityMap

Explorando desenho em perspectiva na Geometria Espacial

Cardoso, João Ygor Dias[467] e Mathias, Carmen Vieira[468]

Resumo: *Diante algumas lacunas verificadas ao ensinar conteúdo de Geometria Espacial tento na educação básica, quanto no ensino superior especialmente no que diz respeito ao desenvolvimento das habilidades espaciais, habilidades matemáticas e o domínio do desenho geométrico para expressar informações espaciais no plano. Observa-se que, em alguns cursos de Matemática, faltam disciplinas específicas voltadas para o ensino de técnicas de desenho geométrico. Diante dessa lacuna, propõe-se neste trabalho a elaboração de um roteiro, utilizando o sistema MathCityMap, a fim de explorar construções e aplicar atividades que possam desenvolver a habilidade espacial em alunos de um curso de Matemática Licenciatura. Pretende-se com tal proposta, evidenciar a relevância do desenho geométrico na formação inicial de professores de Matemática e estimular sua reflexão sobre a ausência de disciplinas voltadas para esse conteúdo no currículo acadêmico.*

Palavras-chave: *Geometria, desenho geométrico, habilidades, tecnologias.*

INTRODUÇÃO

Com respeito ao ensino e aprendizagem na área de Geometria Espacial tanto no ensino básico quanto no ensino superior, muitos são os desafios encontrados. Em particular, quando abordamos construções geométricas e a prática que leva a construir sólidos geométricos, observamos, em algumas vezes empecilhos para o professor no momento de expressar a representação de um sólido. Também notamos dificuldades de alguns alunos em relação às habilidades espaciais por ele adquiridas, no momento de compreender o que o professor quer transmitir em um construção geométrica. O presente trabalho trata de um projeto de conclusão de curso em desenvolvimento, de um estudante de um curso de Matemática - Licenciatura, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). As justificativas que permeiam e motivam o projeto de conclusão de curso, são provocar o pensamento crítico sobre importância do desenho geométrico na formação inicial de professores de Matemática, uma vez que não há mais a presença de uma disciplina específica de Desenho Geométrico ou Desenho Técnico no atual currículo do curso da UFSM. A ausência de uma disciplina de desenho, leva a pensar em como os estudantes do curso de Matemática têm suas respectivas habilidades desenvolvidas em relação ao desenho, seja a mão livre ou com instrumento, no papel, e principalmente do quadro. Assim, o objetivo desse trabalho é relatar a elaboração de um roteiro, utilizando o sistema MathCityMap, a fim de explorar construções e aplicar atividades que possam desenvolver habilidades espaciais nos alunos do referido um curso.

[467]UFSM. Este autor foi apoiado pelo projeto FIPE/UFSM

[468]UFSM

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para que possamos compreender brevemente os conceitos que são abordados durante o trabalho, necessitamos de um aporte teórico que fundamente nossos estudos.

As habilidades Espaciais e Matemáticas

A literatura é desprovida de pesquisas que analisam como o próprio ato de desenhar poderia melhorar o desempenho de uma pessoa, tanto no desenho quanto no raciocínio espacial [4]. O racícionio espacial, também referido por habilidade espacial precisa ser desenvolvida pelo indivíduo ainda quando criança, mesmo sem ter desenvolvido habilidades matemáticas, levando em consideração que o conhecimento e abstrações ocorrem pela ludicidade [1]. Porém, o processo de visualização "é um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico" [3], que integra quatro elementos: imagens mentais; as representações externas; as ações de interpretação de informações para geração de imagens e também a "leitura" de imagens para obtenção de informações a partir dela; e as habilidades para a visualização. As habilidades de visualização, em Matemática, são habilidades que "um sujeito deve adquirir e desenvolver para realizar os processos necessários, com as imagens mentais específicas de um dado problema" ([3]).

Sobre o Desenho Geométrico

Oficialmente, o ensino do Desenho Geométrico permaneceu nos currículos escolares, de 1931 a 1971. No Brasil, na reforma de 1961 e com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional no 5692/71 a disciplina o Desenho Geométrico passou a não ser obrigatória. Ainda, havia um núcleo de disciplinas obrigatórias e outros núcleos de disciplinas optativas, às quais poderiam integrar a parte diversificada do currículo. As escolas tinham a liberdade de construir a sua matriz curricular apenas dentro da parte diversificada. Deste modo, após a promulgação da referida lei, muitas escolas aboliram o ensino das construções geométricas, ensinadas na disciplina Desenho Geométrico.

Base Nacional Comum Curricular

Visto a formação do professor de matemática, cabe uma breve revisão da Base Nacional Comum Curricular - BNCC [2] que menciona sobre os objetos de conhecimentos e habilidades na etapa do ensino fundamental: anos finais e ensino médio, que são os campos de atuação que os licenciados são habilitados. Cabe aqui a ressalva que no ensino fundamental: anos iniciais, a BNCC apresenta a Geometria Espacial com componente, trabalhando o reconhecimento de figuras geométricas espaciais, relações com objetos do mundo físico, localização de objetos e entre outros. Isso mostra que ainda nos primeiros passos da vida escolar o aluno tem a possibilidades de desenvolver aspectos geométricos, como a visualização e a representação geométrica.

Olhando para a etapa do ensino fundamental: anos finais, identificamos competência específicas e habilidades que contemplam os aspectos geométricos que estamos abordando neste projeto.

SOBRE A ATIVIDADE A SER DESENVOLVIDA

A ideia do projeto é realizar um tour com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática pelo campus da UFSM para que possam explorar as construções e aplicar as atividades elaboradas e que estarão disponíveis no app MathCityMap. A figura abaixo apresenta a tela inicial da plataforma.

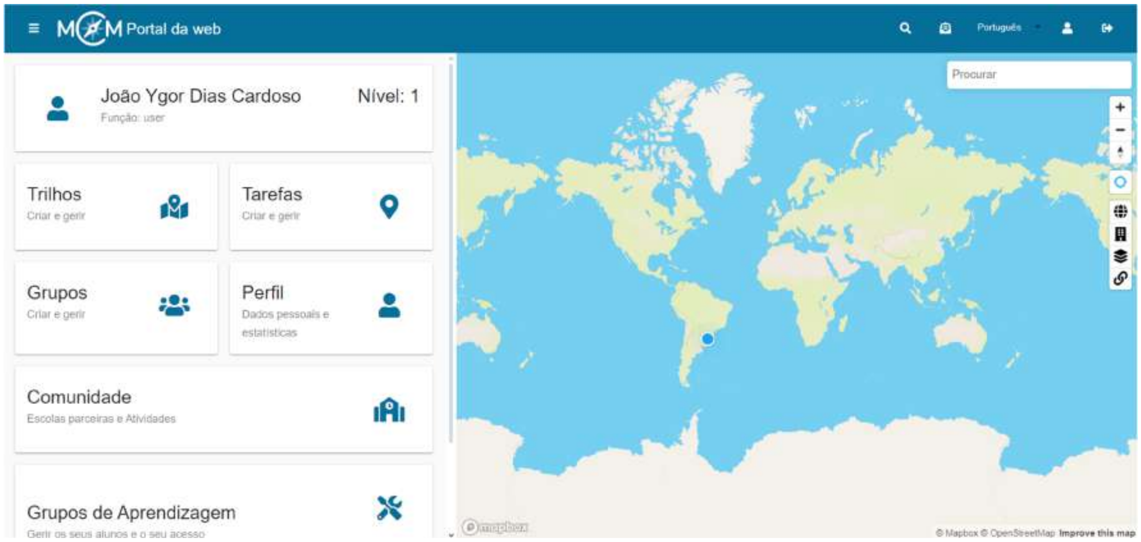


Fig. 142: Captura de tela da plataforma online MathCityMap.

Originalmente, a plataforma fomenta a produção de trilhas de matemática em todo território mundial. A produção dessas trilhas é baseada em um conjunto de tarefas dispostas no mapa onde se deseja trabalhar com a plataforma. O sistema é relativamente recente, lançado em janeiro de 2016, possui versão de aplicativo para smartphones, e até o presente momento possui cerca de 8.500 salas de aula digitais e um total de 82.748 tarefas e 30.004 usuários cadastrados (dados estatísticos coletados do portal MathCityMap).

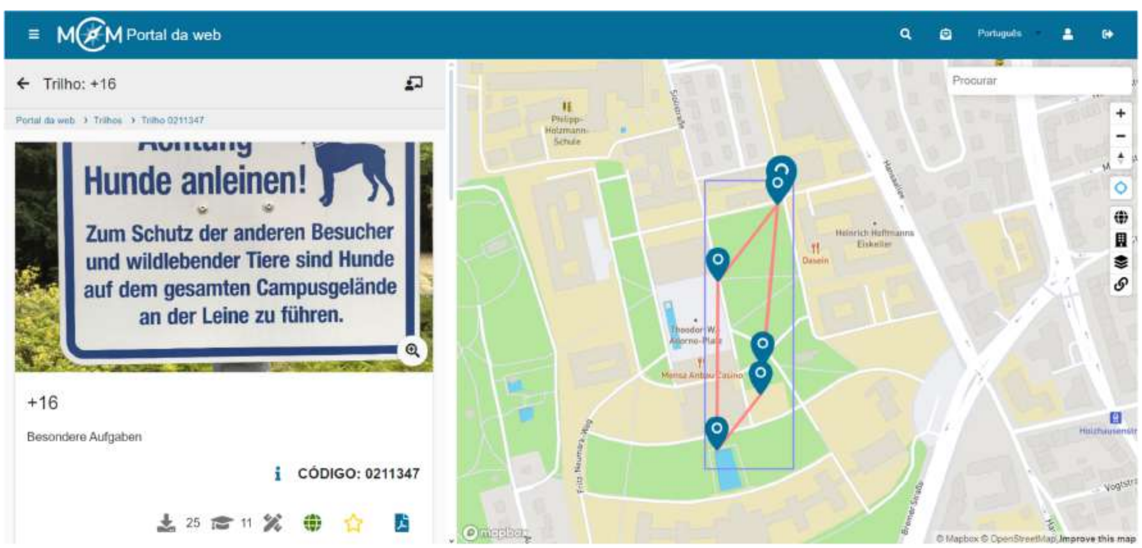


Fig. 143: Captura de tela de uma atividade na região da França pelo MathCityMap.

A grande produção das trilhas do sistema está concentrada no continente europeu. No Brasil, existem apenas 5 trilhas desenvolvidas e publicadas no portal do MathCityMap, sendo que três delas estão na cidade de Pato Branco, no estado do Paraná (dados coletados do Instagram do projeto “Matemática ao ar livre: por entre cálculos, trilhas e tecnologias”, da Universidade Tecnológicas Federal de Paraná). A figura abaixo ilustra a distribuição das trilhas no mapa mundi.

Fig. 144: Captura de tela da distribuição de trilhas mundial.

Para a elaboração do tour que pretendemos fazer pela universidade, iremos escolher algumas construções e locais dentro da própria universidade que podem ser acessados pelos alunos. O trajeto até os locais que as atividades estarão será realizado a pé ou com o apoio de algum meio de transporte. O objetivo desta prática é levar os estudantes do curso para fora das salas de aula da universidade, e colocar em prática o desenho em perspectiva através da visualização geométrica sobre as construções por ali existentes. Para a realização do tour iremos utilizar a plataforma online e também app MathCityMap é um projeto do grupo de trabalho MATIS I (IDMI, Goethe-Universitat Frankfurt a.M). A utilidade do MathCityMap nessa atividade se dá pelas atribuições que a ferramenta oferece visto que o app apresenta uma interface dinâmica. Nela, podemos marcar pontos no mapa de uma determinada região a fim de vincular uma atividade naquele local. Por exemplo, no mapa de uma cidade temos praças ou até mesmos grandes edificações, suponha que em uma praça há um monumento de pedra, então a partir do app, é possível vincular uma atividade nesse monumento. Não há uma exigência para a elaboração dessas atividades, elas podem ser diversas, desde atividades argumentativas, atividades visuais até atividades de múltipla escolha. Assim, pretendemos elaborar atividades no app MathCityMap que abordem desenho em perspectiva das construções que iremos visitar, estimulando os estudantes a aprimorarem suas habilidades com desenho.

DISCUSSÕES SOBRE A ATIVIDADE

Consideramos que estamos tratando sobre um trabalho de conclusão de curso em desenvolvimentos, esperamos que ao final da realização da atividade que desejamos aplicar, seja notório que os estudantes do curso de Matemática percebam a importância do desenho geométrico na formação inicial de professores de matemática, especialmente quando falamos sobre o ensino de Geometria Espacial no ensino básico, entender que o desenho é uma ferramenta determinante nas construções de sólidos geométricos no quadro da sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bisho, A. J.; **Special Abilities and Mathematics Education: A Review.** Educational Studies in Mathematics, [s. l.], v. 11, p. 257-269, 1980. Disponível em: `https://www.jstor.org/stable/3481801.` Acesso em: 25 abr. 2024.

[2] Brasil; **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

[3] Gutierrez, A.; **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework.** in L. Puig and A. Gutierrez (eds.) Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia. 1996. Disponível em: `http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcotex.html`.

[4] Sinclair, N.; Moss, J.; Hawes, Z.; Stephenson, C.; **Aprendendo através e a partir do desenho na geometria dos primeiros anos. Visualizando Matemática.** Pesquisa em Educação Matemática. Springer, Cham, 2018. Disponível em: `https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-511`. Acesso em abr. 2024.

Letramento matemático para surdos

Dos Santos, Jonas Brito[469]; Cardoso Junior, Waldemar dos Santos[470] e Lima, Reinaldo Feio[471]

Resumo: *Este ensaio teórico tem como objetivo conhecer as práticas do letramento de Surdos a partir de uma pesquisa exploratória em diversas fontes bibliográficas. Para isso, foi delineado os objetivos específicos para apresentar aspectos teóricos sobre letramento e seus desdobramentos na educação matemática, bem como, conhecer as perspectivas da educação de surdos no letramento matemático. Embasado em legislações pertinentes, como a Lei* 10.436/02 *e a LDB, a pesquisa busca apresentar fundamentos teóricos sobre letramento matemático e examinar perspectivas educacionais específicas para surdos. Autores como Kalantzis e Pinheiro* (2020)*; Passos e Nacarato* (2018)*; Silva e Oliveira* (2022)*, Godoi e Cardoso-Junior* (2019)*, De Castro e Grutzmann* (2023)*, De Sá* (2022)*, Silva e Oliveira* (2022)*; Muniz* (2021)*; Padilha* (2021) *e Fernandes* (2011)*, são referenciados para embasar o estudo. Os resultados revelam a complexidade do processo de ensino e aprendizagem da matemática para surdos, ressaltando a importância da formação adequada de professores e a implementação de estratégias pedagógicas inclusivas. Além disso, destaca a necessidade contínua de pesquisa e desenvolvimento nessa área, visando promover uma temática mais eficaz para a comunidade surda.*

Palavras-chave: *Surdos, educação bilíngue, letramento matemático.*

INTRODUÇÃO

É sabido que a educação matemática de surdos é um desafio na prática escolar, já que surdos usam a Língua Brasileira de Sinais - Libras, como primeira língua (L1) e a Língua Portuguesa como segunda língua (L2) na modalidade escrita, conhecido como educação bilíngue de surdos, preconizado na Lei 10.436/02 e no Decreto 5626/06, bem como no capítulo IV da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), trata-se da educação especial como modalidade de ensino que visa à oferta de serviços educacionais especializados, preferencialmente na rede regular de ensino, para alunos com necessidades educacionais especiais.

Nesse contexto educacional, o professor de matemática precisa saber Libras, desenvolver estratégias e material pedagógico bilíngue de surdos. Mais que ensinar matemática, é oportuno problematizar o letramento matemático de surdos, tendo em vista, que os surdos usam ferramentas diárias para manipular, resolver problemas, compreender a matemática em diversas atividades sociais.

Diante disso, o objetivo deste ensaio teórico é conhecer as práticas do letramento de Surdos a partir de uma pesquisa exploratória em diversas fontes bibliográficas. Para isso, foi delineado os objetivos específicos para apresentar aspectos teóricos sobre letramento e seus desdobramentos na educação matemática, bem como, conhecer as perspectivas da educação de surdos no letramento matemático.

[469] Universidade Federal Do Pará, jonasbritto2001@gmail.com
[470] Universidade Federal Do Pará, waldemar@ufpa.br
[471] Universidade Federal Do Pará, reinaldo.lima@ufpa.br

Posto isso, os aspectos teóricos a serem utilizados nesse estudo são com base em Kalantzis e Pinheiro (2020); Passos e Nacarato (2018); Silva e Oliveira (2022), que tratam do letramento; Godoi e Cardoso-Junior (2019), que abordam a educação bilíngue de surdos; De Castro e Grutzmann (2023) e De Sá (2022) que abordam a educação matemática; e por fim Silva e Oliveira (2022); Muniz (2021); Padilha (2021) e Fernandes (2011), que abordam o letramento matemático de surdos. O presente estudo torna-se relevante por abordar o letramento matemático como forma de integrar a inclusão social.

Por isso, a pesquisa está organizada em seções, na qual é apresentada as concepções norteadoras à educação bilíngue de surdos, presentes nas leis e nos documentos que garantem a referida educação bilíngue e, a partir disso, delinear aspectos que norteiam o letramento matemático de surdos.

EDUCAÇÃO BILÍNGUE DE SURDOS

A educação bilíngue de surdos envolve a Libras, enquanto língua, com gramática própria, assim os surdos falam com as mãos, corpo e expressões faciais, e escrevem a Língua Portuguesa como segunda língua escrita, sem o uso da linguagem falada, conforme prevê Lei 10.436/02 e o decreto 5.626/05. Por vez, o ouvinte fala com a boca, e usa o Português escrito como língua materna, o quadro abaixo apresenta o uso da linguagem de surdos e ouvintes em contextos educacionais, a saber:

Tab. 14: Uso da linguagem na educação de surdos e de ouvintes

Surdos	**Ouvintes**
Libras	Língua Portuguesa falada
Língua Portuguesa como L2 escrita	Língua Portuguesa escrita

Fonte: o autor

Nessa direção, a educação bilíngue de surdos é uma atividade em que duas línguas – Libras e Português, estão correlacionados, nesse caso, pensar a educação matemática de surdos envolve o conhecimento do uso da Libras como língua de instrução para que os surdos possam formar conceitos matemáticos e aplicá-los em práticas sociais diariamente.

No estudo intitulado "Educação Bilíngue para Surdos e Ouvintes: Reflexões e Propostas para uma Prática de Ensino Inclusiva" realizado por Godoi e Cardoso-Junior (2019), é apresentada uma abordagem que vai além da concepção simplista de inclusão como um mero ato de colocar ou retirar alunos surdos das salas de aula. Os autores enfatizam a complexidade inerente à criação de um ambiente educacional verdadeiramente inclusivo, ressaltando a necessidade de recursos financeiros adequados e profissionais capacitados para efetivamente implementar a educação bilíngue.

Diante disso, a educação matemática com conteúdo específico e ideias voltadas ao aproveitamento do saber matemático na perspectiva da educação bilíngue de surdos envolve o uso da Libras, para possibilitar a formação de conceitos tendo em vista resoluções de problemas, e a Língua Portuguesa escrita, sem oralidade, para o processo de leitura e escrita das questões norteadoras do saber matemático, a constituir o aluno surdo pelo letramento matemático.

LETRAMENTO MATEMÁTICO DE SURDOS

O progresso do letramento constitui um processo de aprendizagem em evolução ao longo da vida, abrangendo, portanto, uma amplitude maior do que a definição tradicionalmente associada à mera capacidade de leitura e escrita. (Kalantzis; Pinheiro, 2020).

Em se tratando de letramento para avaliação em diferentes áreas, a de se considerar que a matemática apresenta um caso interessante, pois sua compreensão vai além da simples escolha da resposta correta. A notação matemática, por exemplo, é uma forma de escrita que necessita de uma fundamentação narrativa do problema, explicações escritas do raciocínio empregado, descrições das conclusões e recursos visuais que evidenciam o pensamento matemático utilizado. Assim, é importante obter uma representação do conhecimento matemático dos alunos que seja multimodal, semelhante ao que os profissionais da área, como engenheiros, precisam fornecer na prática. (Passos; Nacarsto,2018).

As referidas autoras relatam que na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a concepção de letramento matemático foi totalmente inspirada na Matriz de Avaliação de Matemática do PISA de 2012. No Ensino Fundamental, é priorizado o desenvolvimento do letramento matemático, entendido como as competências e habilidades necessárias para raciocinar, representar, comunicar e argumentar de forma matemática. Esse desenvolvimento visa facilitar a formulação de conjecturas e a resolução de problemas em diversos contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. Ao definir o letramento matemático como competências e habilidades, destaca-se sua natureza como uma capacidade individual do estudante, não sendo concebido como uma construção histórica e cultural.

Silva; Oliveira (2022) pesquisou a prática de letramento docente em um empreendimento com tarefas matemáticas, o estudo qualitativo investigou a negociação de significados em práticas de letramento docente de professores de Matemática. Utilizando constructos teóricos como participação, reificação e negociação de significados, o estudo descreveu como os professores selecionaram e analisaram tarefas para os anos finais do Ensino Fundamental em uma escola pública. Os resultados indicaram que as tarefas foram adaptadas ao contexto das turmas, refletindo os usos sociais da leitura e da escrita valorizados no ambiente escolar.

O estudo de Fernandes (2011), sobre o letramento matemático de surdos destaca a importância da educação bilíngue e inclusiva. Ele enfatiza que a educação desses alunos deve ser planejada levando em consideração não apenas a língua de sinais, mas também a língua oral, garantindo acesso equitativo ao conhecimento matemático.

Ideia de letramento relacionado à educação de surdos é um assunto pouco abordado na pesquisa acadêmica, já que é um campo de estudo recente carente de evidências científicas, apesar dos alunos surdos estarem na educação básica, na perspectiva da educação inclusiva (surdos e ouvintes) ou na educação bilíngue de surdos (surdos), a seguir será apresentado a ideia de letramento matemático.

É importante destacar as pesquisas sobre letramento matemático de surdos, que tem o papel de apresentar evidências, fomentar a área e contribuir com a escolarização de surdos no que tange a educação matemática. Por isso, foi delineada essa pesquisa exploratória de cunho bibliográfico.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente estudo foi delineado a partir da abordagem qualitativa, essa abordagem reconhece uma interação dinâmica entre o mundo concreto e o pesquisador, entre a realidade objetiva e a perspectiva subjetiva do observador, que transcende a quantificação numérica. (Filho; Filho, 2013). Considerando os objetivos do estudo, optou-se pela pesquisa exploratória, que tem por finalidade contato com a problemática de pesquisa para explicitar ou formular hipótese, comumente, são os levantamentos bibliográficos, a aproximar o tema-problema-objeto e contato com fenômenos. (Filho; Filho, 2013).

Por levantamento bibliográfico, compreendemos como fontes secundárias, engloba todo o material já publicado ou divulgado sobre um tema, como livros, jornais, revistas, filmes e programas de televisão. Logo, seu propósito é proporcionar ao pesquisador acesso a diversas informações sobre o assunto em estudo, incluindo registros de eventos como conferências, desde que tenham sido documentados de alguma maneira. (Marconi; Lakatos, 2011). Portanto, desenvolvemos um ensaio teórico na perspectiva de Barbosa (2018), por acreditarmos que os ensaios teóricos se caracterizam por apresentar uma argumentação rigorosa, coerente e crítica sobre um determinado tema, neste caso, letramento matemático para surdos, de modo que o levantamento bibliográfico visa subsidiar a construção dessa argumentação.

As Análises das fontes secundárias serão por meio da análise e interpretação dos fenômenos, assim como a atribuição de significados, são elementos essenciais. Esse tipo de pesquisa (qualitativa), também é identificado como análise intersubjetiva, destacando a importância da compreensão mútua entre pesquisador e participantes. (Filho; Filho, 2013)

RESULTADOS

Os resultados serão apresentados a começar pela pesquisa de Muniz (2021) intitulado “Reflexões sobre o ensino de matemática para surdos: uma revisão sistemática de 2015-2021”, que teve por objetivo analisar as contribuições dos trabalhos existentes examinando os níveis de ensino e as abordagens educacionais propostas para alunos surdos, buscando identificar padrões nas estratégias pedagógicas visando facilitar o aprendizado. Utilizando o método qualitativo de pesquisa e seguindo as etapas propostas por Bardin (2011) para análise de conteúdo, foi possível identificar temas que podem orientar o crescimento dessa área do conhecimento. Entre eles, destacam-se: a necessidade de formação dos professores para o ensino de matemática para alunos surdos, o uso de novas tecnologias nesse contexto, práticas diferenciadas de letramento matemático avaliação da aprendizagem desses alunos e a criação de um glossário matemático específico para surdos, com respaldo dos órgãos competentes. Em geral, as discussões revelaram a complexidade das aulas de matemática para estudantes surdos, proporcionando insights sobre o ensino e aprendizagem nessa área. No entanto, ainda há muito a ser investigado, sugerindo uma ampla gama de possibilidades e perspectivas para a Educação Matemática e a inclusão escolar de pessoas surdas.

Já o estudo intitulado “Ensino bilíngue de Matemática para surdos: uma abordagem proposta de sequência didática” apresenta uma sequência didática de Matemática Financeira adaptada para alunos surdos do Ensino Fundamental, integrando o ensino bilíngue. A abordagem metodológica, de caráter qualitativo, enfatiza a relevância dessa sequência no planejamento de aulas para a inclusão de surdos na matemática, destacando planos elaborados pela pesquisadora na área.

Nesses planos didáticos, os quais foram apresentados em quatro planejamentos, ocorreram da seguinte forma; a aula 1 tinha como objetivo reconhecer as moedas mundiais, Real, Dólar e Euro, usando Libras e língua portuguesa, vale ressaltar que esta aula é um momento de problematização inicial. A aula 2 permite que os alunos criem seu próprio dinheiro com cartolina, e tenham suas próprias carteiras, essa prática busca incentivar a criatividade e a construção de significados em torno do tema, além de aprender a administrar seu próprio dinheiro a partir da construção desses materiais. Na aula 3, inicia-se o conteúdo de matemática financeira, nessa aula, os alunos aprenderam a fazer a trocas com o dinheiro e entender o que cada parte significa, explorando o tema de frações. Por exemplo, uma moeda de 1 (um) real poderá ser substituída por 4 (quatro) moedas de 0,25 (vinte e cinco) centavos, ou seja, 0,25 significa ¼ (um quarto) de uma moeda de um real.

A intervenção do professor será importante para explicar que o numerador é a parte de cima da fração e o denominador é a parte de baixo, também para mostrar os sinais em libras fazendo analogia com dinheiro de cartolina. Por fim, a aula 4 tem o objetivo de avaliar a prática desenvolvida nas aulas anteriores. (Padilha, 2021) Ainda sobre esse estudo, sublinha-se a importância do preparo do professor para essa abordagem. A implementação de aulas dinâmicas e inclusivas proporciona uma aprendizagem mais ampla e construtiva. O entendimento em sala de aula melhora significativamente quando os professores adotam métodos educacionais inovadores, formando profissionais comprometidos e ávidos por conhecimento. (De Sá, 2022).

As Reflexões sobre possíveis entrelaçamentos entre a Educação Matemática e a Educação de Surdos presentes nas produções entre 2010 e 2020 é uma estudo que fez análise das produções contidas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, foram identificadas duas temáticas emergentes que destacam a interseção entre a Educação Matemática e a Educação de Surdos. A pesquisa, de natureza qualitativa e bibliográfica, revelou que essas áreas se conectam de diversas maneiras, principalmente através do uso da Língua Brasileira de Sinais (Libras) e da busca por métodos e estratégias de ensino inovadoras, que se valem da tecnologia e de materiais concretos, explorando a dimensão visual do ensino. (De Castro; Grutzmann, 2023).

DISCUSSÃO

Considerando os resultados obtidos no presente estudo, pode-se destacar a importância dos professores de matemática, serem fluente na Língua brasileira de sinais (LIBRAS), na formação para educação bilíngue de surdos é inegável. Esse domínio não apenas facilita a comunicação com os alunos surdos, mas promove um ambiente inclusivo e respeitoso. Além disso, o entrelaçamento entre a educação matemática e a educação de surdos é importante para garantir que os alunos surdos tenham acesso pleno ao currículo escolar. Por fim, o planejamento deve considerar estratégias específicas para a inclusão de surdos na matemática, bem como o desenvolvimento de estratégias de ensino que promovam a participação de todos os alunos.

CONCLUSÃO

Para obter os objetivos elencados foi delineado um ensaio teórico, buscando identificar estudos e abordagens relevantes sobre o letramento de surdos e sua aplicação no contexto da educação matemática. Foi realizada uma análise crítica das fontes selecionadas, destacando teorias e conceitos fundamentais relacionados ao letramento, bem como suas implicações específicas para o ensino e aprendizagem da matemática por alunos surdos. Além disso, foram examinadas as perspectivas e práticas educacionais adotadas em diferentes contextos, incluindo o uso da língua de sinais. A pesquisa buscou identificar lacunas no conhecimento existente e propor recomendações para futuras investigações e práticas educacionais, visando contribuir para o avanço do campo do letramento de surdos e sua aplicação na educação matemática.

O estudo de Muniz (2021), realizou uma revisão sistemática dos trabalhos existentes, identificando temas como a formação de professores, o uso de tecnologias, práticas diferenciadas de letramento matemático e a riação de um glossário matemático específico para surdos. A pesquisa de Padilha (2021), apresentou uma sequência didática de Matemática Financeira adaptada para alunos surdos do Ensino Fundamental, integrando o ensino bilíngue. Destacou-se a importância da criação de materiais concretos e a intervenção do professor para explicar conceitos utilizando a Língua Brasileira de Sinais (Libras). Por fim, a análise de De Castro e Grutzmann (2023), identificou entrelaçamentos entre a Educação Matemática e a Educação de Surdos, ressaltando a conexão entre essas áreas através do uso de Libras, tecnologia e materiais concretos para explorar a dimensão visual do ensino.

O presente estudo não se esgota, mas é base para ampliar o corpus de análise, quando se trata de ensaio teórico. Ao estabelecer uma fundação sólida de conhecimento e compreensão das interações entre educação matemática, letramento e inclusão de surdos, este estudo abre caminho para investigações futuras mais aprofundadas. Através da revisão bibliográfica, é possível enriquecer ainda mais a compreensão do tema, explorar áreas ainda não exploradas e contribuir para o avanço do conhecimento nesse campo específico.

Sugere-se abordar a temática, “O papel da Educação Matemática na inclusão de alunos surdos”, explorando como os professores podem adaptar seus métodos de ensino e planejamento de aulas para promover a participação desses alunos na disciplina. Isso envolve não apenas o domínio da Língua brasileira de sinais, pelos professores, mas também uma compreensão profunda das diferenças linguísticas dos alunos surdos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aguiar, G. DA S.; Ortigão, M. I. R.; **Letramento em Matemática: um estudo a partir dos dados do PISA2003**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 26, n. 42a, p. 1 22, abr. 2012.

[2] Barbosa, J. C.; **Abordagens teóricas e metodológicas na educação matemática: aproximações e distanciamentos**. In: OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática. Brasília: SBEM, p. 17-57, 2018.

[3] Brasi; **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 1996.

[4] Brasil; **Lei nº 10.436, de 24 de abril de 2002**. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais Libras e dá outras providências. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 25 abr. 2002.

[5] Brasil; **Decreto nº 5.626, de 22 de dezembro de 2005**. Regulamenta a Lei no 10.436, de 24 de abril de 2002, que dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais Libras. Diário Oficial da União, Brasília, DF, 23 dez. 2005.

[6] De Castro, E. S.; Grutzmann, T. P.; **Reflexões sobre possíveis entrelaçamentos entre a Educação Matemática e a Educação dos Surdos presentes nas produções entre 2010 e 2020**. Revista Educar Mais, v. 7, p. 880-898, 2023.

[7] De Sá, D. P. M. et al.; **Ensino bilíngue de Matemática para surdos: uma proposta de sequência didática**. 2022.

[8] Filho, M. C. F.; Filho, E. J. M. A.; **Planejamento da pesquisa científica**. São Paulo:Atlas, 2013.

[9] Kalantzis, M.; Cope, B.; Pinheiro, P.; **Letramentos**. Editora Unicamp. 2020.

[10] Marconi, M. A.; Lakatos, E. M.; **Técnicas de pesquisa: planejamento elaboração análise e interpretação de dados**. 7. ed. São Paulo: Atlas,277 p., 2011.

[11] Muniz, Q. H. M. A. M.; **Reflexões sobre o ensino de matemática para surdos: uma revisão sistemática de 2015-2020**. 2021.

[12] Padilha, M. S. et al.; **Alfabetização e letramento de surdos: uma ênfase na Língua Brasileira de Sinais**. Revista Teias de Conhecimento, p. 222-241,2021.

[13] Passos, C. L. B.; Nacarato, A. M.; **Trajetória e perspectivas para o ensino de matemática nos anos iniciais**. Estudos Avançados, v. 32, n. 94, p. 119 135, set. 2018.

[14] Silva, N. L. DA.; Oliveira, A. M. P. DE.; **Práticas de letramento docente em um empreendimento com tarefas matemáticas**. Ciência & Educação (Bauru), v. 28, p. e22005, 2022.

Sugestões de abordagem do volume da esfera no ensino médio

Souza Jr., José Carlos de[472]; Cardoso, Andréa[473] e Lopes, Ronaldo André[474]

Resumo: *O trabalho apresenta propostas que viabilizam a dedução e o cálculo do volume da esfera, de maneira compreensível aos alunos do Ensino Médio. Dentre elas, destaca-se uma aplicação do Teorema de Pappus-Guldin trabalhada com discentes do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Alfenas (UNIFAL-MG). Para o desenvolvimento das propostas, utilizou-se o software GeoGebra.*

Palavras-chave: *Matemática, ensino, formação de professores, GeoGebra.*

INTRODUÇÃO

O Teorema de Papus-Guldin é utilizado para o cálculo de área e volume de sólidos de revolução. O resultado foi enunciado pelo último grande geômetra grego, Papus de Alexandria, no livro VII de sua Coleção Matemática no final do século III d.C. [1]. O resultado foi retomado somente no século XVII e demonstrado pelo matemático e astrônomo Paul Guldin (Suiça, 1577-1643). As aplicações do Teorema e sua demonstração podem ser vistas em [2].

Esse Teorema diz que se uma figura plana gira em torno de um eixo do seu plano, então o volume V gerado é igual ao produto da área A dessa figura pelo comprimento da circunferência descrita pelo seu centro de massa [2] (Figura 145).

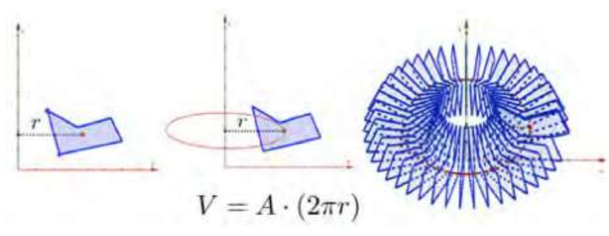


Fig. 145: Teorema de Pappus-Guldin - Autoria própria

Assim, a compreensão do conceito de baricentro torna-se importante no desenvolvimento de uma das propostas. Trata-se de uma palavra de origem grega, baricentro (*bari* = peso) e designa o centro dos pesos, ou ainda o centro de gravidade, ou ponto de equilíbrio. Intuitivamente, para encontrar o baricentro de uma figura plana F, basta pendurá-la por um ponto P de seu bordo e traçar a reta vertical passando por P, ou

[472]Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG.
[473]Universidade Federal de Alfenas / UNIFAL-MG.
[474]Universidade Federal de São Carlos / UFSCar.

seja, a reta que contém o fio no qual penduramos a figura. Em seguida, repita o processo usando um outro ponto Q do bordo de F. A interseção das duas retas fornece o ponto G que é o baricentro de F (Figura 146).

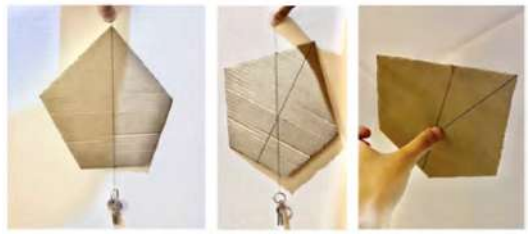


Fig. 146: Determinação experimental do baricentro - Autoria própria

O baricentro de um polígono P é obtido utilizando-se o conceito de centro de massa para um conjunto finito de massas pontuais e unitárias [3]. Isto é, sendo os vértices de P os pontos com coordenadas cartesianas $A_i = (x_i, y_i)$, com $1 \leq i \leq n$ e $i, n \in \mathbb{N}$, o baricentro G é dado por:

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n} \right).$$

Ou seja, as coordenadas cartesianas de G são as médias aritméticas das coordenadas dos vértices A_i's de P, com $i = 1, \ldots, n$.

DESENVOLVIMENTO

Ao questionar os professores em formação sobre a dedução da fórmula do volume de uma esfera de raio r, em geral, a primeira lembrança é devida ao fato de que a esfera é obtida pela revolução da função $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, correspondente à parte superior da semicircunferência de centro na origem e raio r, em torno do eixo x. Assim, segue das aplicações da integral que $V = \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, dx = \frac{4}{3}\pi r^3$. Como essa abordagem não é pertinente ao Ensino Médio, surge a necessidade por outras alternativas viáveis.

Poucos são os alunos que já ouviram falar no Princípio de Cavalieri, ou por não terem cursado a disciplina de Geometria Espacial, ou por raramente serem apresentados a este resultado no Ensino Médio. Tal princípio estabelece que se dois sólidos tiverem a mesma altura e, sempre que seccionados por um mesmo plano gerarem áreas iguais, então terão o mesmo volume [2]. Uma atividade trabalhada com os alunos, envolvendo esse resultado e o volume da esfera pode ser acessada nesse *link*. Durante sua construção e discussão, surge a oportunidade de revisitar o conceito de equivalência de área e o Princípio de Cavalieri, por meio do qual, deduz-se que $V_{esfera} = V_{cilindro} - 2V_{cone}$, donde concluímos que $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Para finalizar a abordagem sobre o volume da esfera, apresenta-se o Teorema de Pappus-Guldin e uma atividade exploratória proposta por [4]. A ideia trabalhada é a de aproximar um semicírculo de raio r por polígonos convexos cujas bases encontram-se no diâmetro do semicírculo e os demais vértices estão sobre a semicircunferência.

Fig. 147: Aproximação do semicírculo por polígonos convexos - Autoria própria

Conforme aumenta-se o número n de lados do polígono, com os vértices fora da base igualmente espaçados, o traçado do polígono tende ao arco que compõe o semicírculo. Assim, o baricentro do polígono tende ao centro de massa do semicírculo à medida que $n \to \infty$. Uma vez que o GeoGebra é capaz de fornecer tanto a área do polígono, quanto o seu centro de gravidade, temos todos os ingredientes para obter os volumes do sólidos de revolução gerados por esses polígonos. Usando novamente a noção de limite, percebe-se que quando $n \to \infty$, o volume do sólido tende ao volume da esfera, confira nesse *link*.

CONCLUSÃO

Raros são os discentes que tiveram a oportunidade de conhecer e trabalhar com o Princípio de Cavalieri e com o Teorema de Pappus-Guldin. Através da elaboração e construção das atividades propostas, muitos são apresentados a esses resultados e verificam que, por meio dos enunciados simples e com o auxílio de tecnologias digitais, é possível trabalhar seus conceitos com alunos do Ensino Médio.

BIBLIOGRAFIA

[1] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

[2] THOMAS, G. B. **Cálculo - Vol. 1. 12. ed**. São Paulo: Pearson Education do Brasil: Addison Wesley, 2013.

[3] CARNEIRO, E.; GIRÃO, F. Centro de massa e aplicações à Geometria. **Revista Eureka!**, v. 1, n. 21, p. 29-37, 2005.

[4] DANTAS, S. **Como calcular o volume da esfera por meio do Teorema de Pappus?** Canal: O Geogebra. Disponível em: `https://youtu.be/2WVIECO5pEA?si=hgPbGFazEMz6iPGX`. Acesso em 28/04/2024.

Equação dos pontos duplos e a da imagem para aplicações de reflexão

José Rafael Borges Zampiva[475]

Resumo: *Seja* $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ *uma subvariedade complexa de um subespaço vetorial* V *no qual um grupo de reflexão* W *age. Um mapeamento de reflexão é a restrição* $\mathcal{Y} \to \mathbb{C}^p$ *do mapeamento quociente* ω*. Estudamos os espaços de pontos duplos* K^2*,* D^2 *e* D *dos mapeamentos de reflexão, fornecendo uma descrição explícita da estrutura analítica dos ramos dos seguintes pontos duplos* K^2_σ*,* D^2_σ*,* D_σ *nos quais se dividem. No caso em que* $\mathcal{Y}$ *é uma hipersuperfície em* $\mathcal{V}$*, obtemos equações explícitas para o espaço de pontos duplos* D *e a imagem de* f*. No caso de* $(\mathcal{Y}^2, W_y) \to (\mathbb{C}^3, 0)$*, isso fornece métodos eficientes para calcular os seguintes invariantes* $\mu(D)$ *e* $\delta(D)$*.*

[475]Universidade Federal de São Carlos

Intervenções psicopedagógicas na disciplina de matemática para alunos com transtorno do espectro autista (TEA)

Almeida, Joyce Fernandes de[476]

Resumo: *A abordagem dos métodos de intervenção para o trabalho com alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA) no ensino e aprendizagem da matemática se faz necessário para que o mesmo seja capaz de desenvolver suas habilidades acadêmicas e conseguir aplicá-las em seu dia-a-dia. Nesta revisão bibliográfica é possível observar as características do aluno que tem esse diagnóstico, as principais formas de metodologia de ensino e os métodos mais assertivos, ou mais eficazes, para o ensino da disciplina de matemática para este público-alvo. Sendo assim, a partir de tais estudos é possível compreender e adequar da melhor forma possível os métodos pedagógicos, os conteúdos trabalhados e os objetivos a serem alcançados para que eles sigam sempre evoluindo.*

Palavras-chave: *Autismo, ensino, matemática.*

DESCRIÇÃO

A vida acadêmica é sempre um desafio para crianças, jovens e adultos, independentemente de qual o ano escolar esteja estudando. Quando falamos da disciplina de matemática, essa causa ainda mais apreensão a todos por julgarem, na maioria das vezes, como sendo a disciplina mais difícil a ser superada na vida acadêmica.

Para alunos que fazem parte do Transtorno do Espectro Autista (TEA), quando a necessidade de abstração do pensamento é fundamental para a aprendizagem da matemática, esse processo é ainda mais difícil. A dificuldade em realizar operações mentalmente, de abstrair e imaginar a resolução, e a associação do conteúdo teórico com os exercícios solicitados torna a aprendizagem mais difícil e lenta, porem isso não significa que eles não sejam capazes de aprender.

Primeiramente, irão discutir-se algumas das metodologias de ensino existentes para o ensino da matemática, direcionadas principalmente para a metodologia concreta e ativa para a melhor fixação do conteúdo. Posteriormente, serão apresentadas as melhores maneiras de intervenção psicopedagógica que auxilie e facilite a aprendizagem matemática dos alunos com TEA. E por último, o sequenciamento simples de atividades que podem ser utilizadas para o ensino de matemática para o público alvo destacado neste artigo.

Entende-se por metodologia de ensino como o modo pelo qual se dá o processo de ensino e aprendizagem. É a partir de tais métodos que se planeja a aula a ser lecionada e os objetivos que se pretende alcançar

[476] `profjoycefernandes@gmail.com`

naquele dia. Tal processo pode ocorrer de maneiras diferentes a partir de perspectivas distintas sobre o papel dos docentes e discentes no processo de construção do conhecimento.

Direcionando as metodologias de ensino para o ensino e aprendizagem da disciplina de matemática, qualquer uma pode ser aplicada no desenvolvimento de atividades pedagógicas e psicopedagógicas. Tratando-se de uma disciplina complexa e que muitos alunos tem medo, traumas e grandes dificuldades para associar, memorizar e aplicar o conteúdo aprendido, visto que a falta de associação com a vida real é algo que compromete consideravelmente a aprendizagem de qualquer aluno.

Agora direcionando a discussão para o público-alvo, os alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA) matriculados em uma escola regular deveriam, em teoria, conseguir acompanhar e ter acesso ao mesmo conteúdo que os demais educandos, porém a dificuldade de fixação e abstração de pensamento da matemática, que são necessários para a aquisição do conhecimento, limitam seu pleno desenvolvimento.

O DSM-V, Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders, fifth edition (Manual Diagnóstico e Estatístico de Transtornos Mentais, 5ª edição) define o Transtorno do Espectro Autista (TEA) como:

> [...] um transtorno do neurodesenvolvimento caracterizado por dificuldades de interação social, comunicação e comportamentos repetitivos e restritos. O Transtorno do Espectro Autista, TEA, tem essas três características que são essenciais para o diagnóstico. Ainda que os sintomas variam de caso a caso, esses elementos são determinantes para realizar o diagnóstico de autismo. (NEUROSABER, 2020).

Mesmo com o diagnóstico fechado, em nenhum momento o mesmo deverá ser um limitador da capacidade de aprendizagem do aluno. Com as características do aluno, é possível traçar um plano de aprendizagem e desenvolver o conteúdo necessário no nível mais próximo possível de toda a sala.

Pela dificuldade de construir o pensamento abstrato, a utilização de atividades concretas, objetivas e com nível crescente de dificuldade facilita e torna viável a aprendizagem, sem perdas ou lacunas que possam prejudicar a aprendizagem efetiva.

Como o objeto de estudo é a aprendizagem de alunos com TEA, devemos focar primeiramente no objetivo da educação, que segundo Santos é:

> [...] Com base em Carothers e Taylor (2004), o objetivo da educação de uma criança autista é o de aumentar sua independência, a fim de proporcionar mais segurança ao executar tarefas do cotidiano, além de melhorar a qualidade de vida da criança e de seus familiares. (SANTOS, P.6, 2016).

Sendo assim, a partir do momento que se observa uma evolução na sua autonomia no que diz respeito às tarefas de vida diária, o conteúdo acadêmico também deve ser inserido de acordo com o nível de dificuldade e a necessidade que o aluno apresenta.

Mesmo com o objetivo principal no desenvolvimento de suas habilidades para favorecer a execução de tarefas, além de melhorar sua qualidade de vida e de seus familiares, a aprendizagem não se limita apenas a isso. Diversos indivíduos com o Transtorno do Espectro Autista (TEA) têm suas funções cognitivas preservadas e a evolução acadêmica deve sim constar em sua vida.

Agora focando na disciplina de matemática é importante que o aluno seja capaz de aplicá-la em suas atividades de vida diária que são de suma importância: orientar-se em relação aos dias da semana, em relação ao horário e consegue lidar com quantias em dinheiro para atividades simples são questões que todo indivíduo deve dominar e conseguir ser inserido na sociedade.

Como peças fundamentais para essa trajetória de aprendizagem estão a escola e a família que, quando trabalham unidas, trazem resultados surpreendentes a vida do aluno. Dois pontos são fundamentais para que a aprendizagem ocorra de maneira mais tranquila: elaborar atividades que despertem o interesse sobre o que esta sendo ensinado e a utilização de materiais concretos e comandos simples para que a assimilação e fixação de tudo o que é trabalhado ocorra de maneira efetiva.

No que diz respeito ao despertar interesse nos alunos, as metodologias ativas surgiram para modificar a dinâmica em sala de aula e integrar o aluno em todas as suas etapas. Segundo Lima et. al. A metodologia ativa é definida por:

> [...] as metodologias ativas “são pontos de partida para avançar para processos mais avançados de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas”, e sua utilização no espaço escolar representa uma nova forma de aplicação do conteúdo, de modo a integrar o aluno no processo educacional. (LIMA, p.2, 2021).

Com isso, a aprendizagem torna-se facilitada e atraente a todos os envolvidos, sendo eles neurotípicos ou não, e a disciplina de matemática, é aprendida de maneira leve e sólida. Ao dar um carácter significativo para aquilo que é ensinado, o caminho da aprendizagem é suave e coerente.

As intervenções neuropsicopedagógicas trabalham de maneira individual e forma terapêutica para que as dificuldades de aprendizagem sejam sanadas e o indivíduo consiga evoluir academicamente. Portanto, sua função é intermediar, ajudar, auxiliar no surgimento da motivação do paciente para o estudo, através de metodologias e estímulos específicos e apropriados para cada um, sempre respeitando seus modos de aprendizagem, colaborando sempre com a evolução da autonomia cognitiva do neuroaprendiz. No acompanhamento psicopedagógico, o foco de trabalho a ser desenvolvido sempre será no indivíduo dentro de sua totalidade, ou seja, dentro do contexto geral para que ele(a) aprenda em qualquer esfera de sua vida.

Com isso, é correto afirmar que o profissional atuante na neuropsicopedagogia trabalha em cima da construção da aprendizagem, lidando com todos os aspectos que a cercam. Concentração, memória, foco e entre outras habilidades são trabalhadas nas sessões para que o objetivo principal, a aprendizagem seja alcançada de maneira cada vez mais autônoma. Além do trabalho individual, em consultório, o profissional também auxilia e orienta a escola e os pais do paciente garantem uma intervenção mais assertiva e direta, conforme mencionado a seguir:

Portanto, o objetivo principal destas intervenções sempre será o paciente e o desenvolvimento de suas habilidades para que possa acompanhar academicamente seus colegas ou chegar o mais próximo possível do que é esperado.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAUMGARTEL, P.; **O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática** . EBRAPEM. Disponível em: `http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd2_priscila_baumgartel.pdf`

[2] BEAUCLAIR, J. ;**Para entender psicopedagogia: perspectivas atuais, desafios futuros.** 3ed. Rio de Janeiro:Wak, 2009

[3] BRASIL. **Manejo comportamental de crianças com Transtornos do Espectro do Autismo em condição de inclusão escolar: guia de orientação a professores** [livro eletrônico]. – São Paulo: Memnon, 2014. Disponível em: https://portal.educacao.rs.gov.br/Portals/1/Files/3155.pdf.

[4] CAMARGO, S.P.H; RISPOLI, M. **Análise do comportamento aplicada como intervenção para o autismo: definição, características e pressupostos filosóficos**. Revista Educação Especial, vol. 26, núm. 47, 2013.

[5] FERNANDES, F.D.M; AMAT, C.A.H. **Análise de Comportamento Aplicada e Distúrbios do Espectro do Autismo: revisão de literatura**. CoDAS 2013;25(3):289-96

[6] FERREIRA, V.L. **Metodologia de Ensino da Matemática**. Teses USP. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-03092009-161620/publico/Tese.pdf

[7] FIORENTINI, D; MIORIM, M. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática**. Faculdade de Educação da UNICAMP – Boletim SBEM-SP. Disponível em: `http://files.profpereira.webnode.com/200000097-846ca86603/Texto%20-%20Uma%20Reflexao%20sobre%20o%20uso%20de%20Materiais%20Concretos%20e%20Jogos.pdf`

[8] MENEZES, P. **Metodologias de Ensino. Significados**. Disponível em: https://www.significados.com.br/metodologia-de-ensino/

[9] SILVA, M.; MULICK, J.A. **Diagnosticando o transtorno autista: aspectos fundamentais e considerações práticas**. Psicol. cienc. prof. [online]. 2009, vol.29, n.1 [cited 2020-10-01], pp.116-131. Disponível em: `https://institutoneurosaber.com.br/dsm-5-e-o-diagnostico-no-tea/`

[10] SKINNER, B.F. **Ciência e Comportamento Humano** . Brasília: Ed. UnB/ FUNBEC, (1953), 1970.

Explorando a visualização das curvas de nível:

Através de Construções no Geogebra e gráficos 3D

Quadros, Glenda de Fátima Amorim[477]; Santa Brígida, Júlia Barbosa[478]; Nunes, Marly dos Anjos[479] e Silva, Laissa Vitória Barbosa[480]

Resumo: *Este trabalho descreve uma experiência de ensino inovadora em que alunos da graduação em Licenciatura Plena em Matemática, após terem concluído a componente curricular de Cálculo Diferencial e Integral II e explorado curvas de nível com o auxílio do software GeoGebra, foram desafiados a aplicar esses conhecimentos na confecção de figuras em 3D. O uso do GeoGebra permitiu aos alunos uma compreensão visual e dinâmica das curvas de nível, facilitando sua aplicação nas figuras tridimensionais. Com o objetivo de aprimorar a compreensão dessas curvas, foi utilizado o software para criar representações gráficas dinâmicas e interativas, permitindo uma exploração detalhada de suas características e propriedades. Essa abordagem multidimensional visa enriquecer o processo de aprendizado, promovendo um entendimento mais profundo e intuitivo das curvas de nível e sua relevância.*

Palavras-chave: *Cálculo diferencial e integral II, software GeoGebra, curvas de nível, matemática.*

INTRODUÇÃO

Certamente, é inegável que a Matemática figura entre as disciplinas que despertam apreensão e até mesmo temor nos alunos, em virtude de sua intrincada complexidade e do esforço intelectual que sua compreensão demanda. A falta de intuitividade e a necessidade de dedicação extra para dominá-la contribuem para esse cenário. Consequentemente, os docentes se veem diante de um desafio considerável ao tentar facilitar o entendimento dessa disciplina, muitas vezes recorrendo a métodos pedagógicos complexos para tornar o conteúdo mais acessível.

Em virtude do caráter exigente e do tempo necessário para assimilar os conceitos matemáticos, é comum que os estudantes se sintam desencorajados, resultando em um declínio no interesse pela matéria. Esse desinteresse manifesta-se no elevado índice de reprovação observado nas salas de aula ao redor do mundo, inclusive no curso de Licenciatura Plena em Matemática. A dificuldade em acompanhar o ritmo das aulas e a sensação de sobrecarga podem comprometer a confiança dos alunos, levando a um ciclo de desmotivação e desempenho insatisfatório.

Refletindo sobre as considerações apresentadas, é oportuno mencionar o Laboratório Pedagógico de Informática e Matemática (LAPINMAT), um projeto que emergiu como resposta a esses desafios. Este

[477] Afiliação. Universidade Federal do Pará, glendaamorimquadros@gmail.com
[478] Afiliação. Universidade Federal do Pará, juliabarbosa328@gmail.com
[479] Afiliação. Universidade Federal do Pará, marlynunes@ufpa.br
[480] Afiliação. Universidade Federal do Pará, laissavitoria045@gmail.com

laboratório, concebido e liderado por duas professoras doutoras da Faculdade de Matemática e um professor mestre colaborador, situada no Campus de Bragança-PA, materializa-se como uma iniciativa vital para aprimorar o ensino e a compreensão da Matemática. Submetido e aprovado no edital LABINFRA 2019, seu objetivo abrange a pesquisa e a produção de objetos matemáticos, bem como a realização de experimentos que materializem os fenômenos próprios à disciplina.

No âmbito do LAPINMAT, merecem destaque às experiências vivenciadas pelos professores coordenadores do laboratório dentro das salas de aula, onde a integração entre teoria e prática é uma constante. Uma exemplificação marcante dessa abordagem é a iniciativa em que os professores, após a conclusão do curso de Cálculo II e aprofundamento em conhecimentos sobre curvas de nível, foram desafiados a aplicar esses conceitos de maneira criativa e prática: na confecção de figuras em 3D, fazendo uso do software GeoGebra.

O intuito principal era promover uma integração efetiva entre conceitos abstratos e aplicação tangível, impulsionando não apenas a criatividade, mas também o pensamento crítico e a aplicação dos conhecimentos adquiridos em um contexto real e concreto. Assim, a união entre teoria e prática no LAPINMAT transcende os limites da sala de aula tradicional, proporcionando uma experiência de aprendizado significativa e multidisciplinar. Deste modo, buscamos trazer um olhar diferenciado nesta aplicação pois,

> “observar é muito mais do que somente ‘dar uma olhada rápida’, é deter-se, buscar relações, perceber semelhanças e diferenças, é querer conhecer melhor. A observação é um processo constante e dela depende o diagnóstico e a continuação do trabalho. Quando a observação tem qualidade, ela pode colaborar para uma atuação mais eficaz.” (Petty, 1996)

Desta forma, procurou-se instigar esta observação minuciosa durante a disciplina ofertada. Com a intenção de gerar uma participação ativa e eficaz dos discentes.

Objetivo Geral

Apresentar os gráficos de funções com duas variáveis visando a visualização das curvas de nível, através da utilização do software Geogebra e a materialização dos mesmos com materiais recicláveis.

Objetivos Específicos

- Explorar as potencialidades do software GeoGebra e figuras tridimensionais na visualização e interpretação das curvas de nível, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica e envolvente por parte dos discentes.
- Promover a integração entre teoria e prática, estimulando a criatividade e o pensamento crítico dos alunos por meio da construção, análise de gráficos e figuras 3D das curvas de nível.
- Avaliar a eficácia do uso do GeoGebra e de figuras tridimensionais na visualização das curvas de nível como ferramentas didáticas no processo de ensino e aprendizagem.

METODOLOGIA

Este estudo adota uma abordagem qualitativa para explorar a visualização das curvas de nível por meio do software GeoGebra e da prática de construção de vasos com cordas de sisal em uma turma de graduação de licenciatura em Matemática. A metodologia compreende as seguintes etapas:

Seleção da Turma e Contextualização: Inicialmente, a turma de graduação de licenciatura em Matemática foi selecionada para participar do estudo, uma das coordenadoras do projeto que iria ministrar aulas sobre Cálculo Diferencial e Integral II, juntamente com uma monitora prepararam todo o estudo. Os alunos foram apresentados a temática, ou seja, a introdução as funções de duas variáveis, em seguida foi mostrada a visualização de algumas dessas funções acompanhadas pelas curvas de níveis geradas por cortes horizontais no gráfico. Como pode ser observado nas figuras 1 e 2.

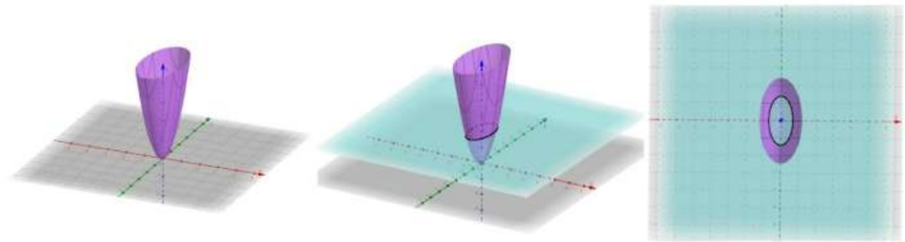


Fig. 148: Autoria própria

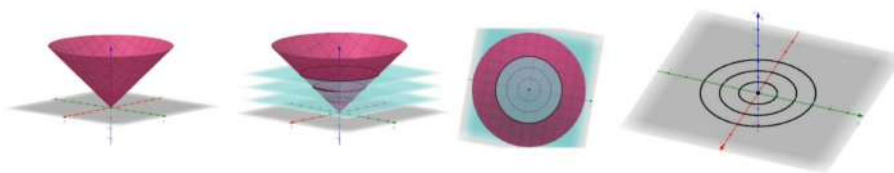


Fig. 149: Autoria própria

Introdução ao GeoGebra e Estudo das Curvas de Nível: Os alunos receberam treinamento básico sobre o uso do software GeoGebra e foram introduzidos aos conceitos necessários. Por meio de atividades práticas, eles exploraram o GeoGebra como meio para manipular e visualizar as superfícies geradas por essas curvas, compreendendo suas propriedades e comportamentos, foi possível identificar o posicionamento no plano cartesiano de cada curva e também a formação da curva degenerada.

Prática com a Construção de Vasos com Cordas de Sisal: Paralelamente ao estudo das curvas de nível no GeoGebra, os alunos foram motivados a aplicar esses conceitos na prática da construção de vasos com cordas de sisal. Guiados pelos professores, eles utilizam as técnicas aprendidas para criar vasos que representam visualmente as curvas de nível. Neste momento foi utilizados materiais acessíveis como: papelão para a produção de moldes, pistola e cola quente, tesoura e o barbante que representou as curvas.

Fig. 150: Autoria própria

Fig. 151: Autoria própria

CONCLUSÕES

Diante de diversos pontos que surgiram ao longo deste trabalho, fica evidente a necessidade de relacionar os conceitos de modo que se possa facilitar o entendimento da teoria apresentada. Sendo assim, obtemos resultados satisfatórios em relação a aplicação desta metodologia, uma vez que, foi possível tornar imagens que a princípio pareciam abstratas em algo tangível. Os discentes atendidos puderam identificar as características gráficas, como realizar de forma autônoma a manipulação do software apresentado.

BIBLIOGRAFIA

[1] PETTY, Ana Lúcia Sícoli e PASSOS, Norimar Christe. **Quatro cores - senha e dominó: oficinas de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.

[2] STEWART, James. **Cálculo**, 8ª volume 2. Cengage Learming São Paulo: 2016.

Classificação de sistemas lineares autônomos bidimensionais de equações diferenciais ordinárias

Pscheidt, Júlia[481]

Resumo: *Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes podem ser estudados a partir dos autovalores da matriz associada ao problema. Além disso, é sempre possível encontrar uma matriz conjugada a essa que esteja na forma canônica de Jordan. Assim, este trabalho objetivou classificar as soluções de sistemas bidimensionais desse tipo, a depender do tipo dos autovalores (reais ou complexos), da sua positividade, e da sua multiplicidade geométrica.*

Palavras-chave: *Sistemas lineares autônomos, teoria qualitativa de EDOs.*

INTRODUÇÃO

Um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes é do tipo

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{11}x_1(t) & + & a_{12}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}x_1(t) & + & a_{22}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2n}x_n(t) \\ & \vdots & & & & & & & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}x_1(t) & + & a_{n2}x_2(t) & + & \cdots & + & a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, e pode ser traduzido para a equação diferencial autônoma $x'(t) = Ax(t)$, em que $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

O Teorema da forma canônica de Jordan nos dá que toda matriz A é conjugada a uma outra matriz $J \in M_n(\mathbb{R})$ na forma canônica de Jordan, que é diagonal em blocos e tem seus autovalores na sua diagonal principal. Mais do que isso, obtemos que a mesma matriz que conjuga A e J transforma as soluções de $y' = Jy$ nas soluções de $x' = Ax$ [1]. Assim, basta que encontremos as soluções de $y' = Jy$, tarefa potencialmente mais simples, haja vista a estrutura da matriz J, para obtermos também as de $x' = Ax$.

Neste trabalho proponho descrever o comportamento assintótico de todas as EDOs lineares autônomas bidimensionais, utilizando a forma de Jordan. No pôster pretendo representar todos os possíveis retratos de fase, a menos de uma conjugação topológica. Este trabalho foi desenvolvido em uma iniciação científica supervisionada pelo Professor Dr. Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa como parte de uma das atividades desenvolvidas pelo PET Matemática da UFSC.

[481] Apoiada pelo PET Matemática UFSC. Bolsa FNDE.

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES AUTÔNOMOS BIDIMENSIONAIS

Estudaremos o comportamento das soluções da EDO $x' = Ax$ no caso em que $A \in M_2(\mathbb{R})$. Por ser linear, o único ponto de equilíbrio da EDO é o vetor nulo. Assim, estudaremos o comportamento assintótico de todas as soluções com dado inicial não nulo. Para isso utilizamos a forma de Jordan e os autovalores. Sendo λ_1 e λ_2 os autovalores não nulos da matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$, as classificações das soluções do sistema associado à matriz conjugada $J \in M_2(\mathbb{R})$ na forma de Jordan são:

λ_1 e λ_2 reais distintos

A matriz A será conjugada a $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. O sistema $y' = Jy$ tem solução geral da forma $y(t) = (c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Quando $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, ocorre o caso em que a origem será chamada de nó estável. Quando $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, ocorre o caso de um nó instável. Quando $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, ocorre o caso de um ponto de sela.

Ressalta-se que, quando $c_1 = 0$, a órbita das soluções tende a zero seguindo a direção do eixo y. Quando $c_2 = 0$, a órbita das soluções tende a zero seguindo a direção do eixo x [2].

λ_1 e λ_2 reais iguais

Seja $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2$. Se a multiplicidade geométrica de λ_0 for 2, então a matriz A será conjugada a $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. A solução geral de $y' = Jy$ é da forma $y(t) = (c_1 e^{\lambda_0 t}, c_2 e^{\lambda_0 t})$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Caso $\lambda_0 < 0$, a origem será um foco estável; e caso $\lambda_0 > 0$, a origem será um foco instável.

Agora, se a multiplicidade geométrica de λ_0 for 1, a matriz A será conjugada a $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. A solução geral de $y' = Jy$ é da forma $y(t) = (ae^{\lambda_0 t}, (at + b)e^{\lambda_0 t})$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

Caso $\lambda_0 < 0$, ocorre o caso em que a origem é um nó impróprio estável; e caso $\lambda_0 > 0$, a origem é um nó impróprio instável.

Neste caso, as órbitas tendem a zero na direção do eixo y [2].

λ_1 e λ_2 complexos conjugados

Sejam $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$, com $b \neq 0$. Neste caso, a matriz A será conjugada a $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. A solução geral de $y' = Jy$ é da forma $y(t) = re^{at}(cos(bt + \theta), -sen(bt + \theta))$, com $r, \theta \in \mathbb{R}$.

Se $a = 0$, a origem será um centro; se $a < 0$, o caso é de uma espiral estável; e se $a > 0$, o caso é de uma espiral instável.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi descrito o comportamento assintótico das soluções de um sistema de equações diferenciais lineares autônomo bidimensional a partir da análise dos autovalores da matriz associada. Este é um primeiro passo no estudo do comportamento assintótico de EDOs. Por exemplo, este método pode ser utilizado para estudar equilíbrios de equações não lineares, uma vez que podemos sempre estudar o problema linearizado próximo ao equilíbrio.

BIBLIOGRAFIA

[1] DOERING, C.I; LOPES, A.O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

[2] RODRIGUES, H.M. **Equações Diferenciais Ordinárias**. São Carlos: ICMS USP, 2012.

Classificação das álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensão menor ou igual a 2

Barbosa, Juliana Medeiros[482] e Souza, Manuela da Silva [483]

Resumo: *As álgebras de Lie são essenciais em várias áreas da matemática e da física, permitindo, assim, várias generalizações ao longo dos anos. Dentre elas temos a chamada álgebra de Leibniz. A álgebra de Jordan, por sua vez, foi introduzida por Pascual Jordan como ferramenta para o estudo da mecânica quântica, e tem grande conexão com a classe das álgebras não associativas. Nesta apresentação, serão classificadas, a menos de isomorfismos, as álgebras de Lie, Leibniz e Jordan de dimensões um e dois sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *qualquer, em particular, se tratando da álgebra de Jordan, sobre um corpo de característica diferente de 2. Esse trabalho faz parte do projeto de iniciação científica realizado sob orientação da professora Dra. Manuela da Silva Souza, onde as álgebras de Lie e Leibniz forma estudadas com base em [1], e com base em [2] para o estudo das álgebras de Jordan.*

Palavras-chave: *Classificações, álgebra de Lie, álgebra de Jordan, álgebra de Leibniz.*

INTRODUÇÃO

O aparato básico da teoria de Lie são as álgebras de Lie. Essa teoria começou por volta de 1870 com uma ideia aparentemente simples de abordar as equações diferenciais da mesma maneira que Galois fez com as equações algébricas. O método, desenvolvido por Sophus Lie e Felix Klein, consistia em estudar equações diferenciais por meio de seus grupos de simetrias. Este método destacou os grupos contínuos de transformações para os quais foi desenvolvida ao longo dos anos uma teoria abrangente que teve impacto em várias áreas da matemática e suas aplicações. Dada a sua importância as álgebras de Lie admitiram diversas generalizações ao longo dos anos, como por exemplo a álgebra de Leibniz. A álgebra de Jordan, por sua vez, foi introduzida por Pascual Jordan como ferramenta para o estudo da mecânica quântica, e tem grande conexão com a classe das álgebras não associativas. Dentro desta teoria, é fundamental concentrarmo-nos na classificação destas classes de álgebras, a menos dos isomorfismos, para obtermos um conhecimento mais profundo sobre elas. No entanto, à medida que a dimensão da álgebra aumenta, o problema se torna muito mais complexo. Neste trabalho queremos estudar e classificá-las a menos de isomorfismos

[482] Universidade Federal da Bahia(UFBA)
[483] Universidade Federal da Bahia(UFBA), orientadora

RESULTADOS

Dentro da teoria álgebrica, é extremamente importante entendermos como se comportam determinadas classes de álgebras, para isso buscamos classificá-las, a menos de isomorfismo. Visto que essa classificação se torna mais díficil a medida que aumentamos a dimensão, iremos nos ater a dimensões baixas. Definimos a álgebra de Lie $\mathcal{L}$ como sendo uma álgebra que satisfaz as propriedades de anticomutatividade e a propriedade em que $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$, a chamada identidade de Jacobi. E veremos que as álgebras de Lie unidimensionais são isomorfas a trivial e as de dimensão 2, não trivias, são isomorfas àquela onde o produto na base é do tipo $e_1e_2 = e_2$.

As álgebras de Leibniz podem ser vistas como uma generalização da álgebra de Lie e a definimos como sendo uma álgebra L, tal que satisfaz a propriedade $(xy)z = (xz)y+x(yz), \forall x, y, z \in L$ chamada de identidade de Leibniz. E veremos que quando têm dimensão um, essas são isomorfas as álgebras de Lie de mesma dimensão. No caso da dimensão dois temos que as álgebras de Leibniz não triviais ou são isomorfas a álgebra de Lie bidimensional ou são do tipo $A_3 = span\{x, y\}$ com produto na base dado por $xx = y$ ou $A_4 = span\{x, y\}$ onde $xx = y, yx = y$, a menos de isomorfismos.

Por fim, iremos definir a álgebra de Jordan como sendo uma álgebra comutativa que satisfaz a propriedade de $(xy)x^2 = x(yx^2)$. Para classificar a álgebra de Jordan bidimensional pedimos que o corpo $\mathbb{K}$ tenha característica diferente de 2. Daí, se a álgebra não é a trivial então, se ela é gerada por e_1 e por e_2, tem como produto na base, a menos de isomorfismos, um dos seguintes **(i)** $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_1e_2 = 0$, ou **(ii)** $e_1^2 = e_2$ e $e_2^2 = e_2 = e_1e_2$, ou **(iii)** $e_2^2 = \lambda e_1$ e $e_1e_2 = e_2$ ou **(iv)** $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = 0$ e $e_2e_1 = \frac{1}{2}e_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE MELO JÚNIOR, A. F. Identidades polinomiais para as álgebras de Leibniz de dimensão menor ou igual a 3. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, UFBA, Salvador, 2017.

[2] DINIZ, D., GONÇALVES, D. J., DA SILVA, V. R. T., SOUZA, M. Two-dimensional Jordan algebras: Their classification and polynomial identities. Linear Algebra and its Applications, 664, 104-125, 2023.

Superfícies imersas no grupo de Heisenberg

Superfícies Mínimas de Translação em H_3

Silva, Karolline Vitória[484] e Padilha, Inês[485]

Resumo: *As geometrias não euclidianas são pouco estudadas nos cursos de graduação, mas seu conhecimento é essencial, pois existem atualmente várias linhas de pesquisa em Geometria que utilizam resultados relevantes desta teoria. Neste sentido, buscamos estudar o grupo de Heisenberg, bem como sua geometria e algumas destas propriedades considerando superfícies imersas no grupo de Heisenberg* (H_3)*. Também analisamos alguns tipos de superfícies mínimas de translação considerando inicialmente as curvas em planos ortogonais e posteriormente em planos não ortogonais. Tomamos como referência os trabalhos apresentados por Rafael López [4] que tem por título "Minimal translation surfaces in the Heisenberg group* Nil_3 *e os artigos "Some translation surfaces in the* $3-$*dimensional Heisenberg group"[3] e "The Gauss map of minimal graphs in the Heisenberg group"[7]. Para o desenvolvimento dos resultados utilizamos técnicas conhecidas da teoria de Geometria Riemanniana e Equações Diferenciais.*

Palavras-chave: *Grupo de Heisenberg, aplicação de Gauss, superfícies mínimas de translação.*

INTRODUÇÃO

As superfícies mínimas representam um tema de pesquisa bastante relevante em Geometria Diferencial. Vale ressaltar que dependendo do ambiente em que tais superfícies se encontram, classificar as mínimas não é uma tarefa trivial. Este tema teve como precursor o matemático Italiano Lagrange que em 1760, apresentou os planos como exemplo de superfícies mínimas. Dezesseis anos depois, em 1776, o matemático Meusnier apresentou as curvaturas principais, ampliando o conhecimento de curvatura média igual a zero e permitindo novos exemplos de superfícies com essa característica.

Neste contexto, a aplicação normal de Gauss apresentada por Carl Friedrich Gauss surgiu como uma ferramenta importante para obtenção de tais propriedades. Tal aplicação foi estudada por outros matemáticos, como por exemplo, em 1995, Xiabo Liu [6], em 2007, Isabel Fernández e Pablo Mira [3] e em 2010, Benoît Daniel [1].

Já as superfícies de translação tiveram origem nos textos clássicos de Darboux[2], onde estão chamadas "surfaces définies pour des propertiétés cinématiques". São nomeadas desta forma pelo fato de que podem ser obtidas pela translação de uma curva γ_1 ao longo de uma curva γ_2 (ou vice-versa). Uma pergunta natural que pode surgir é o que acontece quando modificamos o espaço ambiente em que estas curvas estão inseridas, como é sua classificação e cálculo da curvatura média. E é nesse sentido que este trabalho visa abordar.

[484] UFAM. Este autor foi apoiado por CNPq durante o PICME.
[485] UFAM. Professora Associada do Departamento de Matemática.

Para a elaboração desta pesquisa foi necessário estudar o grupo de Heisenberg, a construção de sua operação, bem como o estudo do referencial com campos invariantes à esquerda, além da curvatura de H_3, verificar resultados relevantes que envolvem curvatura seccional neste ambiente, a aplicação de Gauss para superfícies em H_3, resultados referentes à classificação de superfícies (vertical, gráfico de uma função, plano vertical e umbílica), e por fim, apresentar alguns exemplos de superfícies mínimas de translação observando o que modifica de acordo com a parametrização obtida.

Superfícies Mínimas de translação em H_3

Exibiremos alguns tipos de superfícies mínimas de translação no grupo de Heinserberg. A parametrização destas superfícies são encontradas quando é realizada a operação em H_3 entres duas curvas dadas. A ordem em que é feita esta operação muda a parametrização final da superfície, isto porque a operação do grupo H_3 é não comutativa. Destacamos dois teoremas a seguir, posteriormente o caso. No primeiro caso, consideramos que as curvas estão em planos ortogonais. Posteriormente o caso em que as curvas estão em planos não ortogonais.

Teorema 9.30 *Superfícies mínimas de translação do tipo 1 no grupo de Heisenberg H_3 são parametrizadas por*

$$X(x,y) = (x,0,u(x)) * (0,y,v(y)) = \Big(x, y, u(x) + v(y) + \frac{xy}{2}\Big), \tag{104}$$

onde $u(x) = ax + u_0, a, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v(y)$ é dado por

$$v(y) = c\Big[(a+y)\sqrt{1+(a+y)^2} + ln(a+y+\sqrt{1+(a+y)^2}\Big] + v_0,$$

onde $c, v_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 9.31 *Uma superfície de translação do tipo 1 no espaço tridimensional de Heisenberg H_3 é uma superfície mínima não trivial se e somente se a superfície pode ser parametrizada por*

$$X(x,y) = \Big(x + ysen\theta, ycos\theta, f(x) + g(y) + \frac{xycos\theta}{2}\Big),$$

onde $f(x) = ax + b, (a, b \in \mathbb{R}$ e $g(y)$ é dada por

$$g(y) = \frac{c_1}{cos\theta}\Big[(a+tcos\theta)\sqrt{1+(a+tcos\theta)^2} + ln(a+tcos\theta+\sqrt{1+(a+tcos\theta)^2}\Big] + sen\theta\Big(at + \frac{1}{2}cos\theta^2 + c_2\Big).$$

CONCLUSÕES

Concluímos que através desta pesquisa, foi possível analisar resultados importantes de superfícies de translação em H_3. E estudamos a aplicação de Gauss de uma superfície imersa neste conjunto e apresentamos o estudo de alguns tipos de superfícies mínimas de translação em H_3. Para isso, consideramos inicialmente o caso em que as curvas estavam contidas em planos ortogonais, realizando a operação definida em H_3 de modo a obter a parametrização da superfície e em seguida verificamos o que ocorria quando os planos nos quais as curvas estavam contidas não eram ortogonais. Encontramos explicitamente nas duas situações as funções provenientes da definição das curvas consideradas.

Desse modo, os estudos realizados neste trabalho reafirmam a importância e relevância deste tema em geometria e enfatiza o incentivo a outros estudantes a ingressarem em pesquisas desse tipo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BENOÎT, Daniel. *The Gauss map of minimal surfaces in the Heisenberg group.* Math. Res. Not. IMRN, (3):674–695, 2011.

[2] DARBOUX, J.G.. *Théorie Génerale des Surfaces.* Livre I. Gauthier-Villars, Paris (1914).

[3] FERNANDÉZ, Izabel. MIRA, Pablo.. *Harmonic maps and constant mean curvature surfaces in* $H^2 \times \mathbb{R}$. Amer. J. Math., 129(4): 1145-1181,2007.

[4] LÓPEZ, Rafael, INOGUCHI, Jun-Ich, MUNTEANU, Marian Ioan José Edson. *Minimal translation surfaces in the heisenberg group* nil_3. arXiv: 1109.1628v1. (Geometriae Dedicata). Disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.1628

[5] FIGUEROA, Christian. *The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group*. Journal of Geometry and Symmetry in Physics: June 2011.

[6] LIU, X.*Rigidity of the Gauss map in compact Lie group, Duke Math.* J., 77 (1995), no. 2, 447-480.

[7] YOON, Dae Won, LEE, Chul Woo, KARACAN, Murat Kemal. *Somo translation surfaces in the 3-dimensional heisenberg group*. Bull. Korean Math. Soc. 50 (2013), No. 4, pp. 1329–1343. Disponível em: http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2013.50.4.1329

Jogo unxantathu

Artefatos arqueológicos africanos no ensino da Matemática

Santana, Kayodê Marley[486]; Teles, Deise[487]; Silva, Lucas[488] e Rocha, Enzo[489]

Resumo: *Neste pôster vamos apresentar o Jogo Unxantathu, elaborado com base na ocre de blombos, trata-se de um jogo de trilha, que foi pensado e desenvolvido como parte de uma atividade da disciplina Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática, realizada em 2023.1, no curso de Licenciatura em Matemática da UFBA. Em nossa atividade criamos e aplicamos o Jogo Unxantathu, no qual trabalhamos na fixação de conteúdos do ensino médio e fundamental e também apresentamos elementos culturais africanos diretamente relacionados com a matemática, abordando aspectos históricos e atuais do continente africano tendo como foco a ocre de blombos. Aplicamos esta oficina em uma escola pública da cidade de Camaçari. Aqui vamos descrever os passos para a construção e aplicação do jogo e alguns problemas que podemos tratar no contexto dela.*

Palavras-chave: *Unxantathu, ocre de blombos, fixação de conteúdos, cultura africana.*

INTRODUÇÃO

A Lei 9394, conhecida por estabelecer as Diretrizes e Bases da Educação Nacional, foi publicada em 1996 e, em sua versão original, pouco abordava sobre a questão étnico-racial. Contudo, em 2003, após muitos anos de luta dos movimentos sociais, foi aprovada a Lei 10.639/03 que estabeleceu a obrigatoriedade da inclusão da história e cultura afro-brasileira no currículo das escolas brasileiras. Diante disto, é de grande importância a aplicação efetiva desta lei e como deve estar presente em todas as disciplinas do currículo, na matemática não poderia ser diferente, por isso a importância do estudo de elementos culturais e jogos africanos no ensino da matemática.

Na UFBA há uma categoria de disciplina de extensão, as *Ações Curriculares em Comunidade e Sociedade*, conhecidas pela sigla ACCS. Em 2023.2 a prof.a Simone Maria de Moraes ministrou a disciplina *Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática*, uma ACCS, que foi aporte para a idealização e criação de oficinas com foco em elementos culturais africanos para o ensino da matemática, bem como a criação de jogos com foco em matemática para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, a fim de proporcionar uma abordagem lúdica da matemática e da cultura africana e afro-brasileira.

Nela realizamos o estudo de artefatos arqueologicos africanos que tem relação direta com a matemática, com base nesses estudos, criamos e depois aplicamos o jogo unxantathu com o objetivo de divulgar de uma maneira ludica as informações sobre a relação entre africa antiga e matemática e realizar uma fixação dos conteudos.

[486]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.
[487]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.
[488]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.
[489]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.

Ocre de blombos e os artefatos arqueologicos

O ocre de blombos é o mais antigo artefato arqueologico com relação direta com a matemática, tem idade estimada em 70 mil anos e foi encontrada na caverna de blombos, um sítio arqueologico localiado na africa do sul, foi encontrado em uma escavação liderada pelo arqueólogo Christopher Hnshilwood.

Fig. 152: a foto mostra uma imagem do ocre de blombos, na imagem se pode ver os padrões geometricos cravados no ocre

O ocre de blombos tem cravado em sua superfície padrões geométricos e é considerado pelos arquéologos o registro mais antigo de padrões matemáticos, abstrações e arte da humanidade.

Jogo Unxantathu

Unxantathu é um jogo de trilha que pode ser jogado por quatro alunos(ou grupos), enquanto percorrem o mapa os jogadores interagem com o tabuleiro tendo que resolver, ao depender da casa na qual caírem, desafios matemáticos(Ikhono Lezibalo em zulu), desafios historicos(Ikhono Lendaba em zulu) sobre a cultura africana ou sofrerem as consequências de cartas de sorte ou azar(hlula noma wina em zulu), ao completar esses desafios o jogador ganha ocres.

Fig. 153: Tabuleiro do jogo Unxantathu

Fonte: criação dos autores

Quando um jogador chega ao final do tabuleiro(casa com o nome de ocre de blombos) ele se sagra campeão da rodada e o jogo se recomeça, ao fim de todas as rodadas se conta o numero de ocres obtidos por cada jogador ao longo do jogo, o grande vencedor sera aquele com mais ocres. O nome Unxantathu quer dizer triângulo em zulu.

Exemplos de cartas de interação e o verso das cartas

CONCLUSÃO

O jogo conseguiu alcançar os objetivos de expor aos alunos informações sobre as relações entre africa antiga e matemática além de conseguir manter os alunos entretidos e focados na fixação de conteúdos e conseguiram resolver problemas que no modelo tradicional não conseguiam resolver, a criação de um jogo trás muitos desafios porém é um recurso que quando utilizado com sabedoria tem um grande valor didático pois consegue transformar um assunto pouco interessante para o aluno em um assunto muito interessante.

BIBLIOGRAFIA

[1] Almeida, M. C.; **A mais antiga manifestação de Atividade Matemática.** Revista Educação em Movimento. Vol.IV, no 11. 2005.

[2] Valle, P. R. B. R.; MELO, W.; **Psicologia do número: Uma análise Junguiana do número e do processo de contagem.** Pesquisas e Práticas Psicossociais 14(4), São João del-Rei, outubro-dezembro de 2019.

Modelagem matemática e simulação de sistemas pneumáticos de um atuador com fole

Oliveira de Oliveira, Kelly[490]; da Silva Gonçalves, Manoelly Adriane[491] e Canosa Monteiro, Alice[492]

Resumo: *O estudo foca nos sistemas pneumáticos industriais, destacando sua eficiência e versatilidade. Utiliza o diagrama de blocos e simulação via Simulink/Matlab para modelar e analisar um problema específico na área. Essa abordagem oferece insights detalhados sobre o funcionamento do sistema, permitindo melhorias contínuas em sua operação.*

Palavras-chave: *Sistema pneumáticos, modelagem matemática, diagrama de blocos, simulação.*

INTRODUÇÃO

A pneumática é a ciência que utiliza o ar comprimido como fonte de energia para dispositivos que transformam essa energia em trabalho. Amplamente aplicada na indústria, é utilizada em sistemas industriais, frenagem de veículos e pulverização de fluidos, entre outros. Por exemplo, as válvulas direcionais pneumáticas são comuns na indústria petroquímica para extração de petróleo, proporcionando maior precisão e produtividade a um custo operacional menor (Ribeiro, 2014). Este estudo analisa os sistemas pneumáticos e sua aplicação na indústria, enfatizando seu papel crucial no desenvolvimento e aprimoramento dos processos industriais. Será realizado um modelo matemático de um problema pneumático, seguido pela análise dos resultados por meio de diagramas de blocos e simulação no software Simulink.

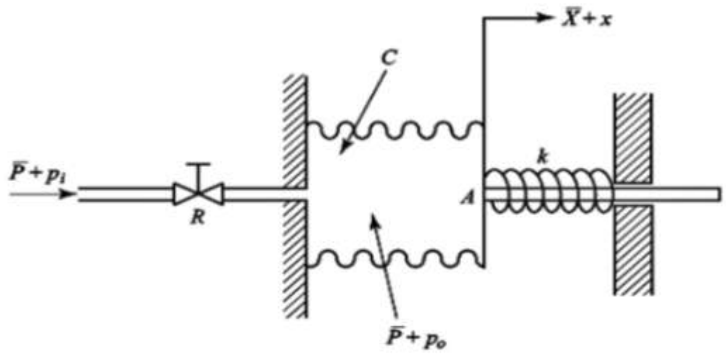
MODELAGEM MATEMÁTICA DO PROBLEMA

No sistema pneumático ilustrado abaixo supõe-se que os valores da pressão do ar e do deslocamento do fole em regime permanente sejam $\overline{P}$ e $\overline{X}$, respectivamente. Supõe-se também que a pressão de entrada seja alterada de $\overline{P}$ para $\overline{P} + p_i$, sendo p_i uma pequena variação na pressão de entrada. Essa variação causará uma alteração no deslocamento do fole em uma pequena quantidade x. Presumindo que a capacitância do fole seja C e que a resistência da válvula seja R, obteremos a função de transferência relacionando x e folepi.

[490] Discente do curso de Engenharia de Petróleo - Universidade Federal do Pará (Campus Salinópolis), kelly.oliveira@salinopolis.ufpa.br

[491] Discente do curso de Engenharia de Petróleo – Universidade Federal do Pará (Campus Salinópolis), manoellygoncalves@outlook.com

[492] Discente do curso de Engenharia de Petróleo – Universidade Federal do Pará (Campus Salinópolis), alicecanosa21@gmail.com



A resistência ao fluxo em regime permanente em uma restrição é dada pela razão entre a variação na diferença de pressão de gás e a variação no fluxo de gás dada pela equação (105).

$$R = \frac{d(\Delta P)}{dq} \tag{105}$$

A Capacitância é obtida pela razão entre a variação de gás armazenado (kg) e a variação na pressão do gás (N/m^2).

$$C = \frac{dm}{dp} \tag{106}$$

A capacitância mássica é dada pela equação:

$$C = \frac{dm}{dp_0}, \tag{107}$$

onde o índice "0" refere-se às condições no interior do fole. Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{dp}{dt}$, obtemos:

$$C\frac{dp_0}{dt} = \frac{dm}{dt} = q. \tag{108}$$

Substituindo a equação (107) na equação (108):

$$RC\frac{dp_0}{dt} + p_0 = p_i. \tag{109}$$

Aplicando transformada de Laplace na equação (109), mas como o fole se comporta como uma mola, temos

$$Ap_0 = kx. \tag{110}$$

Aplicando transformada de Laplace

$$X(S) = \frac{AP_0(S)}{K}. \tag{111}$$

Como queremos a função transferência da razão entre saída $X(S)$ e entrada $P_i(S)$, temos

$$F(S) = \frac{X(S)}{P_i(S)} = \frac{A}{K}\frac{\frac{AP_0(S)}{K}}{[RCS+1]P_0}.$$

Logo, a função transferência do sistema é:

$$\frac{A}{KRCS+1}. \tag{112}$$

SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO ATUADOR

A Figura abaixo mostra o diagrama de blocos utilizado para a simulação do modelo linear representado pelas equações:

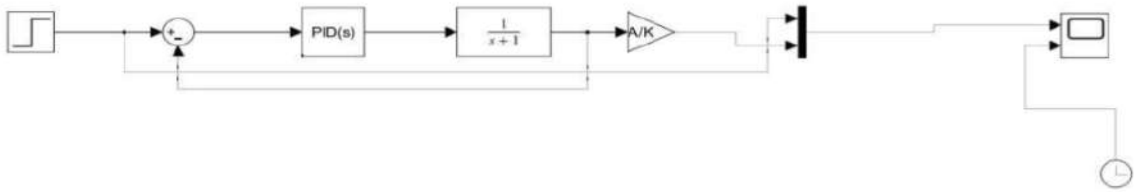
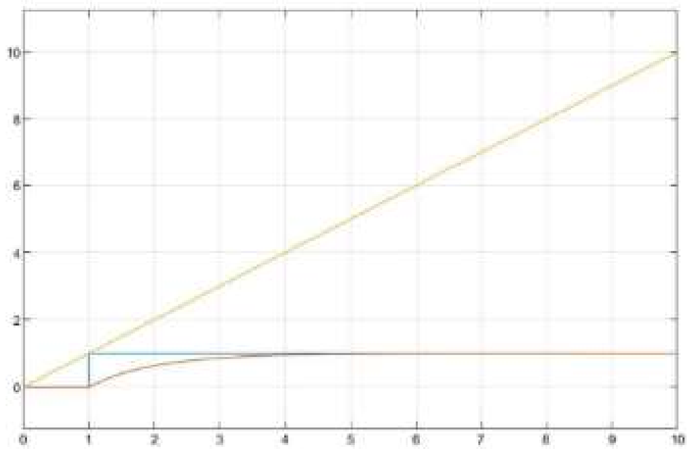


Diagrama de blocos usado na simulação do modelo

O sinal de entrada unitário equivale a uma pequena abertura da válvula e uma partida do atuador pneumático. Simulação com as seguintes variáveis $R = 1$, $C = 1$, $K = 1$, $A = 1$.



Posição e velocidade ao longo do tempo para entrada em degrau

CONCLUSÃO

Após a modelagem matemática do problema apresentado, notou-se que o diagrama de bloco do sistema estudado é do tipo de malha aberta. Isto atribui-se ao fato de que o exemplo abordado não considerou o erro, ou seja, os efeitos da perturbação. Logo, não há feedback automático para ajustar ou corrigir a saída com base na resposta do sistema. É válido salientar que as inclinações notadas nos gráficos plotados se estabilizam com o tempo, isto ocorre por que a análise feita se trata de uma configuração em malha aberta de um regime permanente.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ogata, K. W.; **Modern Control Engineering**. Hardcover: 912 pages 5th ed Prentice Hall, 2009.

[2] Ribeiro, K. M. M.; **Modelagem matemática de um sistema pneumático de posicionamento**. 2014. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação), Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2014.

Matemática e Psicologia: uma estranha relação de equivalência

Rocha, Kimberly da Silva[493] e Oliveira, Leandro Nery de[494]

Resumo: *As classes de equivalência desempenham um papel crucial na matemática, especialmente na teoria dos conjuntos, álgebra abstrata e análise. Fundamentadas em propriedades como reflexividade, simetria e transitividade, essas classes agrupam elementos de um conjunto com relações específicas, proporcionando uma compreensão aprofundada das propriedades subjacentes. A interseção intrigante surge ao comparar essas classes com a teoria de estímulos de Murray Sidman, renomado psicólogo comportamental. Este projeto explora essa conexão, examinando a presença de conceitos matemáticos na teoria de estímulos e suas implicações práticas, especialmente no contexto educacional e no tratamento de dificuldades de leitura e linguagem. A compreensão dessa interrelação pode enriquecer ambas as disciplinas, fornecendo percepções valiosos para a matemática e contribuindo para abordagens mais eficazes no campo educacional.*

Palavras-chave: *Classes de equivalência, relações de estímulos, psicologia comportamental, álgebra.*

INTRODUÇÃO

As classes de equivalência desempenham um papel fundamental na matemática, especialmente na teoria dos conjuntos, na álgebra abstrata e na análise. Elas são ferramentas poderosas para agrupar elementos de um conjunto que possuem uma relação específica entre si, permitindo-nos entender melhor as propriedades e as estruturas subjacentes. Uma classe de equivalência é um conjunto de elementos, os quais são considerados "parecidos" de acordo com uma relação predefinida. Essas relações são geralmente chamadas de reflexiva, simétrica e transitiva.

A primeira propriedade, a reflexividade, assegura que para qualquer elemento x pertencente a um conjunto, devemos ter xRx, o que indica que x é equivalente a si. A simetria é a segunda propriedade fundamental, se xRx, então yRx. A terceira propriedade, a transitividade, assegura que se dois elementos x e y estão relacionados, e y e z também estão relacionados, então x e z devem estar relacionados, ou seja, se xRy e yRz, então xRz. Na Figura 1, é ilustrado o funcionamento das classes de equivalência em um grafo, oferecendo uma compreensão visual desse conceito.

[493] Aluna de Graduação de Licenciatura em Matemática, Universidade de São Carlos
[494] Docente do Departamento de Matemática, Universidade de São Carlos

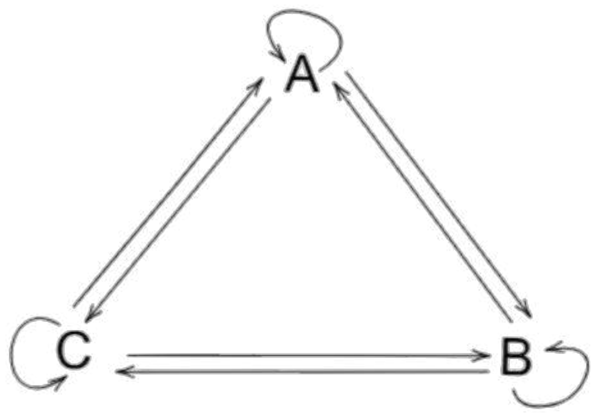


Fig. 154: Representação das Classes de Equivalência em um grafo

Ao examinarmos o grafo, apresentado anteriormente, detalhadamente, notamos uma correspondência com o diagrama de Murray Sidman de 1971 sobre Equivalências de Estímulos. Sidman, psicólogo comportamental, criou esse diagrama para mostrar como estímulos podem se interconectar e influenciar o comportamento. Da mesma forma, ao analisar o grafo na Figura 1, vemos padrões e associações semelhantes às estruturas de Equivalências de Estímulos na Figura 2. Essa comparação amplia nossa compreensão das conexões complexas no grafo e na teoria das relações de estímulos.

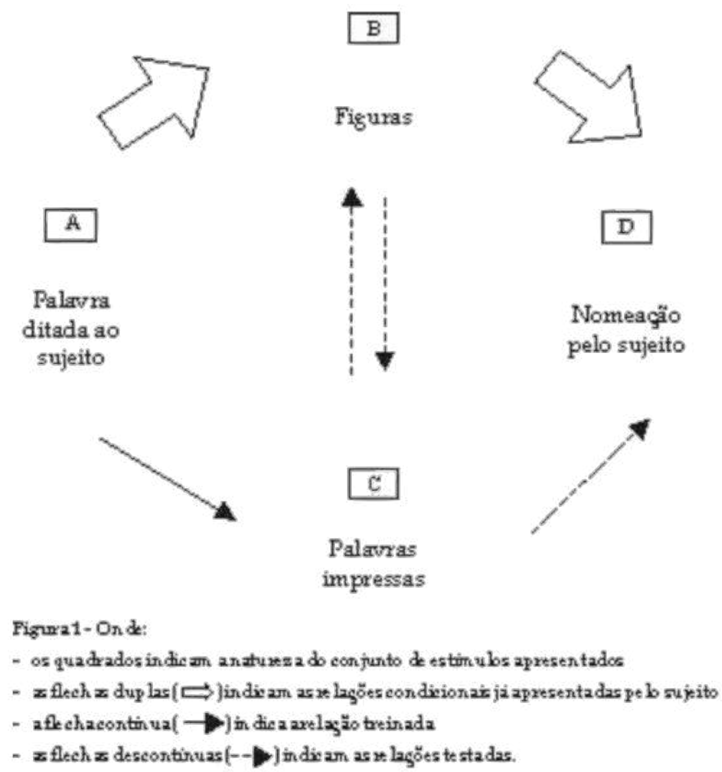


Fig. 155: Diagrama realizado por Murray Sidman em seus estudos

Em 1971, Murray Sidman publicou “Reading and Auditory-Visual Equivalences” no Journal of Speech and Hearing Research. Ele investigou como estímulos auditivos e visuais se relacionam, focando na equivalência entre eles, essencial para aprender a ler. Sidman mostrou que a leitura envolve formar associações entre palavras faladas e suas representações visuais, facilitando a comunicação. O estudo oferece visões valiosos para melhorar o ensino da leitura e habilidades de linguagem, especialmente para quem tem dificuldades nessa área.

CONCLUSÃO

Um resultado esperado dessa análise comparativa entre as Classes de Equivalência na matemática e as Equivalências de Estímulos na psicologia é identificar semelhanças e paralelos entre os dois conceitos. Ambos envolvem a ideia de agrupar elementos em classes com base em critérios específicos, apesar de serem abordados em campos distintos. Ao comparar os princípios matemáticos das Classes de Equivalência com as Equivalências de Estímulos na psicologia, podemos encontrar conexões, como a forma como indivíduos respondem de maneira similar a diferentes estímulos em psicologia, análoga às classes de equivalência em matemática. Essa identificação pode abrir caminho para novas aplicações da matemática na psicologia e para uma compreensão mais profunda dos processos mentais e comportamentais. A análise pode levar a uma compreensão mais abrangente da aprendizagem e da cognição humanas, permitindo o desenvolvimento de métodos mais precisos e eficazes de análise comportamental e terapêutica, contribuindo para avanços significativos no campo da psicologia. Portanto, o resultado esperado é uma apreciação mais ampla das interconexões entre esses campos, bem como possíveis direções futuras para pesquisa e colaboração, resultando em uma abordagem mais integrada e holística para a compreensão do comportamento humano.

BIBLIOGRAFIA

[1] DE ROSE, Julio C.; DE SOUZA, Deisy G.; HANNA, Elenice S. Teaching reading and spelling: Exclusion and stimulus equivalence. Journal of Applied Behavior Analysis, v. 29, n. 4, p. 451-469, 1996.

[2] GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[3] HYGINO, D.; GELSON, I. Álgebra moderna. São Paulo: editora atual, 2003.

[4] SIDMAN, Murray. Reading and auditory-visual equivalences. Journal of speech and Hearing Research, v. 14, n. 1, p. 5-13, 1971.

[5] SIDMAN, Murray. Equivalence relations and the reinforcement contingency. Journal of the Experimental Analysis of behavior, v. 74, n. 1, p. 127-146, 2000.

[6] SIDMAN, Murray; TAILBY, William. Conditional discrimination vs. matching to sample: An expansion of the testing paradigm. Journal of the Experimental Analysis of behavior, v. 37, n. 1, p. 5-22, 1982.

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

O desenvolvimento histórico das equações diofantinas

S. Pinheiro, Larissa[495]; Da. S. Lobato, Fabricio[496] e M. B. Valdivia, Tania[497]

Resumo: *O presente trabalho científico busca desenvolver uma pesquisa inicial para compreender o contexto histórico-social e os personagens que estudaram as equações diofantinas, sendo seu principal precursor Diofanto, que foi pioneiro em estudar essas equações em seu Livro Aritmetica, por isso atribuido o nome da equação a ele, mas vamos mostrar por meio de um estudo histórico que essas equações já eram estudadas muito antes de Diofanto por Brahmagupta, onde esses estudos influenciaram outros matemáticos que puderam desenvolver um campo da Matemática que é a Teoria dos Números.*

Palavras-chave: *Diofanto, equações diofantinas, história da matemática.*

INTRODUÇÃO

As equações diofantinas, ou equações com coeficientes inteiros, têm uma longa história na matemática, remontando aos tempos antigos e possuem seu nome inspirado no matemático Diofanto de Alexandria. Diante disso, as equações diofantinas são um estudo fundamental na matemática, em que se dedica à resolução de equações polinomiais com coeficientes inteiros e soluções também inteiras. Ao longo da história, esse estudo da matemática desempenhou um papel crucial no desenvolvimento da teoria dos números, sendo considerado um dos pilares fundamentais dessa teoria. Por isso, é inegável a importância da pesquisa sobre equações diofantinas.

Dessa forma, esta pesquisa tem como objetivo explorar o desenvolvimento histórico das equações diofantinas, destacando os estudos sobre aritmética de Diofanto, o qual influenciou outros matemáticos. Através da análise e contextualização das descobertas feitas ao longo dos séculos, esperamos oferecer uma visão abrangente e atualizada desse fascinante campo do conhecimento matemático.

METODOLOGIA

Para traçar o desenvolvimento histórico das equações diofantinas, analisamos obras clássicas e modernas sobre História da Matemática que tratavam da história da álgebra e dos números, buscando informações sobre o contexto social e histórico em que as equações diofantinas se desenvolveram. Para Severiano(2013) a pesquisa bibliográfica consiste em utilizar informações e conceitos já existentes em documentos impressos, como livros, artigos e teses, para embasar uma nova pesquisa. O pesquisador se baseia em registros previamente estudados por outros pesquisadores, transformando os textos em fontes para o desenvolvimento de seu próprio estudo. Dessa forma, ele utiliza as contribuições de autores para fundamentar sua pesquisa.

[495]Universidade Federal do Pará-UFPA
[496]Universidade Federal do Pará-UFPA
[497]Universidade Federal do Pará-UFPA

CONTEXTO SOCIAL E HISTÓRICO

O estudo das equações diofantinas tem suas raízes na antiguidade, com os gregos e hindus desenvolvendo métodos para resolver problemas de divisibilidade e congruência. De acordo com Struik (1992) a antiga álgebra dos babilônios e dos indianos sobreviveram ao brilho da civilização grega e obteve o aperfeiçoamento por alguns homens, o qual se destaca Diofanto, que pode ter sido um babilônio helenizado, sendo que seu livro foi um dos tratados mais fascinantes da antiguidade greco-romana.

De acordo com Rosa (2012) Diofanto teve um papel muito importante para o desenvolvimento da Matemática, pois ele inovou com as notações, trocando as palavras por símbolos, permitindo abreviações e facilitando os cálculos, sendo que, o seu Livro *Aritmética* é considerado o primeiro na utilização de símbolos para representar incógnitas e potências, e na resolução de equações indeterminadas, também conhecidas como equações diofantinas, que é um método para a solução de determinadas equações algébricas

Para Stewart(2014) as obras de Diofanto obtiveram uma certa influência para o desenvolvimento da Teoria dos Números, no qual Stewart(2014,p.121) explica que ele "estudou questões gerais em vez de questões numéricas específicas, embora suas respostas tenham sido números específicos" , sendo assim, vamos tratar um pouco mais dos problemas estudado por Diofanto a seguir.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

As equações diofantinas tem como pioneiro Diofanto de Alexandria, filósofo e matemático grego, o qual estima-se que seu nascimento se deu em 200 d.C., no Egito, em Alexandria e presume-se sua morte em 284 d.C.. Entretanto, segundo Dirk (1992), é incorreto afirmar que Diofanto é o matemático precursor das equações diofantinas, visto que a primeira solução geral da equação indeterminada do primeiro grau é encontrada por Brahmagupta (597 d.C – 668 d.C), porém, é indispensável mencionar que Diofanto de Alexandria desenvolveu resultados relevantes para soluções de equações em problemas matemáticos. Além disso, Diofanto foi considerado por alguns como pai da álgebra, em seus estudos se caracterizava em interessar-se por soluções racionais, sendo forte sua influência em outros matemáticos, a exemplo disso: Pierre Fermat, retomou os estudos realizados por Diofanto e obteve resultados consideráveis, procurando generalizar um problema visto na obra "*Arithmetica* de Diofanto", publicado em 1861, criando sua obra mais famosa "*último teorema de Fermat*" e buscou restringir suas soluções para os números inteiros.

A *Aritmética* de Diofanto é uma obra com 13 livros, dos quais 6 sobreviveram como cópias, em que se predomina um estudo dedicado a resoluções exatas de equações indeterminadas, essa obra foi caracterizada por demonstrar ser desvinculada aos métodos algébricos e dedicar-se a soluções exatas, por isso, suas considerações influenciaram fortemente para o desenvolvimento das equações diofantinas.

As obras de Diofanto de Alexandria abordavam uma metodologia própria acerca das soluções de equações determinadas. Além disso, conforme Boyer (1983), é possível considerar três estágios no desenvolvimento da álgebra, e segundo o autor, Diofanto se encaixava no segundo estágio, intermediário ou sincopado, enquanto matemáticos solucionavam equações por meio da escrita tradicional, Diofanto por ser iniciador em símbolos, desenvolvia essas soluções atribuindo símbolos algébricos. Essas notações são extremamente diferentes das atuais, a exemplo disso , o autor Stewart (2014, p 79), exibe um quadro de notações, em que por exemplo, ΔY era considerado símbolo de Diofanto para definir quadrado e atualmente define-se por x^2.

De acordo com Stewart(2014), Diofanto aprofundou seus saberes gerais em vez de ficar apenas em questões numéricas específicas, contribuindo com uma consequência do Teorema de Pitágoras. Em termos algébricos o teorema diz que, se um triângulo retângulo tem lados a, b e c, sendo c o lado maior, então $a^2 + b^2 = c^2$. Para o triângulo retângulo especial de lados 3, 4 e 5 temos $32 + 42 = 52$. Trincas pitagóricas como essa, foram encontradas por Diofanto. Para isso, ele pega qualquer par de números inteiros e com a a diferença entre seus quadrados, o dobro de seu produto e a soma de seus quadrados. Os três números resultantes sempre formam uma trinca pitagórica. Como a escolha do par de números foi arbitraria, Diofanto provou que existem infinitas trincas pitagóricas. A seguir vamos apresentar um problema encontrado na obra "Arithmetica" de Diofanto: **Problema 1, Livro VI:** Encontre um triângulo pitagórico em que a hipotenusa subtraída de cada um dos catetos é um cubo. (Resposta de Diofanto: 40, 96, 104).

Para as equações diofantinas, Diofanto sugere ser qualquer equação com uma ou mais incógnitas que assumem valores inteiros, sendo elas determinadas ou indeterminadas, especialmente o formato das equações diofantinas lineares da forma: $ax + by = c$, onde a, b e c são inteiros dados e x e y inteiros incógnitas. Com as generalizações de Diofanto, achar soluções para as equações diofantinas consiste em atribuir valores para as incógnitas, de modo que satisfaçam a igualdade, permitindo em muitos problemas esclarecer situações contextualizadas.

CONCLUSÕES

A Matemática que temos hoje, toda organizada e com os campos de estudo bem definidos, não se tratam de uma obra de um único homem, nasce de um longo processo histórico e com diversos personagens, que de alguma forma, para tentar estudar e resolver problemas do contexto social onde estavam inseridos, desenvolveram estudos em torno da Aritmética, no caso de Diofanto, que influenciaram outros estudiosos que puderam aprofundar os estudos realizados por Diofanto até chegar ao que temos hoje, que é a Teoria dos Números.

BIBLIOGRAFIA

[1] Boyer, C. B.; **História da matemática.** Tradução Elza F. Gomide. São Paulo. Editora: Edgard Blucher. Usp 1974.

[2] Eves, H.; **Introdução à História da Matemática.** Tradução por Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

[3] Rosa, C. A. de P.; **História da Ciência: da antiguidade ao renascimento científico.** 2. ed. Brasília: FUNAG, 2012.

[4] Severiano, A.J.; **Metodologia do Trabalho Cientifico.** 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

[5] Stewart, I.; **Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos.** Tradução por George Schlesinger.1ºed Rio de janeiro: Editora Zahar, 2014.

[6] Struik, D. J.; **História Concisa das Matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1992.

Análise qualitativa de uma equação diferencial linear com atraso discreto de primeira ordem

Lopéz, Julián[498]; Ospina, Laura[499] e Sanjuan, Arturo[500]

Resumo: *Neste trabalho, realizamos uma análise qualitativa da equação linear com atraso discreto dada por*

$$U'(s) = -\beta U(s-1).$$

Esta equação é uma normalização da equação logística linearizada em torno de seu ponto de equilíbrio estável.

Palavras-chave: *Análise qualitativa, equações diferenciais com atraso, teorema de Picard.*

INTRODUÇÃO

Usando o método apropriado, é simples ver que uma das soluções da equação diferencial

$$x'(t) = x(t) \tag{113}$$

é $x(t) = e^t$. Mais adiante, nos convencemos de que todas as suas soluções podem ser escritas na forma $x(t) = Ce^t$, onde C é uma constante arbitrária. Ao considerar $C \in \mathbb{C}$, fica evidente que esta fórmula abrange todas as possíveis soluções complexas da equação (113). Depois, tudo se resume a ‘ ‘ propor” uma solução na forma $x(t) = e^{\lambda t}$ e encontrar as raízes do *polinômio característico* associado à equação. Nosso exemplo é trivial, encontramos que o único valor para λ é 1. No entanto, a situação muda drasticamente se supormos que a equação tem um atraso $\tau > 0$, ou seja,

$$x'(t) = x(t-\tau)$$

De fato, agora ao substituir $x(t) = e^{\lambda t}$ na equação, resulta em

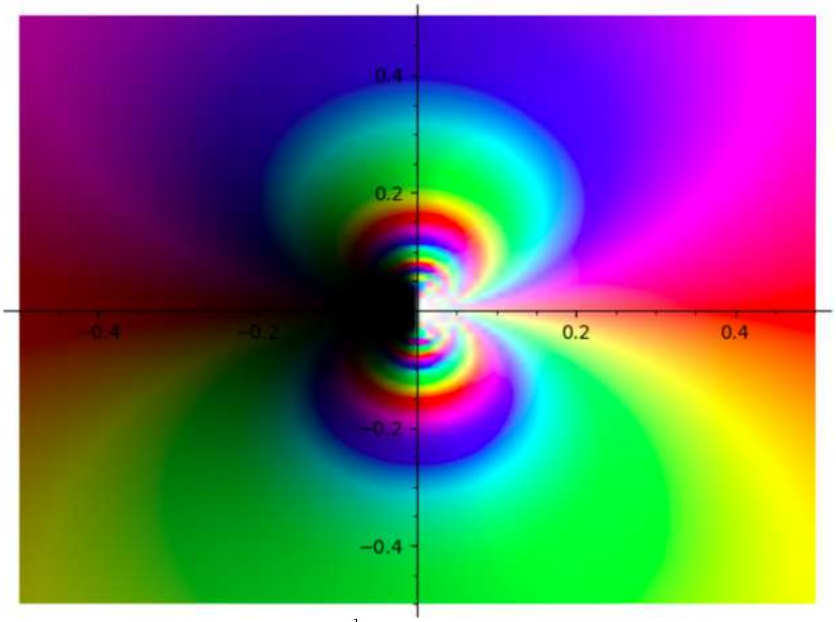
$$\lambda x(t) = x(t-\tau) = e^{\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau}x(t). \tag{114}$$

Consequentemente, λ deve ser uma solução da equação característica $P(\lambda) := \lambda - e^{-\lambda\tau}$, onde P se torna uma função transcendental. Dado que $\lambda = 0$ não é raíz, podemos substitutir $z = \frac{1}{\lambda}$ e assim

$$\frac{1}{z} + \beta e^{-\frac{1}{z}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ze^{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{\beta}$$

[498]Universida Distrital Francisco Jose de Caldas
[499]UNICAMP
[500]Universida Distrital Francisco Jose de Caldas

$g(z) = ze^{-\frac{1}{z}}$ tem uma singularidade essencial em $z = 0$ e não se anula em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, então pelo *teorema Grande de Picard* deduzimos que $g^{-1}(\frac{1}{\beta})$ tem infinitos elementos. Os zeros de P são isolados, o que implica que é possível formar uma sequência $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ onde $|\lambda_k| \to \infty$. Assim, obtemos um espaço de soluções infinitamente gerado!. São essas todas as soluções?... Esse é precisamente o sentido deste trabalho, introduzir um atraso discreto τ positivo na equação diferencial linear de primeira ordem, resultando em um espaço de soluções infinitamente gerado!.



Função $g(z) = ze^{-\frac{1}{z}}$ com singularidade em $z = 0$.

O objetivo é analisar o comportamento das soluções da equação diferencial com atraso

$$u'(t) = -\alpha u(t - \tau) \tag{115}$$

assumindo $\tau > 0$. Para o estudo, nos remetemos a reescalar convenientemente a equação para obter uma mais simples. Definimos $s := \frac{t}{\tau}$, $\beta = \alpha\tau$ e $U(s) := u(t)$ e dessa forma resulta

$$U'(s) = -\beta U(s - 1). \tag{116}$$

Podemos concluir então:

⇒ Existe $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $|\lambda_k| \to \infty$, com λ_k raiz de h.

⇒ Há infinitas soluções de (116) da forma $U(s) := e^{\lambda_k s}$.

Nossa análise se apoia nas seguintes evidências:

- λ é raiz de ordem n em P se e somente se $s^j e^{\lambda s}$ é solução da equação (116) para $j = 0, \dots, n-1$.
- λ é raiz de P se e somente se $\overline{\lambda}$ é raiz de P.
- P é analítica em $\mathbb{C}$, não constante, portanto, seus zeros são isolados. Mais ainda: *A quantidade de zeros em um conjunto da forma* $\{R(\lambda) \geq a\}$ *é finita para todo* $a \in \mathbb{R}$.
- As raízes de P não podem ser calculadas de forma explícita em geral. De fato, escrevendo

$$x = -\beta e^{-x} \cos y \qquad\qquad y = \beta e^{-x} sen\, y \tag{117}$$

CONCLUSÕES

Encontramos três pontos de bifurcação para β em 0, $1/e$ e $\pi/2$. Quando $\beta < 0$, as soluções são instáveis; para $\beta \in (0, 1/e)$, as soluções são estáveis; para $\beta \in (1/e, \pi/2)$ as soluções são estáveis e oscilatórias. Em $\beta = \pi/2$ há uma solução periódica e para $\beta > \pi/2$ as soluções são instáveis e oscilatórias.

BIBLIOGRAFIA

[1] Amster, P.; **Ecuaciones diferenciales con retardo**. Departamento de Matemática. Universidad de Buenos Aires, p. 10-22, 2017.

[2] Cooke, K., Bellman, R.; **Ecuaciones diferenciales con retardo**. International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, 45, 1-97 pp. 1963.

[3] Peréz, S., Bengochea, A.; **Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo**. Miscelanea Matemática, 67, 57-71 pp, 2018.

Repercussões sobre a desigualdade de Cauchy:

A Cristalografia e uma Interpretação Vetorial

Vergueiro, Laura Gois[501] e da Silva Junior, Carlos Alberto[502]

Resumo: *A Desigualdade de Cauchy é uma importante inequação, utilizada para validar diversas outras identidades matemáticas modernas. Dentre essas podemos destacar a Desigualdade de Harker-Kasper, que surge com o estudo da cristalografia e sua modelagem no Espaço Vetorial que admite Produto Interno. Nesse trabalho apresentamos a demonstração da Desigualdade de Harker-Kasper e no Produto interno de forma elegante a partir da de Cauchy em conjunto com conceitos da matemática elementar.*

Palavras-chave: *Desigualdade, Cauchy, desigualdade Schwarz, desigualdade Harker-Kasper, cristalografia, produto interno.*

INTRODUÇÃO

No século XVII, por conta dos desdobramentos do cálculo, houve o desenvolvimento de teorias e conjecturas sem preocupações categóricas com a formalização dos resultados. Porém, no século XIX, conhecido como "era do rigor" [1], o foco era o formalismo técnico, definindo de forma precisa os novos conceitos e aperfeiçoando os que apresentavam ambiguidade. O matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) viveu nesse período e ficou conhecido por aprimorar conceitos fundamentais da análise e do cálculo. Uma das descobertas de Cauchy é conhecida hoje como **Desigualdade de Cauchy** [2], dada por:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}$$

onde (a_n) e (b_n) são sequências de números reais. Essa desigualdade é extremamente versátil por ser aplicada em diversos ambientes como, por exemplo, convergência de séries, produto interno de vetores, médias, simetrias, entre outros.

Uma de suas consequências, conhecida por **Desigualdade de Harker-Kasper** [2], é ostentada na cristalografia, ciência que estuda a estrutura geométrica de cristais focada em sua simetria [3]. Após 1911, com a criação do raio-x, conseguiu-se determinar com precisão a localização dos átomos nos cristais, que proporcionou o desenvolvimento de normas sobre as distâncias e ângulos entre eles [4]. Com isso, estabeleceu-se uma relação entre os fatores de estrutura do espalhamento dos átomos a partir da Desigualdade de Cauchy.

[501] Universidade Federal de São João del-Rei - MG, Graduanda Bacharelado em Matemática, lauragoisvergueiro@aluno.ufsj.edu.br

[502] Universidade Federal de São João del-Rei - MG, Departamento de Matemática e Estatística, carlosdamat@ufsj.edu.br

Ademais, o matemático alemão Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) usou a desigualdade na resolução de problemas bidimensionais com integrais duplas [2] e desenvolveu uma demonstração descomplicada, visto que se baseava num simples polinômio de segundo grau, ainda que o mesmo lida-se com cálculo avançado. Essa método é uma das possibilidades para demonstração em um Espaço vetorial que admite produto interno, que é um ambiente valioso para desigualdade, por conta da notação condensada, que facilita a visualização.

Em ambos os exemplos apresentados nesse trabalho, a importância da Desigualdade de Cauchy é evidenciada e a demonstração de outros resultados matemáticos graciosos que se utilizam dela.

Correlações dos Cristais

A Desigualdade de Harker-Kasper que correlaciona a estrutura cristalina é dada por:

$$g^2(x) \leqslant \frac{1}{2}\left[1 + g(2x)\right],$$

onde $g(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k cos(\beta_k x)$ e $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. Para prová-la, partindo das relações trigonométricas básicas, temos:

$$\frac{1}{2}\left[1 + g(2x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_k cos(2\beta_k x)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_k [cos^2(\beta_k x) - sen^2(\beta_k x)]\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} p_k 2cos^2(\beta_k x)\right] = \frac{1}{2}\left[2\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right] = \sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)$$

Inserindo a série $\sum(p_n)$ e aplicando a desigualdade de Cauchy:

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right) \cdot 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k cos^2(\beta_k x)} \cdot \sqrt{p_k}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k^2 \cdot cos^2(\beta_k x)}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot cos(\beta_k x)\right)^2 = g^2(x)$$

Dessa maneira, provamos a validade da Desigualdade de Harker-Kasper de modo simples e elegante, usando somente relações trigonométricas e a Desigualdade de Cauchy.

Primor nos Vetores

Sejam $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ e $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ vetores de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Assim, a desigualdade de Cauchy pode ser enunciada com sofisticação e clareza, tal que:

$$\langle \mathbf{v},\mathbf{w} \rangle \leqslant \langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{w},\mathbf{w} \rangle^{\frac{1}{2}},$$

ou seja, o produto interno de dois vetores sempre será menor do que ou igual ao produto do módulo deles. Para a prova, tomamos o polinômio $p(t) = \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \rangle$, temos que

$$p(t) = \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \rangle = \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, t\mathbf{w} \rangle =$$

$$= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, t\mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, t\mathbf{w} \rangle + \langle t\mathbf{w}, t\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2t\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + t^2\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$$

e, por definição, o produto interno de dois vetores é sempre maior do que ou igual a zero, portanto $\triangle \leqslant 0$. Logo,

$$\triangle \leqslant 0 \Longrightarrow (2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle)^2 - 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \leqslant 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \leqslant 4\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \Longleftrightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \leqslant \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Alcançando a desigualdade de Cauchy, a partir do polinômio de Schwarz. Por fim, podemos ter um olhar mais aprimorado no caso de igualdade, onde

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle^{\frac{1}{2}} \Longleftrightarrow \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w} \rangle = 0,$$

ou seja, quando $\mathbf{v} + t\mathbf{w} = 0 \Longleftrightarrow t = -\dfrac{\mathbf{v}}{\mathbf{w}}$

CONCLUSÕES

As contribuições de Cauchy para a matemática não se limitam ao período em que viveu. Sua desigualdade, por exemplo, ocasiona diversas ramificações e aplicações, como na cristalografia por Harker e Kasper e na teoria de espeço vetorial, entre outras. Para mais, sua demonstração em teor técnico é simples o que é vantajoso por aumentar sua acessibilidade e ser de fácil entendimento. Diante disso, estudar a Desigualdade de Cauchy é relevante e significativo, isso porque está repleta de possibilidades para serem exploradas.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA S. C. **Aspectos da Historia da Analise de Cauchy a Lebesgue**. Cultura Academica UNESP, 1a.edição, 2014.

[2] STEELE J. M. **THE CAUCHY SCHWARZ MASTER CLASS - An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities**, 1a. edição, The Mathematical Association of America, 2004.

[3] MAFUD. A. C.; GAMBARDELLA M. T. P. **Estrutura Cristalina e Molecular de Derivados de Ditiocarbamatos**, Universidade de São Paulo, 2006.

[4] FRANCA E. F.; GUILARDI S. **Estudo Cristalográfico de compostos de Platina(II) e de Níquel (II) com Ditiocarbimato**, Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

A compactificação de Poincaré de sistemas polinomiais planares [503]

Bacelar, Leandro[504] e Oliveira, Regilene[505]

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo introduzir uma ferramenta importante da teoria qualitativa de equações diferenciais, especialmente no estudo global dos sistemas diferenciais polinomiais, a chamada Compactificação de Poincaré.*

Palavras-chave: *Sistemas diferenciais planares, compactificação de Poincaré, retratos de fase.*

INTRODUÇÃO

A Matemática desempenha um importante papel na ciência em geral, seja ela ciências físicas, biológicas, entre tantas outras, auxiliando descobertas inovadoras e no desenvolvimento de novas tecnologias. Um dos ramos da Matemática que evidencia este fato é o estudo de sistemas dinâmicos, particularmente dos sistemas diferenciais polinomiais, que é tema desse pôster. De forma geral, dado um sistema diferencial planar da forma

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y), \tag{118}$$

onde $P, Q\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, são funções polinomiais nas variáveis x e y, associamos o campo vetorial planar

$$X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}. \tag{119}$$

O estudo qualitativo de sistemas da forma (118) se resume a entender o comportamento local e/ou global das órbitas (soluções) desse sistema, sem necessariamente resolver explicitamente a EDO. Apesar de inúmeros esforços no estudo desta classe de sistemas, até os dias de hoje, diversas questões relacionadas ao tema continuam em aberto, como por exemplo: a segunda parte do 16^{th} problema de Hilbert, enunciado por Hilbert [4] no Congresso Internacional de Matemática em 1900, que propõe encontrar cota superior para o número de ciclos limites (órbitas periódicas isoladas) para esta classe em função do grau dos polinômios P e Q. Uma importante ferramenta na análise qualitativa desses sistemas é a chamada compactificação de Poincaré.

[503] Este trabalho tem o apoio pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, processo no.2023/07792-1.
[504] leandrobacelar@usp.br, ICMC-USP, São Carlos
[505] ICMC-USP, São Carlos

compatificação de poincaré

O sistema diferencial polinomial planar (118) está definido em todo o plano $\mathbb{R}^2$, e é interessante compreender o comportamento de suas órbitas ao longo do tempo, inclusive quando o tempo cresce muito, isto é, tendendo ao infinito. Para atingir este objetivo é preciso "estender analiticamente" o sistema para um conjunto fechado e limitado (a um compacto), este processo é o que chamamos de compactificação do $\mathbb{R}^2$ ao circulo unitário $S^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + y^2 = 1\}$, chamado Esfera de Poincaré. Como veremos a seguir, neste processo identificamos o Equador da esfera S^1 com o infinito do plano. O sistema obtido por esse processo é o que chamamos de compactificação de Poincaré do sistema (118). Neste caso os pontos singulares do sistema (118) chamamos de pontos singulares finitos e os pontos singulares no Equador da esfera S^1 são chamados de pontos singulares infinitos.

Vale observar que, diferentemente de outras compactificações do plano $\mathbb{R}^2$, como por exemplo, a projeção esteriográfica, ao invés de associar o "infinito" com um único ponto, associamos o infinito com uma circunferência $x^2 + y^2 = 1$, isso favorece a investigação sobre os pontos singulares infinitos.

Vejamos como construir a compactificação de Poincaré. Identificamos $\mathbb{R}^2$ como o plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 1\}$ e consideramos a esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, tangente ao plano $z = 1$ no ponto $(0, 0, 1)$.

Dessa forma, podemos projetar o campo vetorial X definido no plano na esfera S^2 pela projeção central, como descrevemos a seguir. Dado um ponto em $x = (x_1, x_2) \simeq (x_1, x_2, 1) \in \mathbb{R}^3$, consideramos a reta que passa por x e a origem de $\mathbb{R}^3$. A interseção desta reta com o esfera chamamos de projeção central de x em S^2. Note que temos um ponto no hemisfério norte de S^2 e outro no hemisfério sul. De forma mais precisa, consideramos a função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2$, dada por

$$f(x) = f(x_1, x_2, 1) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}} \right),$$

que associa cada ponto de $\mathbb{R}^2$, com um ponto do hemisfério norte da esfera S^2, como representado na Figura 156

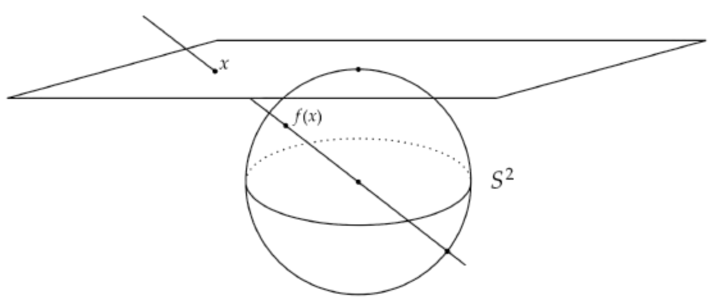


Fig. 156: Compactificação de $\mathbb{R}^2$ na esfera S^2.

Portanto o campo X induz um campo vetorial $\mathcal{X}$ em S^2, que é analiticamente conjugado a X, dado por $\mathcal{X}(y) = Df(x)X(x)$, em que $y = f(x)$. Segue desta construção que os pontos infinitos de $\mathbb{R}^2$ estão em correspondência biunívoca com os pontos do equador da esfera S^2. Como justificamos na próxima seção, o campo induzido $\mathcal{X}$ é analiticamente estendido a toda esfera pela multiplicação de $\mathcal{X}$ pelo fator x_3^{d-1}, onde d é o grau de (118). Denotamos por $\overline{X}$ o campo vetorial estendido, definido na esfera S^2, também conhecido como compactificação de Poincaré do sistema (118).

Cartas locais

Sendo a esfera S^2 uma superfície suave, podemos utilizar as cartas locais a ela associadas para obter a expressão analítica do campo compactificado. Considere as cartas locais definidas por

$$U_i = \{y \in S^2;\ y_i > 0\} \quad \text{e} \quad V_i = \{y \in S^2;\ y_i < 0\}$$

e as correspondentes aplicações $\phi_i\colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_i\colon V_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$, descritas por

$$\phi_i(y) = -\psi_i(y) = \left(\frac{y_m}{y_i}, \frac{y_n}{y_i}\right),$$

para $m < n$ e $m, n \neq i$, em que $i = 1, 2$ e 3.

Empregando as cartas locais e a multiplicação pelo fator adequado, obtemos as seguintes expressões para o campo compactificado do sistema (118) em cada carta local:

$$\dot{u} = v^d\left(-uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)\right), \qquad \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), \tag{120}$$

para a carta (U_1, ϕ_1);

$$\dot{u} = v^d\left(P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)\right), \qquad \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right), \tag{121}$$

para a carta (U_2, ϕ_2) e

$$\dot{u} = P(u, v), \qquad \dot{v} = Q(u, v). \tag{122}$$

para carta (U_3, ϕ_3), onde d é o grau do sistema (118). As expressões da compactificação de Poincaré nas cartas (V_i, ψ_i) são as mesmas para (U_i, ϕ_i) exceto pela multiplicadas pelo fator $(-1)^{d+1}$. Destaca-se o fato dos pontos singulares infinitos (no Equador da esfera), em qualquer carta local, possuírem a coordenada v igual a zero.

Este poster ira introduzir o conceito de compactificação de Poincaré, além de dar exemplos de sua aplicação em sistemas diferenciais planares, obtendo seu retratos de fase no disco de Poincaré, investigando suas consequências.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brandon, J. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, by s wiggins. pp 672. dm98. 00. 1990. isbn 3-540-9703-7 (springer). *The Mathematical Gazette 75,* 472 (1991), 255–255.

[2] Dulac, H. *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre.* Gauthier-Villars, 1908.

[3] Dumortier, F., Llibre, J., and Artés, J. C. *Qualitative theory of planar differential systems,* vol. 2. Springer, 2006.

[4] Hilbert, D. *Mathematical problems. Bulletin of the American Mathematical Society 37,* 4 (2000), 407–436.

[5] Poincaré, H. Mémorie sur les courbes définies par les équations differentialles i–vi, oeuvre i. gauthier-villar, paris, 1880–1890. *French. Zbl JFM 16,* 01.

Algoritmo genético na minimização da função de Rosenbrock

Garcia, Letícia Caroline[506] e Borges da Silva, Fabiano

Resumo: *Inspirados no princípio darwiniano da evolução das espécies e na genética, os Algoritmos Genéticos são procedimentos probabilísticos que oferecem um mecanismo de busca adaptativo, fundamentado na seleção natural dos mais adaptados e na reprodução. A função de Rosenbrock é utilizada como uma métrica robusta para avaliar o desempenho de algoritmos de otimização. Neste trabalho se concentra na aplicação de um Algoritmo Genético para a resolução de um problema de otimização não linear, cuja função objetivo é a de Rosenbrock. Para obter os resultados numéricos, o algoritmo foi implementado em Python.*

Palavras-chave: *Algoritmo genético,função de Rosenbrock, otimização*

INTRODUÇÃO

Os problemas de otimização são onipresentes em diversos setores da vida real, como logística, finanças, engenharia, ciência de dados, aprendizado de máquina, entre outros. A eficiente resolução desses problemas é crucial para aprimorar a tomada de decisões e aperfeiçoar processos em várias áreas. Diversas técnicas são empregadas para abordar problemas de otimização, incluindo Algoritmos Genéticos, Algoritmos Evolutivos, Programação Linear e Programação Dinâmica.

O Algoritmo Genético convencional (AG) é uma técnica de otimização bioinspirada que, segundo PACHECO (1999), é inspirada no princípio darwiniano de seleção natural e reprodução genética, onde os indivíduos mais aptos ao meio tendem a sobreviver e passar suas características adiante. No AG, cada indivíduo da população representa uma solução candidata para o problema de otimização a ser resolvido e a ideia é criar gerações de indivíduos, de tal forma que o mais apto (melhor solução) sobreviva.

A função de Rosenbrock é amplamente reconhecida e empregada como uma métrica fundamental para avaliar o desempenho de algoritmos de otimização, dada a sua complexidade e a sua característica multimodal, dificultando sua resolução.

Este trabalho se concentra na aplicação do AG para a resolução de um problema de otimização não linear, cuja função objetivo é a função de Rosenbrock. Inicialmente estudou-se as características do AG e sua abordagem na otimização dessa função. O algoritmo foi implementado em Python e os resultados obtidos são apresentados mais adiante.

Como o comportamento do melhor indivíduo de cada população pode ser interpretado como um processo estocástico discreto, esta teoria pode proporcionar uma análise mais aprofundada do comportamento do

[506]UNESP

algoritmo e sua trajetória de convergência em direção à solução ótima do problema. A compreensão dessa dinâmica pode possibilitar extrair insights cruciais para o aprimoramento da eficiência e eficácia do Algoritmo Genético convencional na resolução da função de Rosenbrock. Assim, este trabalho trata de um estudo inicial que, em etapas posteriores, ainda ganhará uma abordagem dentro de sistemas dinâmicos estocásticos.

Desenvolvimento:

O fluxograma do AG é mostrado na Figura 1 e seus operadores são detalhados a seguir:

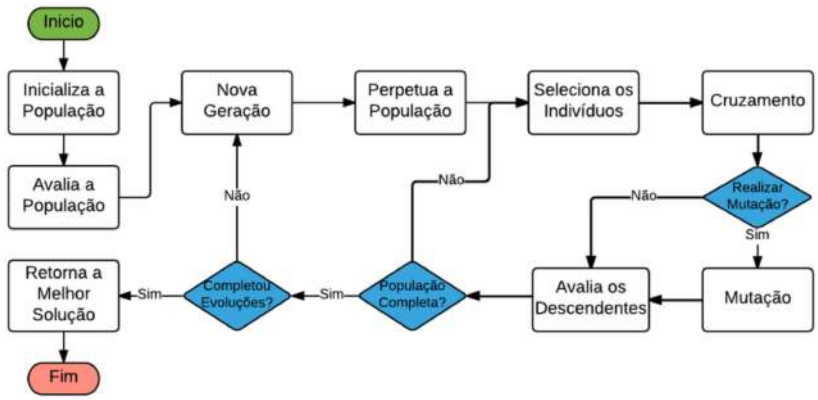


Fig. 157: Fluxograma do Algoritmo Genético Implementado por [2]

O processo de evolução começa com a criação aleatória de indivíduos que formarão a população inicial. Em seguida, todos os indivíduos da população são avaliados através da função fitness (mede a aptidão), capaz de representar os requisitos necessários a que uma população deve se adaptar a fim de avançar para a próxima geração. No caso da função de Rosenbrock, como é um problema de minimização, a fitness será inversamente proporcional à função objetivo. A partir de um processo com base na aptidão de cada indivíduo, são escolhidos indivíduos pais que sofrerão um cruzamento (crossover) e que gerarão os indivíduos filhos. Uma vez criados os filhos, cada um deles pode sofrer uma mutação, um operador genético que soma um valor aleatório em cada uma das entradas. A taxa de mutação garante a diversidade das características dos indivíduos da população e permite que sejam introduzidas informações que não estavam presentes em nenhum dos indivíduos. Deste modo, a aptidão do indivíduo determina seu grau de sobrevivência. O critério de parada pode ser o número de iterações, a ausência de melhora nas gerações ou algum outro critério escolhido. No final do processo, o melhor indivíduo é retornado como melhor solução encontrada para o problema:

$$f(x, y) = (a - x)^2 + b(y - x^2)^2$$

A função acima é a de Rosenbrock, cuja função é bastante utilizada como um problema teste de desempenho para algoritmos de otimização. Neste trabalho iremos restringir em um caso particular com duas variáveis.

Nos testes numéricos foram utilizados os parâmetros $a = 1$, $b = 100$, os limites das variáveis são $x_{min} = -10$, $x_{max} = 10$, $y_{min} = -10$, $y_{max} = 10$ e taxa de mutação de 10%. Para essas entradas, o mínimo global é $f(1, 1) = 0$. O tamanho da população é de 100 indivíduos e o número de gerações (interações) foi de 500.

A melhor solução obtida pelo AG foi o ponto $(0.5578930498097652, 0.6899432453487506)$, com valor igual a 14.536720786647244 e tempo de execução igual a 3.8823654651641846 segundos. A Figura 2, mostra a trajetória do melhor indivíduo de cada geração, sendo o ponto inicial indicado pela cor verde e o ponto final, pela cor vermelha.

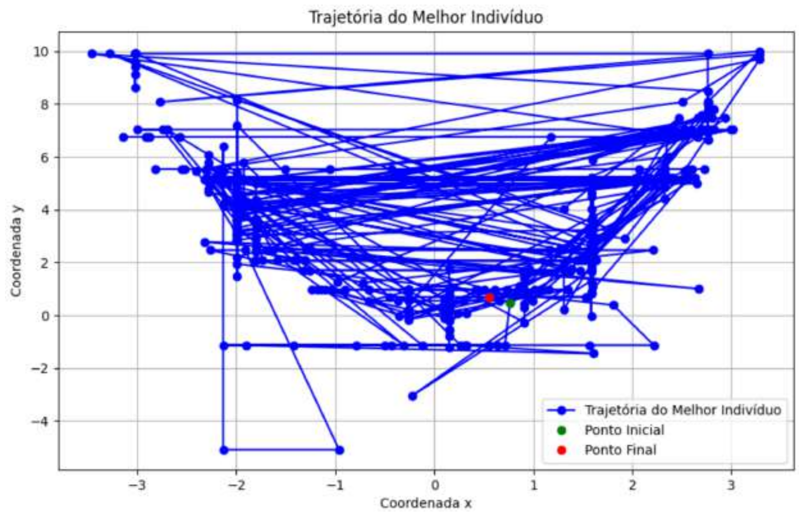


Fig. 158: Autoria própria

CONCLUSÕES

Através das simulações realizadas foi possível observar o comportamento do método e seu processo de busca na minimização da função de Rosenbrock. Além disso, no gráfico é possível notar a dinâmica estocástica realizada pelo melhor indivíduo da população em direção ao ótimo global da região factível escolhida no problema. Uma análise de convergência estocástica é um assunto interessante e desafiador em vários trabalhos recentes, e serve de inspiração para os autores deste trabalho seguirem com a pesquisa nesta direção. Por fim, vale destacar que este mesmo método pode ser utilizado para resolver diversos problemas de otimização.

BIBLIOGRAFIA

[1] Allen, L. J. S.; **An introduction to stochastic processes with applications to biology**. CRC press, 2010.

[2] Gressler, H. O.; Cera, M. C.; **O Impacto da paralelização com OpenMP no desempenho e na qualidade das soluções de um algoritmo genético**. Revista Brasileira de Computação Aplicada, v. 6, n. 2, p. 35-47, 2014.

[3] He, J.; Kang, L.; **On the convergence rates of genetic algorithms**. Theoretical Computer Science, v. 229, n. 1-2, p. 23-39, 1999.

[4] He, J.; Yao, X.; **Towards an analytic framework for analysing the computation time of evolutionary algorithms**. Artificial Intelligence, v. 145, n. 1-2, p. 59-97, 2003.

[5] Pacheco, M. A. C.; et al.; **Algoritmos genéticos: princípios e aplicações**. ICA: Laboratório de Inteligência Computacional Aplicada. Departamento de Engenharia Elétrica. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Fonte desconhecida, v. 28, 1999.

[6] Ruffino, P. R. C.; **Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009..

Tabuada na escada: uma ação do PIBID Matemática/UNESP Bauru[507]

Peroger, Lia Cassita[508]; Gaspar, Fernando da Luz[509]; Perri, Guilherme Augusto[510] e Marques, Emília M. Rosa[511]

INTRODUÇÃO

O PIBID – Programa Institucional de Iniciação à Docência da Licenciatura em Matemática da UNESP de Bauru, nessa edição conta com 24 discentes universitários bolsistas e 3 professores supervisores, atuando em 3 escolas estaduais parceiras. Nosso grupo está atuando na E.E. Dr. Luiz Zuiani desde novembro de 2022. O objetivo desse trabalho é relatar uma de nossas experiências nessa escola parceira, qual seja, o desenvolvimento de um projeto que intitulamos "Tabuada na Escada". O projeto surgiu numa de nossas primeiras reuniões de avaliação e planejamento, e foi implementado a partir da ligação com o Itinerário Formativo de Matemática - A Arquitetura da Escola. Esse itinerário está proposto no material paulista para o 3º Ano do Ensino Médio, devendo ser desenvolvido no 2º semestre do ano letivo.

DESENVOLVIMENTO

O projeto da Tabuada na Escada começou a ser pensado logo no início do desenvolvimento do PIBID Matemática, a partir de uma ideia da professora supervisora da escola parceira. Nosso grupo, que é composto de 8 bolsistas ID (iniciação à docência), a professora supervisora, a coordenadora de área e vários professores do Departamento de Matemática da UNESP/Bauru, gostou muito da ideia e passou a pesquisar sobre o assunto. O projeto prevê a pintura de tabuadas nos espelhos dos degraus de uma escada. A professora supervisora conversou com a direção da escola e obteve o aval para essa nossa intervenção. Uma questão importante que estava em aberto era o momento adequado para a intervenção na escola.

Para o 2º semestre estava previsto, no material didático do 3º ano do Ensino Médio, um itinerário formativo sobre arquitetura na escola. Assim pudemos propor que a pintura das tabuadas fosse o produto desse itinerário, visto que tal ação altera, de modo significativo, a arquitetura da escola. Decidiu-se que as tabuadas a serem pintadas seriam aquelas que os estudantes apresentam mais dificuldades, optamos por 6 tabuadas, do 3 ao 8. Decidimos também que deveríamos fazer do 0 ao 12, aproveitando bem os degraus da

[507]Agradecemos à CAPES pelas bolsas do projeto e à direção da escola parceira pelo apoio, entusiasmo e providência do material da pintura.

[508]Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, UNESP Bauru, Licenciatura em Matemática lia.cassita@unesp.br

[509]Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, UNESP Bauru, Licenciatura em Matemática f.gaspar@unesp.br

[510]Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, UNESP Bauru, Licenciatura em Matemáticaguilherme.perri@unesp.br

[511]Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho, UNESP Bauru, Departamento de Matemática, emilia.marques@unesp.br

escada e deixando claro aos estudantes que o processo da tabuada não se encerra no número 10, como é o pensamento do senso comum.

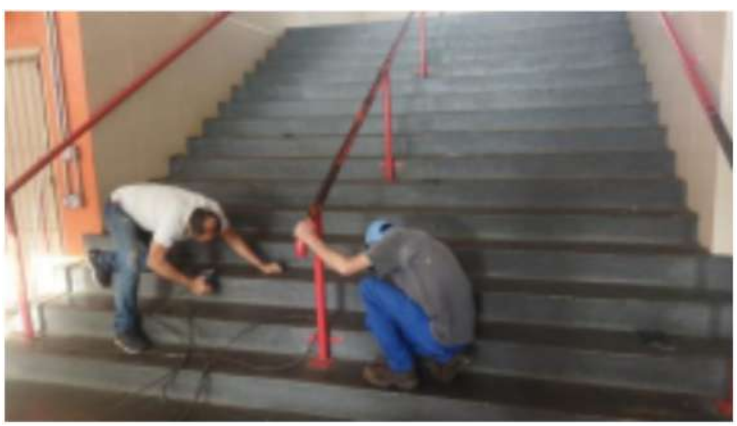
Durante o período de férias, da escola e da UNESP, o grupo todo dos bolsistas PIBID atuantes na escola iniciou o desenho e corte dos moldes dos números e letras que seriam utilizados na pintura. A Figura 01 mostra a escada antes e depois da pintura de fundo.

Fig. 159: Antes e Depois da preparação da escada

Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

Nosso trabalho também envolveu o desenvolvimento de planilhas de custos baseados nos dados obtidos através das medições na escola. O 3º ano B do E.M. participou dessa fase do trabalho. Fizemos ainda toda a preparação necessária para a pintura. Fizemos a planta da escada em perspetiva, calculamos a quantidade necessária de tinta de cada cor, bem como a preparação geral da escada, com a retirada parcial da pintura antiga (Fig.02).

Fig. 160: Retirada parcial da tinta antiga



Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

Nosso projeto da Tabuada na Escada está em desenvolvimento. As próximas imagens (Fig. 03) mostram o início da ação na escola.

Fig. 161: Retirada parcial da tinta antiga

Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

As próximas imagens apresentam nossos resultados parciais.

Fonte: Arquivo do PIBID Matemática, 2023.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brasil; **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/matematica-e-suastecnologias-no-ensino-medio-competencias-especificas-e-habilidades.

[2] International Geogebra Institute; **Matemática dinâmica para se aprender e se ensinar.** 2014. Disponível em: http://www.geogebra.org/cms. Acesso em: 22 set. 2023.

[3] **Programa Institucional De Bolsa De Iniciação à Docência (PIBID).** Faculdade de Ciências – Campus de Bauru – 2023. Disponível em https://www.fc.unesp.br/#!/administracao/areaacademica/saepe/bolsas-e-auxilios/bolsa-pibid/.

Implementação de materiais manipuláveis no ensino da geometria para alunos cegos

Silva, Lívia Jânia de Matos[512] e Sousa, Eduardo Santos de[513]

Resumo: *O presente trabalho trata-se de uma pesquisa exploratória, afim de reunir dados que discutem sobre a implementação de materiais manipuláveis no ensino da Geometria para alunos cegos. A geometria tem grande importância na formação dos alunos, conforme Lorenzato (1995) a geometria tem papel fundamental na percepção e formação do indivíduo, a mesma possibilita a compreensão abrangente e uma visão equilibrada da matemática. O desempenho do professor como mediador do conhecimento tem um papel crucial para a qualidade do ensino, buscar por estratégias metodológicas que promovam a inclusão na perspectiva da educação especial e equitativa, o torna em um agente facilitador do processo de desenvolvimento e aprendizagem. Neste sentido, este trabalho tem como objetivo adquirir dados acerca de como materiais pedagógicos vem sendo utilizados no ensino de geometria, buscando refletir sobre a eficácia desse auxílio e seus possíveis impactos dentro da sala de aula. Os resultados da análise permitiram identificarmos o tratamento do modelo de educação personalizada, as demandas que são criadas ao atendimento de alunos com deficiência visual e avaliar os materiais manipuláveis como modelo para representação de conceitos geométricos.*

Palavras-chave: *Educação inclusiva, deficiência visual, geometria, materiais manipuláveis.*

INTRODUÇÃO

A educação inclusiva, marcada pela variedade de perfis de aprendizagem, requer estratégias pedagógicas para ajudar a criar um ambiente propício ao desenvolvimento das habilidades dos alunos, garantindo não só o acesso, mas também a permanência no ambiente escolar, corroborando com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 9.394/1996; A Declaração de Salamanca (1994); Lei nº 13.146/2015, que institui a Lei Brasileira da Pessoa com Deficiência; Política Nacional de Educação Especial: Equitativa, Inclusiva e com Aprendizado ao longo da vida, por meio do Decreto nº 10.502/2020, todas essas vertentes buscaram de várias formas agregar as instituições o direito das pessoas se tornando inclusiva a educação a todos. Segundo Souza (2018), existe uma lacuna nos serviços e no tratamento de pessoas cegas, isso as torna invisível diante da sociedade e só reforça o estigma do preconceito estrutural e atrasa desenvolvimento de tais. Nesse sentido, a busca por matérias que fornecem estímulos sensoriais auxilia nos acolhimentos desses alunos e torna o ambiente propicio para o processo de ensino aprendizado.

[512]Graduanda do curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Pará (UFPA), `livia.silva@abaetetuba.ufpa.br`.

[513]Graduando do curso de Licenciatura em Matemática, pela Universidade Federal do Pará (UFPA), `edusantos12558@gmail.com`.

Metodologia

A metodologia utilizada acionada foi a pesquisa exploratória com revisão literária de artigos, livros e documentos atuais, englobados nos últimos 6 anos visando uma análise contemporânea dos dados que foram selecionados a partir da plataforma Science Electronic Library Online (SciELO) pois a plataforma disponibiliza uma ampla quantidade de trabalhos gratuitamente e é um dos mais utilizados a fim do aprimoramento de estudantes e pesquisadores desse campo. No primeiro momento, delimitando o título do trabalho, e seu impacto na atual sociedade e seu recorte temporal. No intuito de conhecer mais sobre a temática e analisar possíveis variáveis e hipóteses, justificando-se pela urgência de estratégias que a educação inclusiva demanda dos professores no ensino-aprendizagem de pessoas cegas.

No segundo momento, foram usados termos relacionados a Pessoas cegas, Inclusão, Materiais manipuláveis e Ensino da geometria tomados como descritores para encaminhar as buscas alinhadas ao objetivo da pesquisa. Portanto, a análise dos dados foi viabilizada acervos de acordo com a tabela 1, foram encontrados 10 documentos sobre o conteúdo e depois de uma outra seleção e análise sistemática com o auxílio de descritores que possibilitou uma busca objetiva e alinhada a abordagem do tema, foram escolhidos 5 documentos para a produção do trabalho, de acordo com a tabela 2.

Tab. 1: Autoria própria

Código	Título do trabalho
T1	O sistema Braille e o ensino da Matemática para pessoas cegas.
T2	Cegueira, Acessibilidade e Inclusão: Apontamentos de uma Trajetória.
T3	Deficiência visual: caminhos legais e teóricos da escola inclusiva.
T4	Materiais manipuláveis e engajamento de estudantes nas aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria.
T5	Vivências, Percepções e Concepções de Estudantes com Deficiência Visual nas Aulas de Matemática: os desafios subjacentes ao processo de inclusão escolar.
T6	Geometria na educação infantil: da manipulação empirista ao concreto piagetiano.
T7	Conhecimento de agentes comunitários de saúde sobre pessoas com deficiência visual.
T8	Interação entre Educação Especial e Ensino Regular: ações pedagógicas a estudantes cegos.
T9	A Deficiência Visual e a Baixa Visão: estado da arte das pesquisas acadêmicas em Educação Matemática .
T10	Formação de conceitos em Geometria e Álgebra por estudante com deficiência visual.

Tab. 2: Autoria própria

Trabalhos utilizados	Trabalhos não utilizados
T2, T3, T5, T8, T9	T1, T4, T6, T7, T10

Resultados e discussões

Esse trabalho consistiu na pesquisa de 10 documentos, dentre eles 5 cinco trabalhos foram selecionados, pois dão suporte para essa pesquisa com as ideias apresentadas por eles, destaca-se:

T2:*Cegueira, Acessibilidade e Inclusão: Apontamentos de uma Trajetória*, trata-se de um artigo a partir de um relato de experiência de vida sobre invenção da tecnologia no ensino de pessoas cegas, o inventário braille, mas que busca comentar sobre o processo de inclusão e acessibilidades. Souza (2018, p.568) pontua o direito a cultura das pessoas cega, "há um esforço no sentido de reconhecer a igualdade na diferença, entretanto, persistem, cristalizadas culturas, marcas da invisibilidade dessas pessoas, seja no que toca ao acesso dos bens culturais, seja no pleno usufruto dos direitos de cidadania".

T3: *Deficiência visual: caminhos legais e teóricos da escola inclusiva*, no contexto das realidades das escolas, a permanência para quem tem cegueira ou baixa visão é um desafio a ser enfrentado, com opiniões de autores e análises políticas na construção do aceso a inclusão. As autoras enfatizam que, a ausência da visão, deve ser considerado a interversão através de outros sentidos. Garcia e Braz (2020) acentuam que a criança com deficiência visual interpreta e internaliza o mundo à sua volta por meio dos outros sentidos, tais como o tato, olfato e a audição. Por isso, a necessidade de um espaço apropriado e de acessibilidade, que garanta o reconhecimento dos espaços físicos, sobretudo a sala de aula.

T5: *Vivências, Percepções e Concepções de Estudantes com Deficiência Visual nas Aulas de Matemática: os desafios subjacentes ao processo de inclusão escolar*, no ramo da inclusão, o texto aborda a questão da implementação dos meios acessíveis a prática inclusiva nas aulas de matemática, por meio de políticas e culturas. Nessa perspectiva, Bernardo (2022) enfatiza que não deve ser apenas de responsabilidade dos professores disponibilizar acessibilidade em sala de aula, para autor;

> nas aulas de Matemática, o conteúdo seja transmitido, exclusivamente, por meio oral. As fragilidades nas estratégias de ensino não se devem somente às dificuldades dos professores, uma vez que cabe à escola oferecer oportunidades de formação continuada aos seus profissionais. Essas dificuldades e fragilidades comprometem o desenvolvimento e a consolidação de práticas inclusivas (Bernardo, 2022, p. 65).

T8: *Interação entre Educação Especial e Ensino Regular: ações pedagógicas. a estudantes cegos,* é de caráter qualitativo a pesquisa feita, descritivo-exploratório sobre o ensino regular na teoria histórico-regular na coleta de dados para o trabalho nas interações entre a Educação Especial e o Ensino Regular. Com relação a importância de materiais manipuláveis no ensino Mamcasz-Viginheski, et al. (2023, p.11) ressaltam que "é relevante que os professores considerem outras formas de acesso diante de suas ações pedagógicas, a perceber que os discentes utilizam dos meios táteis, auditivos ou outros que favoreçam sua aprendizagem".

T9: *A Deficiência Visual e a Baixa Visão: estado da arte das pesquisas acadêmicas em Educação Matemática*, foi feito um mapeamento entre a Educação Matemática e Educação Inclusiva com análises de trabalhos publicados que buscam a coleta de informações sobre a pesquisa. Conforme Mendes et al (2021) pontuam que materiais concretos no processo de aprendizagem matemática tem suas potencialidades, haja vista que alunos com deficiência visual utilizam dos sentidos remanescentes para captar as informações à sua volta. Dessa maneira, a utilização dos materiais manipuláveis se torna eficazes no processo de ensino e de aprendizagem matemática.

Contudo, ao se delinear sobre esses documentos, encontra-se um caráter de pesquisa no que tange a inclusão sobre os alunos com deficiência visual, auxiliando ainda mais no processo de educação inclusiva nas escolas. Após a análise, ficou evidente que os métodos auxiliam pessoas cegas com a percepção da matemática, em particular geometria, foi evidenciado a necessidade de materiais que manipuláveis que redirecione a aula para uma linguagem tátil, ressaltando uma formação contínua, para que novos métodos e ferramentas sejam consideradas e examinadas afim de levantar novos argumentos sobre inclusão ensino de pessoas cegas.

CONCLUSÃO

Diante do exposto acerca da pesquisa exploratória, que teve como objetivo adquirir dados acerca de como materiais pedagógicos vem sendo utilizados no ensino de geometria para alunos cegos, revelaram a importância do auxílio dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem, principalmente na perspectiva da inclusão da pessoa com deficiência na sala de aula. Todavia, trazem uma abordagem dinâmica e de forma tangível ao tratar conteúdos conceituais, contribuído significativamente no desenvolvimento dos alunos cegos, que atualmente vem tomando cada vez mais espaço na busca por participação ativa nos seus respectivos ambientes, e sobre essa perspectiva a sala de aula não fica isenta de tal inclusão, também se destaca a necessidade de pesquisa na área, que ao decorrer dos estudos não se mostrou proporcional a tamanha demanda da sociedade. Destarte, as análises chamam atenção as grandes atribuições na formação docente, enriquecendo e preparando o futuro professor. Assim, conclui-se, então que utilizar os meios para custear a acessibilidade se repõe aos núcleos do conceito de inclusão, que busca lecionar aos alunos a mesma proporção aos estudantes ditos “normais”, pois respeitar o espaço da sala de aula é crucial tanto na relação professor/aluno, quanto na pesquisa ser de forma objetiva e aplicando materiais próprios a acessibilidade, pois são conectivos para uma aula aplicada aos estudantes.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bernardo, F. G.; **Vivências, Percepções e Concepções de Estudantes com Deficiência Visual nas Aulas de Matemática: os desafios subjacentes ao processo de inclusão escolar.** Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 36, p. 47-70, 2022.

[2] Brasil; **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996.** Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Disponível em: `https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm` Acesso em: março de 2024.

[3] Garcia, F. M.; Braz, A. T. A. M.; **Deficiência visual: caminhos legais e teóricos da escola inclusiva.** Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, v. 28, p. 622-641, 2020.

[4] Lorenzato, S.; **Por que não ensinar Geometria?** In: Educação Matemática em Revista - SBEM 4, p. 3-13, 1995.

[5] Mamcasz-Viginheski, L. V. et al.; **Formação de conceitos em geometria e álgebra por estudante com deficiência visual.** Ciência & Educação (Bauru), v. 23, p. 867-879, 2017.

[6] Mamcasz-Viginheski, L. V.; ALVARISTO, E. de F.; SHIMAZAKI, E. M.; **Interação entre Educação Especial e Ensino Regular: ações pedagógicas a estudantes cegos.** Ciência & Educação (Bauru), v. 29, p. 1-14, 2023.

[7] Mendes, R. M.; Gomes, A. A. S.; Caporale, S. M. M.; **A Deficiência Visual e a Baixa Visão: estado da arte das pesquisas acadêmicas em Educação Matemática.** Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 35, p. 413-431, 2021.

[8] Oliveira, P. M. P. et al.; **Conhecimento de agentes comunitários de saúde sobre pessoas com deficiência visual.** Acta Paulista de Enfermagem, v. 35, p. eAPE03372, 2022.

[9] Pereira, J. S.; Oliveira, A. M. P.; **Materiais manipuláveis e engajamento de estudantes nas aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria.** Ciência & Educação (Bauru), v. 22, p. 99-115, 2016.

[10] Souza, J. B.; **Cegueira, acessibilidade e inclusão: apontamentos de uma trajetória.** Psicologia: Ciência e Profissão, jul/set., v. 38, p. 564-571.

[11] , S.; Franco, V. S.; **Geometria na educação infantil: da manipulação empirista ao concreto piagetiano.** Ciência & Educação (Bauru), v. 18, p. 951-964, 2012.

[12] Viginheski, L. V. M. et al.; **O sistema Braille e o ensino da Matemática para pessoas cegas.** Ciência & Educação (Bauru), v. 20, p. 903-916, 2014.

A derivada de Carathéodory

SANTOS, Lucas[514]; ROJAS, Lucas e SOUZA, Osmar

Resumo: *Neste trabalho faremos uma breve revisão da noção de derivada e posteriormente apresentaremos a definição de Derivada de Carathéodory. Por fim, veremos alguns exemplos de aplicações desta nova forma de se calcular uma derivada.*

Palavras-chave: *Derivada, Carathéodory, cálculo diferencial.*

INTRODUÇÃO

Todos os anos, apresenta-se aos alunos do curso de cálculo a definição usual da derivada. Entretanto, há uma outra caracterização, menos conhecida, que aparece no livro Theory of Functions of a Complex Variable (vol.1), escrito por Constantin Carathéodory e publicado em 1954. Esta caracterização torna-se elegante e muito útil, tanto em termos teóricos quanto em termos pedagógicos. Muitos teoremas e aplicações tornam-se mais fáceis utilizando a formulação de Carathéodory. Esta caracterização deixa bem claro que de fato a continuidade é essencial para a diferenciabilidade, tão essencial que a própria definição contém a continuidade necessária.

A FORMULAÇÃO DA DERIVADA DE CARATHÉODORY

Suponhamos que queremos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$, com f definida no intervalo aberto $U, a \in U$. Para isso, tomemos a função Φ das inclinações das retas secantes a f no ponto $(a, f(a))$:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, x \in U - (a)$$

A inclinação da reta tangente que queremos encontrar será o limite

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = f'(a)$$

se este existir. Nesse caso, denotamos-o por $f'(a)$.
Isto motivou Carathéodory a pensar na definição a seguir.

Definição 9.31 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto U, e a um ponto em U. f é diferenciável em a, no sentido de Carathéodory, se existe uma função $\Phi_f(x,a)$, contínua em a, que satisfaz a relação*

$$f(x) - f(a) = \Phi_f(x, a)(x - a), \forall x \in U \tag{123}$$

É fácil ver que que esta definição é equivalente a que usualmente se dá para a derivada e que $\Phi_f(a, a) = f'(a)$. A consequência imediata dessa definição é que se f é diferenciável em a, então f também é contínua em a.

Em suma, o número $\Phi_f(a, a)$ é a derivada de Carathéodory de f em a.

[514]Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS

Propriedades da Derivada de Carathéodory

Seja $D_a(U,\mathbb{R})$ a família das funções definidas do intervalo aberto U em $\mathbb{R}$ que são diferenciáveis no ponto $a \in U$ e $C_a(U,\mathbb{R})$ a família das funções definidas de U em $\mathbb{R}$ que são contínuas no ponto $a \in U$. Definimos $\Phi : D_a \to C_a$ por $\Phi(f) = \Phi_f$, onde Φ_f satisfaz (1). Daí, podemos prosseguir para o seguinte teorema que determina algumas propriedades de Φ.

Teorema 9.32 *(A álgebra de $\Phi(D_a)$). Se $f,g \in D_a(U,\mathbb{R})$ e $a,b \in \mathbb{R}$, então $af + bg \in D_a(U,\mathbb{R})$, $f/g \in D_a(U,\mathbb{R})$ (se $g \neq 0$) e*

1. $\Phi_{af+bg} = a\Phi_f + b\Phi_g$;
2. $\Phi_{fg} = g\Phi_f + f(a)\Phi_g$;
3. $\Phi_{f/g} = \big(g(a)\Phi_f - f(a)\Phi_g\big)/g(a)g$.

Corolário 9.2 *A partir do teorema 9.32, pode-se concluir que*

1. $(af + bg)'(a) = af'(a) + bg'(a)$;
2. $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$;
3. $(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$, *se* $g(a) \neq 0$.

Teorema 9.33 *Seja f definida no intervalo aberto U, $a \in U$, e g definida no intervalo aberto V, $f(U) \subset V$, com $f \in D_a(U,\mathbb{R})$ e $g \in D_a(V,\mathbb{R})$. Então $g \circ f \in D_a(U,\mathbb{R})$ e*

$$\Phi_{g\circ f} = (\Phi_g \circ f)\Phi_f .$$

Corolário 9.3 *(Regra da cadeia) Sob as hipóteses do teorema 9.33, tem-se*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) .$$

APLICAÇÕES

Vejamos agora algumas aplicações de como podemos calcular a derivada de Carathéodory.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante definida como $f(x) = k$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar $\Phi_f(x,a)$, contínua, tal que $f(x) - f(a) = \Phi_f(x,a).(x-a)$. Note que

$$f(x) - f(a) = 0 = 0 \cdot (x - a) .$$

Então $\Phi_f(x,a) = 0$ e, consequentemente, $f'(a) = \Phi_f(a,a) = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$. Queremos encontrar $\Phi_f(x,a)$, contínua, tal que $f(x) - f(a) = \Phi_f(x,a) \cdot (x-a)$. Mas observe que

$$f(x) - f(a) = x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k} .$$

Portanto, $\Phi_f(x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$ e, em particular, $f'(a) = \Phi_f(a,a) = na^{n-1}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Calculemos sua derivada no ponto a. Note que $f(x) - f(a)$, para $x \neq a$, pode ser escrito como

$$f(x) - f(a) = \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a) = \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x - a} \cdot (x - a) .$$

Note que $\Phi_f(x,a) = \dfrac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x-a}$ tem uma descontinuidade removível em a, pois

$$\frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(a)}{x-a} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \xrightarrow{x \to a} \cos(a)\,,$$

Logo, definimos $f'(a) = \Phi_f(a,a) = \cos(a)$, que é função contínua em a.

BIBLIOGRAFIA

[1] ACOSTA, Delgado, Rodríguez. La derivada de Carathéodory. **2**014.

[2] KHUN, S. **The Derivate á La Caratéodory**. The American Mathematical Monthly, 98(1), 40 - 44.

As origens da teoria dos feixes e seu desenvolvimento

Silva, Lucas[515] e Ruffino, Fabio[516]

Resumo: *O objetivo desse trabalho é apresentar um pouco da história da Teoria dos Feixes, introduzida por Jean Leray no campo de prisioneiros de guerra Oflag XVII-A, na Áustria. Trata-se de uma teoria que tem um papel central na matemática moderna, principalmente na geometria (analítica, complexa, diferenciável, algébrica, etc.). Após a formulação de uma teoria cohomológica com coeficientes em feixes, dada por Cartan, ficou clara sua importância e naturalidade para resolver problemas com a passagem de propriedades locais para propriedades globais. Portanto, nesse trabalho pretendemos expor o contexto (tanto dentro da matemática, quanto dentro da história) em que essa teoria nasceu; além de exibir o básico da teoria, para que os leitores também entendam como foi desenvolvida e sua importância na matemática.*

Palavras-chave: *História da matemática, teoria dos feixes, topologia.*

INTRODUÇÃO

Origens da Teoria dos Feixes

Jean Leray (7/11/1906 - 10/11/1998) foi detido no campo de prisioneiros para oficiais Oflag XVII-A, na Áustria, por toda Segunda Guerra Mundial. Lá ajudou a criar uma universidade, na qual se tornou o diretor. Originalmente, seus interesses matemáticos tinham origem em aplicações de problemas de mecânica e dinâmica de fluídos, mesmo sendo trabalhos teóricos. Porém, com medo que seus conhecimentos em matemática aplicada pudesse ser usado pelos alemães nos esforços de guerra, optou por focar em Topologia Algébrica, uma área que até então tinha usado apenas em aplicações na Análise.

Durante esse período, Leray tinha o objetivo de generalizar para espaços topológicos mais gerais alguns teoremas importante da Topologia Algébrica, em especial da teoria de formas diferencias de Élie Cartan. Nesses esforços, foi desenvolvida a ferramenta que mais tarde chamaria de feixe (*faisceau*), além do desenvolvimento de sequências espectrais e teoria de cohomologia. Porém, foi apenas por volta de 1950 que essas noções começaram a tomar a forma que conhecemos hoje. Um pouco depois, após um desenvolvimento da Teoria de Categorias, se viu necessária uma reformulação categorial dessas ideias para uma forma mais simples e elegante.

---

[515] lucasnovo@estudante.ufscar.br; UFSCar, discente. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com processo nº 2023/08173-3.

[516] ferrariruffino@ufscar.br; UFSCar, docente. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com processo nº 2023/08173-3.

Um Pouco de Matemática

Hoje em dia, é comum utilizarmos a seguinte definição de feixe: um *pré-feixe de grupos abelianos* em um espaço topológico X é uma lei que associa a cada aberto $U \subset X$ um grupo abeliano $\mathcal{P}(U)$ e a cada par $V \subset U$ de abertos um morfismo $\mathcal{P}_{U,V} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$, dito *morfismo de restrição*, de modo que:

(i) $\mathcal{P}_{U,U}$ é a identidade de $\mathcal{P}(U)$;

(ii) se $W \subset V \subset U$, então $\mathcal{P}_{U,W} = \mathcal{P}_{V,W} \circ \mathcal{P}_{U,V}$.

Um pré-feixe de grupos abeliano $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X é dito *feixe de grupos abelianos* em X se valem as seguintes condições para qualquer subconjunto aberto $U \subset X$ e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}$ de U:

(iii) Se existem duas seções $s, \overline{s} \in \mathcal{F}(U)$ tais que $s|_{U_i} = \overline{s}|_{U_i}$ para todo i, então $s = \overline{s}$;

(iv) Dadas seções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos i e j, existe uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo i.

Também vamos explorar, da maneira mais simples e breve possível, o seguinte fenômeno: dado uma sequência exata curta de feixes $0 \to F \to G \to H \to 0$, ela, em geral, não é mais exata quando a vemos como uma sequência de pré-feixes. Isso é equivalente a afirmar que, considerando a sequência das seções globais (ou seja, dos grupos abelianos associados ao espaço topológico X todo), apenas a sequência $0 \to F(X) \to G(X) \to H(X)$ é exata. Esta é a porta de entrada para a cohomologia de feixes, que desempenha um papel central na Análise Complexa, na Geometria Algébrica, e em várias outras áreas da matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUZZO, U. **Introduction to Algebraic Topology and Algebraic Geometry**. Trieste. International School for Advanced Studies, 2004.

[2] BREDON, G. **Sheaf Theory**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1997. Graduate Texts in Mathematics volume 170.

[3] GODEMENT, R. **Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux**, Publications de L'lnstitut de Mathématique de L'Université de Strasbourg XIII, Hermann, Paris, 1998.

[4] FOURMAN, M.P et al. **Applications of sheaves**: Proceedings of the Research Symposium on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra and Analysis, Durham, July 9-21, 1977. Springer, 1979. Lect. notes in math., 753.

[5] MILLER, H. **Leray in Oflag XVIIA**: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. 2000.

Teorema multinomial para quatérnions

Demonstração e aplicações

Vasconcellos, Lucas[517] e Kuznetsova, Zhanna

Resumo: *Neste trabalho, enuncia-se o Teorema Multinomial para Quatérnions em todos os seus casos, e apresentam-se as principais ideias envolvidas na demonstração do teorema: em essência, essa demonstração faz uso de conceitos combinatórios próprios de estruturas algébricas que anticomutam. Além disso, mostra-se uma aplicação do teorema ao cálculo de potenciais de um espaço de funções quaterniônicas*

Palavras-chave: *Quaternions, potencial, combinatória anticomutativa.*

INTRODUÇÃO

Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra comutativa sobre o corpo $\mathbb{R}$. Para $a, b \in \mathbf{A}$ e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a expansão $(a+b)^n$ [1] é

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^n b^{n-k}, \text{ onde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Para $a, b, c, d \in \mathbf{A}$, a expansão $(a+b+c+d)^n$ é

$$(a+b+c+d)^n = \sum_{k_0+k_1+k_2+k_3=n}^{n} \binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} a^{k_0} b^{k_1} c^{k_2} d^{k_3}, \; k_i = 0, ..., n. \tag{124}$$

O coeficiente multinomial é definido como

$$\binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_0!k_1!k_2!k_3!}. \tag{125}$$

Podemos representar um coeficiente multinomial de 4 elementos como um produto de um coeficiente binomial vezes um coeficiente multinomial de três elementos

$$\binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{k_0}\binom{n-k_0}{k_1, k_2, k_3}. \tag{126}$$

Através de (126), o teorema multinomial pode ser escrito como

$$(a+b+c+d)^n = \sum_{k_0=0}^{n} \binom{n}{k_0} a^{k_0} (b+c+d)^{n-k_0}. \tag{127}$$

[517] UFSCar. Este autor foi apoiado pela CAPES

Seja $\mathbb{H}$ o espaço vetorial dos quatérnions e seja $x \in \mathbb{H}$ um elemento quaterniônico escrito de forma

$$x = x_0e_0 + x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \tag{128}$$

onde e_1, e_2, e_3 são os elementos quaterniônicos e e_0 é o elemento real da base de $\mathbb{H}$.

O teorema abaixo foi inicialmente enunciado em [2].

Teorema 9.34 *A expansão x^n pode ser expressa como*

$$x^n = \sum_{k_0=0}^{n} \binom{n}{k_0} x_0^{k_0} c(k_0, k_1, k_2, k_3) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

onde

$$c(k_0,k_1,k_2,k_3)\begin{cases} = \sum_{k_1/2+k_2/2+k_3/2=(n-k_0)/2} \binom{\frac{1}{2}(n-k_0)}{\frac{1}{2}(k_1,k_2,k_3)} (-1)^{(n-k_0)/2}, \\ \textit{para } k_1,k_2,k_3 \textit{ pares;} \\ = 0, \textit{para ao menos dois } k_1,k_2,k_3 \textit{ impares;} \\ = \sum_{(k_1-1)/2+k_2/2+k_3/2=(n-k_0-1)/2} \binom{\frac{1}{2}(n-k_0-1)}{\frac{1}{2}(k_1,k_i-1,k_3)} (-1)^{(n-k_0-1)/2} x_i e_i, \\ \textit{para um único } k_i (i=1,2,3) \textit{ impar;} \end{cases}$$

(observação: $\frac{1}{2}(k_1, k_2, k_3) = (\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}, \frac{k_3}{2})$).

CASOS

O primeiro caso foi demonstrado em [2]. Os outros dois casos tiveram uma demonstração original pelo autor deste trabalho em sua dissertação de mestrado. A ideia principal para demonstrar os outros casos reside no fato de como podemos descrever todas as possíveis permutações de uma string $S = s_1s_2...s_n$ com n caracteres, onde $S \in \mathbb{H}$. Por exemplo, seja $S = e_1e_2e_3$ uma string com 3 elementos, e e_1, e_2, e_3 os elementos complexos de $\mathbb{H}$. Pelo coeficiente multinomial $\binom{3}{1,1,1} = 6$, todas as possíveis permutações de S podem ser descritas pela seguinte relação abaixo:

$$\begin{aligned} e_1e_2e_3 &= -e_2e_1e_3 \\ e_2e_3e_1 &= -e_3e_2e_1 \\ e_3e_1e_2 &= -e_1e_3e_2 \end{aligned} \tag{129}$$

Como o coeficiente multinomial $\binom{n}{k_1,k_2,k_3}$ descreve todas as possíveis permutações de uma string de n elementos, com os elementos e_1, e_2, e_3 aparecendo k_1, k_2, k_3 vezes respectivamente, ao expandir todas as possíveis combinações da string $S = e_1e_2e_3$, a soma resultante de todos os elementos da expressão (129) é zero. A ideia da demonstração dos casos (2) e (3) do Teorema 1 é generalizar este fato acima para uma string arbitrária de elementos quaterniônicos.

APLICAÇÕES

Considere um sistema físico onde a energia potencial é descrita como a exponencial de uma função $\phi^n(\mathbf{q})$,$\mathbf{q}$ é o conjunto das coordenadas generalizadas do sistema. Alguns espaços de funções de simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ podem ser representados por um espaços de funções de componentes quaterniônicas. Se $\phi(\mathbf{q})$ pertence a este espaço, então

$$\phi = \phi_0e_0 + \phi_1e_1 + \phi_2e_2 + \phi_3e_3.$$

Podemos usar o Teorema 1 para calcular a Lagrangiana e as equações de Euler Lagrange [3] para este sistema [4]. Por exemplo, considere a Lagrangiana de ϕ [4]

$$L = \dot{\phi}^2 + \phi_\rho^2 - V(\phi), \tag{130}$$

onde $\dot{\phi}^2 + \phi_\rho^2$ é a parte cinética e $V(\phi)$ a parte potencial. Se $V(\phi) = \phi^3$, então, aplicando o procedimento descrito no Teorema 1 e extraindo a parte real, obtemos: [4]:

$$\phi^3 = \phi_0^3 - \phi_0 \sum_{i=1}^{3} \phi_i^2. \tag{131}$$

Se $V(\phi) = \phi^4$, então pelo procedimento descrito no Teorema 1 e extraindo a parte real de ϕ^4, obtemos

$$\phi^4 = \phi_0^4 + \phi_1^4 + \phi_2^4 + \phi_3^4 - 2\phi_1^2\phi_2^2 - 2\phi_1^2\phi_3^2 - 2\phi_2^2\phi_3^2 - 6\phi_0^2 \sum_{i=1}^{3} \phi_i^2.$$

O objetivo apresentação é mostrar a demonstração dos casos (2),(3) do Teorema 1 e como podemos usar o Teorema 1 para aplicar em sistemas físicos com uma simetria $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.A. Brualdi. *Introductory Combinatorics.* Pearson Education. Pearson/Prentice Hall, 2012. URL: https://books.google.com.br/books?id=7aeWuQAACAAJ.

[2] Sirkka-Liisa Eriksson-Bique. The binomial theorem for hypercomplex numbers. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica,* 24:225–229, 1999.

[3] P.J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1993. URL: https://books.google.com.br/books?id=sI2bAxgLMXYC.

[4] Zhanna Kuznetsova and Lucas Vasconcellos. Z2z2 -graded lie algebras and superalgebras and related physical models. *Journal of Physics: Conference Series,* 2667:012017, 12 2023. doi:10.1088/1742-6596/2667/1/012017.

Um problema olímpico e múltiplas possibilidades

Aquino, Andréia Araújo de Farias[518]; Silva, Thiago Vieira da[519] e Tsuchiya, Luciana Yoshie[520]

Resumo: *A abordagem pedagógica da resolução de problemas incentiva o desenvolvimento de habilidades como pensamento lógico, criatividade e autonomia, além de estimular a aplicação de conceitos matemáticos diversos. Neste trabalho, serão apresentadas várias soluções para um problema relacionado a triplas pitagóricas, retirado das Olimpíada de Matemática das Instituições Federais (OMIF). Essas soluções foram propostas por estudantes que participaram de oficinas de resolução de problemas matemáticos ministradas no Instituto Federal do Paraná (IFPR), campus Paranavaí. Além disso, aspectos teóricos associados ao problema também serão explorados.*

Palavras-chave: *Teorema de Pitágoras, triplas Pitagóricas, resolução de problemas.*

INTRODUÇÃO

A educação matemática contemporânea tem buscado constantemente formas inovadoras de promover o aprendizado significativo para os estudantes, indo além da mera transmissão de conteúdos. Nesse contexto, a resolução de problemas emerge como uma abordagem pedagógica fundamental promovendo o desenvolvimento do pensamento lógico, da capacidade interpretativa, da criatividade e da autonomia. Além disso, os problemas matemáticos ainda requerem que o aluno recorde de conceitos que não necessariamente fazem parte do conteúdo abordado no momento pelo professor. Neste sentido, problemas olímpicos podem ser instigantes, abordando múltiplos aspectos matemáticos.

Este trabalho aborda um problema olímpico da OMIF proposto em oficinas de resolução de problemas para alunos do Ensino Médio do IFPR, campus Paranavaí. Durante as oficinas, surgiram várias estratégias de resolução do problema. Apresentaremos aqui as soluções propostas pelos seus participantes e alguns aspectos teóricos relacionados.

APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O problema (adaptado) proposto para os participantes das oficinas foi o seguinte [2]:

"Existe um método bastante simples de gerar triplas pitagóricas. O processo é o seguinte: escolha dois números naturais distintos quaisquer a e b, calcule o dobro do produto de a por b, calcule o valor absoluto

[518]Instituto Federal do Paraná.
[519]Instituto Federal do Paraná.
[520]Instituto Federal do Paraná.

da diferença entre os quadrados de a e b, calcule a soma dos quadrados de a e b. Pronto! Os três números calculados formam uma tripla pitagórica.

Qual é o valor absoluto da diferença entre os dois números naturais, a e b, que devem ser escolhidos para se gerarem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 145 e um dos catetos medindo 17?"

ASPECTOS TEÓRICOS

Triplas pitagóricas são conjuntos de três números inteiros positivos que satisfazem a relação matemática do Teorema de Pitágoras. É fácil ver que triplas geradas pelo método acima são pitagóricas, mas dada uma tripla pitagórica qualquer, será que existem números inteiros positivos a e b tais que essa tripla pode ser gerada pelo método apresentado?

A resposta é nem sempre. Não existem, por exemplo, números inteiros positivos que gerem a tripla pitagórica $(15, 12, 9)$ pelo método apresentado. No entanto, é possível mostrar os seguintes resultados [1]:

Teorema: *Sejam (x, y, z) uma tripla pitágorica com $z^2 = x^2 + y^2$, tal que $mdc(x, y, z) = 1$, então existem a e b inteiros positivos, tais que $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$ e $y = 2ab$.*

Triplas pitágóricas (x, y, z) tais que $mdc(x, y, z) = 1$ são ditas *primitivas.*

Proposição: *Se (x, y, z) é uma tripla pitágorica tal que $mdc(x, y, z) = d$, com $d \neq 1$ então existem a e b, inteiros positivos, tais que $z = d(a^2 + b^2)$, $x = d(a^2 - b^2)$ e $y = 2dab$.*

Dessa forma, podemos concluir que ou uma tripla pitagórica é primitiva e logo é gerada pelo método apresentado, ou ela é um múltiplo de uma tripla pitagórica primitiva.

MÚLTIPLAS SOLUÇÕES PARA O PROBLEMA

A seguir apresentamos as soluções que foram propostas pelos participantes da oficina.

Quatro estratégias se desdobraram das seguintes conclusões comuns a todas as resoluções:

Pelo Teorema de Pitágoras as medidas do triângulo são $(145, 144, 77)$.

(1) Por paridade, a única possibilidade é que $2ab = 144$, e portanto $ab = 72$.

(2) Temos que $a^2 + b^2 \geq |a^2 - b^2|$, então $a^2 + b^2 = 145$

(3) Logo $|a^2 - b^2| = 17$.

Resolução 1: *Por (1) e (2) temos que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 145 - 144 = 1$. Donde concluímos que $|a - b| = 1$.*

Resolução 2: *Sem perda de generalidade suponha $a > b$. Assim $a^2 + b^2 = 145$ e $a^2 - b^2 = 17$. Somando as duas equações temos $2a^2 = 162$, que implica que $a = 9$. Por (1) obtemos que $b = 8$. Logo $|a - b| = 1$.*

Resolução 3: *Substituindo $a = 72/b$ em $a^2 + b^2 = 145$ e realizando manipulações algébricas obtemos a equação $b^4 - 145b^2 + 5184 = 0$. Colocando $x = b^2$ obtemos a equação $x^2 - 145x + 5184 = 0$. Usando a fórmula de Bháskara obtemos $x = 81$ ou $x = 64$, donde $b = 9$ ou $b = 8$. Por (1), obtemos que $a = 8$ ou $a = 9$, respectivamente. Logo $|a - b| = 1$.*

Resolução 4: *Supondo $a > b$, temos $|a^2 - b^2| = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 17$. Como 17 é um número primo, a única opção é $(a + b) = 17$ e $(a - b) = 1$ de sorte que resolvendo o sistema obtemos a solução $a = 9$ e $b = 8$. Portanto, $|a - b| = 1$.*

CONCLUSÕES

Ao analisarmos as resoluções apresentadas percebemos a mobilização de diferentes conteúdos matemáticos em cada abordagem. Na Resolução 1, destaca-se o uso do produto notável e manipulações algébricas simples para encontrar a diferença entre os números naturais. Já na Resolução 2 é evidenciada a utilização de técnicas de álgebra para resolver um sistema de equações. A Resolução 3 demonstra o emprego de técnicas mais avançadas, como a resolução de uma equação biquadrática através da fórmula de Bhaskara, sendo necessário um domínio maior sobre conteúdos de álgebra e polinômios. Por fim, na Resolução 4, observa-se a aplicação de conceitos de fatoração e manipulação algébrica, culminando na resolução de um sistema de equações lineares. Portanto, as diversas abordagens utilizadas pelos alunos demonstram não apenas a diversidade de caminhos para a solução do problema, mas também a variedade de conteúdos matemáticos mobilizados, ressaltando a importância da flexibilidade e criatividade na resolução de problemas matemáticos e o potencial de se trabalhar com problemas olímpicos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Silva, N. V. da. **Gerando Ternos Pitagóricos** Dissertação (Mestrado Profissional em Matematica) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014.

[2] 2021. Olimpíada de Matemática das Instituições Federais (OMIF). Primeira Fase.

Optimal regularity of the solutions to the classical obstacle problems

Luis Carlos Urbiñes Suarez[521]

Keywords: *Free boundary; obstacle problem; variational inequalities.*

Abstract: *Many phenomena in physics, biology, economics, and financial mathematics can be modeled using partial differential equations. Those problems involving PDEs where the solutions are restricted to the boundary conditions of the domain are called boundary problems. On the other hand, there are some stationary problems, where the region which the diffusion process is a priori unknown, are called free boundary problems. Let us consider a membrane (whose boundary remains fixed) at the top of a given body (an obstacle) under the action of contact forces, e.g., tension, friction, air resistance, and gravity. Actually, this archetype of mathematical models that study the position equilibrium of the membrane is often called obstacle problem (cf. [2] e [4]). From a variational point of view, if the membrane is over a defined obstacle, such as the graph of a function* $\phi \in H^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, *them, the problem reduces to minimize a functional*

$$\mathcal{J}(v) = \int_\Omega |\bullet v|^2 dx - \int_\Omega f u dx, \ \ \forall v \in \mathcal{K}.$$

Where $\mathcal{K} = \{u \in H_0^1(\Omega) : u \geq \phi \ \ a.e \ in \ \Omega\}$, *were* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *is a bounded domain with smooth boundary* $\partial\Omega$, $\phi \leq 0$ *on* $\partial\Omega$ *and* $f \in L^2(\Omega)$ *a given function.*
We must emphasize that the existence of a minimizer is a well-known fact and occurs through the application of the direct method of calculating variations (see [3]).

We will study the classical obstacle problem, showing the existence and uniqueness of a solution through the classical approach, that is, making use of the tools of calculus of variations. In addition, we will study optimal regularity of the solution. For ease, we assume that $f = 0$. *To illustrate our approach, note that if the solution to the obstacle problem is continuous; it follows from the Euler-Lagrange equations that*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad in \quad u \geq 0 \\ \Delta u = \Delta \phi \quad in \ u = 0 \\ u \geq \phi \quad in \ \Omega \end{cases}$$

Now, due to the linearity of $-\Delta$, *we reduce the problem of obstacles to the case of a zero obstacle due to the change of variable*

$$\boldsymbol{u} = u - \phi$$

[521] Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC/UNICAMP)

Suppose that $\phi \in C^{1,1}(\Omega)$, *therefore* $\boldsymbol{u} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$, *for every* $\alpha < 1$. *Let us now consider the open set*

$$\mathcal{O} := \{x \in \Omega : \boldsymbol{u}(x) > 0\},$$

it follows that solution $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\boldsymbol{u} \geq 0$ *in* Ω *satisfies*

$$\Delta \boldsymbol{u} = \phi \chi_{\mathcal{O}} \text{ in } \Omega. \tag{132}$$

Lema 9.2 *Let* $\hat{x} \in \Omega$ *and* $\eta > 0$ *be such that* $B_{2\eta}(\hat{x}) \subset \Omega$. *If* w *satisfies* $\Delta w = \Delta \phi$ *in* $B_{2\eta}(\hat{x})$, *then*

$$\|D^2(w)\|_{L^\infty(B_{2\eta}(\hat{x}))} \leq C\left(\frac{1}{\eta}\|w\|_{L^\infty(B_{2\eta}(\hat{x}))} + \|D^2(\phi)\|_{L^\infty(B_{2\eta}(\hat{x}))}\right),$$

for some $C = C(n) > 0$.

Teorema 9.35 *(Regularity* $C^{1,1}$*) Let* $\boldsymbol{u} \in H^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $u \geq 0$ *in* Ω *be a solution to* (132). *Then,* $u \in C^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *and*

$$\|D^2(\boldsymbol{u})\|_{L^\infty(K)} \leq C\left(\frac{1}{\eta}\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|D^2(\phi)\|_{L^\infty(\Omega)}\right),$$

for any $K \Subset \Omega$, *where* $C = C(n, d(K, \partial\Omega))$.

The optimal regularity of the solution to the obstacle problem is obtained through the inequality obtained in the previous theorem.

Therefore, this work is part of author's Master Thesis advised by Dr. João Vitor da Silva (IMECC).

BIBLIOGRAPHY

[1] Cafarelli, L.,*The obstacle problem revisited.* Journal of Fourier Analysis and Applications, Austin Texas. vol. 4, n.4, 383-402, 1998.

[2] Figalli, A.,*Regularity of interfaces in phase transitions via obstacle problems - Fields Medal lecture.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians - Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures, 225-247, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018. Revista Matemática Universitária, 1985.

[3] Giusti, E. *Direct methods in the calculus of variations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[4] Rodrigues, J.F., *Obstacle problems in mathematical physics.* North-Holland Mathematics Studies, 134. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 114. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. xvi+352 pp. ISBN: 0-444-70187-7.

[5] Wolanski, N.*Introdución a los problemas de frontera libre.* Cursos y Seminarios de Matemática - Serie B. Fascículo 2. 2007 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Derivada fracionária e o problema da tautócrona

Oliveira Fontes, Luís Henrique de[522]

Resumo: *Apresentamos neste trabalho um estudo introdutório das integrais e derivadas de ordem fracionária, um conceito introduzido pelo marquês de L'Hospital e seu amigo Leibniz no século XVII e que contou com a contribuição de grandes matemáticos tais como, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville dentre outros. Deste modo, o cálculo de ordem não-inteira, conhecido hoje como Cálculo Fracionário tem se mostrado muito adequado para o estudo de fenômenos físicos. Neste trabalho, daremos as bases do Cálculo Fracionário e algumas de suas propriedades e como aplicação exibiremos a solução de Abel para o problema da Tautócrona, visto do ponto de vista do Cálculo Fracionário. Este trabalho foi desenvolvido no meu Trabalho de Conclusão de Curso tendo por base as seguintes referências, [1] e [2].*

Palavras-chave: *Cálculo fracionário, transformada de Laplace, função Gamma, tautócrona*

INTRODUÇÃO

O Cálculo Fracionário permite uma descrição matemática mais precisa de certos fenômenos físicos. Neste trabalho, daremos a definição de Integral Fracionária e Derivada Fracionária no sentido de Riemann-Liouville, bem como apresentar algumas de suas propriedades.

Segundo [2] o conceito de Derivada Fracionária é tão antigo quanto o surgimento do Cálculo Clássico. Considera-se que seu nascimento se deu no ano de 1695, numa troca de correspondências entre o marquês de L'Hospital e seu amigo Leibniz. Nestas correspondências Leibniz indagou sobre a possibilidade de derivar $1/2$ vez uma função. A resposta de Leibniz permitiu estender a definição de derivada de ordem inteira para uma derivada de ordem arbitrária. Além da resposta afirmativa de Leibniz ao problema proposto, o desenvolvimento desta teoria contou com a contribuição de inúmeros matemáticos importantes tais como, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville entre outros, que levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não-inteiras, que no final do século XIX, devido primordialmente as definições propostas por Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov, pareciam estar completas.

Com base nas definições de Caputo e Grünwald-Letnikov, diversos autores demonstraram nas últimas décadas que o cálculo fracionário oferece uma descrição mais precisa de fenômenos naturais em comparação com o cálculo tradicional, devido à sua capacidade de capturar efeitos de memória e propriedades hereditárias.

Definição 9.32 (Função Gamma) *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$ definimos a função gamma através da seguinte integral imprópria*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{133}$$

[522] Universidade Federal da São Carlos - UFSCar

Definição 9.33 *A transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathcal{L}f(t)$ ou por $F(s)$ é definida pela integral*

$$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{134}$$

sempre que a integral imprópria convergir.

Note que a transformada de Laplace é um operador integral cujo núcleo é dado pela função integrável $K(s,t) = e^{-st}$. Além disso, a transformada de Laplace constitui-se numa importante ferramenta para a resolução de equações diferenciais ordinárias.

Definição 9.34 (Função de Gel'fand-Shilov) *Sejam $\alpha > 0$, definimos a função de Gel'fand-Shilov como*

$$\phi_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t \leq 0. \end{cases} \tag{135}$$

Definição 9.35 *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função $f(t)$ seccionalmente contínua no intervalo $(0,\infty)$ e integrável em qualquer subintervalo de $[0,\infty)$ é dada por*

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \tag{136}$$

com $Re(\alpha) > 0$, $t > 0$ e $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Observação 9.1 *Note que a integral fracionária de Riemann-Liouville pode ser representada pela seguinte convolução*

$$J^\alpha f(t) = (f * \phi_\alpha)(t), \tag{137}$$

sendo ϕ_α definida em (135).

Definição 9.36 *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$, assim $m-1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função é dada por*

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m+1}}\, d\xi. \tag{138}$$

Aplicação da Tautócrona

Como é feito na referência [2]. O problema da Tautócrona consiste em determinar uma curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida.

A solução proposta por Abel baseia-se no princípio da conservação de energia, que afirma que a energia total em um sistema isolado permanece constante. Aplicando este princípio, chegamos à seguinte equação integral

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y_0 - \xi)^{-1/2} s'(\xi)\, d\xi \tag{139}$$

onde τ represente o tempo total da queda. No caso em que a curva é tautócrona temos que τ é uma constante. Notemos que a equação (139) pode ser vista como um produto convolução. Neste caso, aplicando transformada de Laplace em ambos os membros obtemos após algumas substituições a seguinte equação diferencial

$$\frac{ds}{dy} = 2C_0 \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{140}$$

sendo $C_0 = \frac{\tau}{\pi}\sqrt{2g}$ e g a aceleração da gravidade.

CONCLUSÕES

Abel, partindo da equação (139), exibiu uma forma alternativa, utilizando o conceito de derivada fracionária, para obter a mesma equação (140). Tal solução baseia-se no fato de que a integral da equação (139) é igual a integral fracionária de ordem 1/2 da função $\frac{ds}{dy}$. Assim aplicando a derivada de Riemann-Liouville de ordem 1/2 em ambos os lados da equação, e usando que $D^{1/2}\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot D^{1/2}J^{1/2}s'(\xi)\,d\xi$. também é possível obter a mesma equação (140).

BIBLIOGRAFIA

[1] CAMARGO, R.F., **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica., Campinas, 2009.

[2] RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. C.Q.D. - **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. Bauru, v. 1, p. 15-22, dez. 2012.

A calculadora HP-12C como ferramenta essencial em cálculos financeiros

Farias de Oliveira, Luiz Gustavo[523]; Oliveira Neto, Guilherme Luiz de[524] e Costa, Ronaldo Campelo da[525]

Resumo: *Este estudo destaca o uso da calculadora HP-12C como uma ferramenta essencial para o aprendizado e domínio da Matemática Financeira. A metodologia inclui familiarizar os alunos com as funcionalidades da calculadora e resolver problemas financeiros do cotidiano. Ao dominar a HP-12C, os alunos podem realizar cálculos complexos, como juros compostos e taxas de retorno, e compreender questões financeiras pessoais e profissionais. Isso melhora sua confiança na resolução de problemas financeiros e capacidade de análise crítica, proporcionando uma base sólida em Matemática Financeira para várias áreas, como administração, contabilidade e economia. Em resumo, o uso da HP-12C oferece uma abordagem eficiente para o ensino e aprendizado dos conceitos financeiros, capacitando os alunos a tomar decisões informadas e embasadas.*

Palavras-chave: *Matemática financeira, calculadora HP, empréstimos, investimentos.*

INTRODUÇÃO

A compreensão dos conceitos financeiros é essencial para tomar decisões informadas e eficazes em nossa vida pessoal e profissional. Nesse contexto, tópicos como empréstimos, financiamentos, investimentos e amortizações desempenham um papel fundamental. Para entender esses temas, é necessário dominar fórmulas e cálculos específicos. Neste contexto, a calculadora HP-12C surge como uma ferramenta valiosa, oferecendo uma abordagem prática e eficiente para resolver problemas financeiros do dia a dia. Neste trabalho, exploraremos algumas fórmulas-chave relacionadas a esses tópicos, fornecendo uma breve explicação de cada uma e destacando sua importância na análise financeira.

Conhecendo alguns conceitos de matemática financeira

A compreensão dos conceitos financeiros é crucial para decisões embasadas e eficientes em diversos aspectos da vida pessoal e profissional. No estudo da Matemática Financeira, temas como empréstimos, financiamentos, investimentos e amortizações desempenham um papel vital. Dominar fórmulas e cálculos

[523]IFPI/ *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI
[524]IFPI/ *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI
[525]IFPI/ *Campus* Picos. Este autor foi apoiado pelo IFPI

específicos é essencial para compreender esses temas. Nesse sentido, a calculadora HP-12C emerge como uma ferramenta indispensável, oferecendo uma abordagem prática e eficaz para solucionar problemas financeiros cotidianos.

Ao explorar as fórmulas apresentadas, buscamos fornecer uma visão clara e sucinta de cada uma delas, destacando sua relevância na análise financeira. Essas fórmulas, aliadas à capacidade da HP-12C de executar cálculos complexos de forma rápida e precisa, são fundamentais para a compreensão e aplicação dos princípios da Matemática Financeira, conforme destacado no resumo do trabalho.

A familiarização com a calculadora também facilitou a compreensão de tópicos relacionados a empréstimos, financiamentos e investimentos, proporcionando uma compreensão mais aprofundada das questões financeiras enfrentadas na vida pessoal e profissional.

Quanto as expressões sintetizadas pela calculadora HP-12C temos empréstimos/ financiamentos e investimentos, temos:

$$PMT = PV \cdot \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \quad \text{e} \quad FV = PMT \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{141}$$

Onde as siglas PMT representa o valor da parcela mensal; FV é o valor futuro do investimento; PV é o valor presente do financiamento; i é a taxa de juros por período; n é o número total de pagamentos.

Aplicações práticas

A Calculadora HP-12C é uma ferramenta fundamental na matemática financeira, oferecendo uma variedade de cálculos essenciais para empréstimos, financiamentos, investimentos e análises financeiras. Com ela, é possível calcular pagamentos, valores presentes e futuros, taxas de juros e muito mais, facilitando decisões financeiras importantes. Além disso, a HP-12C é útil para a análise de fluxo de caixa, depreciação de ativos, análise de risco e retorno, e muito mais, destacando sua versatilidade e importância em diversos contextos financeiros.

CONCLUSÕES

O cerne deste estudo revela que a utilização da calculadora HP-12C como recurso de aprendizagem em Matemática Financeira traz benefícios substanciais aos estudantes. Ao se familiarizarem com as funcionalidades da calculadora e resolverem problemas financeiros do mundo real, os alunos desenvolvem habilidades cruciais de análise, tomada de decisão e aplicação dos princípios financeiros fundamentais. Esta abordagem eficaz os capacita a fazer escolhas financeiras informadas, fundamentadas e confiantes, utilizando uma ferramenta precisa e eficiente como a HP-12C, conforme destacado tanto no resumo quanto na introdução anteriormente apresentados.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012

[2] CASTELO BRANCO, Anísio Costa. **Matemática Financeira Aplicada: Método Algébrico, HP-12C, Microsoft Excel**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

[3] GUERRA, Fernando. **Matemática Financeira Através da HP-12C**. Florianópolis: Editora da UFSC, 2001

[4] MARTINS, Madeira. MARTINS, Silvana Neumann. REHFELDT, Márcia Jussara Hepp. **Principais funções e aplicações da calculadora HP 12C na Matemática Financeira para o Curso de Ciências Contábeis**. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas (Mestrado) Centro Universitário UNIVATES, Lajeado-RS, 2017.

[5] MATHIAS, Washington Franco e GOMES, José Maria. **Matemática Financeira**. 2ª edição. Editora Atlas, São Paulo, 1993.

A jornada de uma estudante neurodivergente na licenciatura em matemática: estudos e reflexões

Bernardini, M. A.[526] e Carmo, J. S.[527]

Resumo: *O presente trabalho descreve a trajetória de formação da primeira autora na Licenciatura em Matemática, destacando sua condição como pessoa neurodivergente (com Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade, disortografia e dislexia). No início da elaboração do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), em função da constatação de escassa representatividade e reconhecimento dos estudantes neurodivergentes no meio acadêmico, foram solicitadas alterações nas normativas e estruturas para torná-lo acessível. Foram aprovadas em instâncias superiores da universidade frequentada pela primeira autora. As estratégias adotadas consistiram na produção de áudios e apoio visual, aliados a uma linguagem acessível. Além de fatores ligados à vida pessoal da autora, o estudo baseou-se em ampla pesquisa, abordando tópicos como: habilidades cognitivas necessárias para a aprendizagem da matemática; e afetadas pelo TDAH e dislexia, dentre outros pertinentes ao entendimento do funcional neural de pessoas neurodivergentes. A pesquisa contou com textos aprovados por pares, excluindo a literatura cinza, utilizando operadores booleanos, em três bases de dados e idiomas, no período de 2018 a 2022. Aspectos cruciais da vida da autora foram discutidos, incluindo seu diagnóstico, trajetória no ensino superior e estratégias empregadas para lidar com as dificuldades. O estudo também abordou as microagressões no ambiente acadêmico, testando sua relação com a ansiedade matemática e promovendo a Resiliência Matemática como um conceito chave para alteração deste prisma. Em suma, o trabalho propõe soluções concretas para inclusão e representatividade de estudantes neurodivergentes, enfatizando a importância da compreensão das habilidades cognitivas e das estratégias de ensino inclusivas para a mudança.*

Palavras-chave: *TDAH + Dislexia, aprendizagem matemática, neuro divergente, estudantes universitários e licenciatura em matemática.*

METODOLOGIA

Primeiramente foi conduzida uma revisão bibliográfica da literatura com o objetivo de abordar tópicos relacionados à aprendizagem matemática por estudantes universitários, com a inclusão de três bases de dados, filtrando as pesquisas dos últimos 5 anos, a partir de 2018 e demais critérios de exclusão foram utilizados. As pesquisas foram analisadas conforme relacionava a aprendizagem matemática por estudantes universitários com Transtorno de Déficit de Atenção Hiperatividade (TDAH) e/ou dislexia, incluindo os preditores para o

[526] Afiliação.

[527] Afiliação. Este autor foi apoiado pela Universidade Federal de São Carlos

sucesso acadêmico para essa pequena parcela de alunos. Em seguida, a partir de uma pesquisa bibliográfica documental, foram identificados documentos que abordam a saúde, funcionamento escolar, relacionamento social, socioeconômico e outros fatores atrelados à vida da autora. Posteriormente, foi desenvolvida uma narrativa acerca de sua própria experiência como estudante neurodivergente na Licenciatura em Matemática e em como a acessibilidade e representatividade podem ser melhoradas neste meio acadêmico.

ACHADOS DO ESTUDO

O texto analisa pesquisas relevantes sobre TDAH, dislexia, aprendizagem matemática e estudantes universitários, buscando compreender como a aprendizagem matemática acontece para estudantes com essas condições. Destaca-se a influência da motivação, autoconfiança, autodeterminação, autodeterminação e relatos de outros estudantes neurodiversos (Daffner et al., 2022; Burr, Lefevre, 2020; Wu et al., 2019; Pfeifer et al., 2020) e as habilidades cognitivas afetadas pela dislexia, com contribuições de pesquisadores matemáticos disléxicos como trazidas por Lambert e Harris (2022). No âmago do estudo, são analisados relatos de pesquisa sobre TDAH e comorbidades na graduação do STEM (Pfeifer et al., 2020), assim como os preditores para entrada nesse campo (Shifrer, Freeman, 2021). Aspectos cruciais da vida da autora antes do ensino superior são explorados, como sua cidade natal, família, diagnóstico e tratamentos, e como esses fatores influenciaram seu desenvolvimento. Durante a graduação, são discutidas as estratégias usadas e as consequências da falta de representatividade de estudantes neurodivergentes (Silva et al., 2023). O estudo também aborda as microagressões no ambiente acadêmico, especialmente na matemática, como destacado por Silva et al. (2023) e seu efeito na ansiedade matemática (Carmo et al., 2019). Isso culmina na introdução do conceito de "Resiliência Matemática", que está sendo investigado no Brasil (Carmo, Pará, Johnston-Wilder, no prelo). Reconhecer e enfrentar as microagressões, reduzir a ansiedade e promover a resiliência são apontados como essenciais para criar ambientes educacionais inclusivos (Carmo et al., 2019).

CONCLUSÕES

Em conclusão, o estudo representa um avanço para a inclusão de estudantes neurodivergentes na academia. A revisão bibliográfica e a pesquisa empírica oferecem um entendimento mais profundo das experiências e desafios desses estudantes. Ao conectar microagressões, ansiedade matemática e resiliência matemática, o estudo destaca a importância de uma abordagem holística. Reconhecer e enfrentar as microagressões, juntamente com a promoção da resiliência, beneficia não apenas os estudantes neurodivergentes, mas também enriquece o campo da Matemática. O estudo não apenas relata uma experiência pessoal, mas também contribui para um ensino mais inclusivo e uma sociedade mais diversa e justa.

BIBLIOGRAFIA

[1] Burr, S. M. D. L., and LeFevre, J.-A. Confidence is key: Unlocking the relations between adhd symptoms and math performance. *Learning and Individual Differences 77* (2020), 101808.

[2] Carmo, J. d. S., Pará, T. S., and Johnston-Wilder, S. Da ansiedade matemática à resiliência matemática: caminhos para a superação e inclusão. In *Ensino e aprendizagem: interlocuções com a psicologia da educação matemática,* S. L. Lautert and E. M. d. Santos, Eds. EDUPE, Recife, no prelo.

[3] da Silva, G. H. G., Lautert, S. L., dos Santos Carmo, J., dos Santos, E. M., and dos Santos, D. E. L. Microagressões no contexto de ensino e aprendizagem da matemática: uma análise teórico-conceitual. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática 25,* 1 (2023), 283–304.

[4] Daffner-Deming, M. *From orientation to graduation: Predictors of academic success and retention for college freshmen with ADHD.* PhD thesis, Lehigh University, 2021.

[5] dos Santos Carmo, J., Gris, G., and dos Santos Palombarini, L. Mathematics anxiety: Definition, prevention, reversal strategies and school setting inclusion. Inclusive mathematics education: *State-of-the-art research from Brazil and Germany* (2019), 403–418.

[6] Lagacé-Leblanc, J., Massé, L., and Rousseau, N. Academic impairments faced by college students with attention-deficit hyperactivity disorder: A qualitative study. *Journal of Postsecondary Education and Disability 35,* 2 (2022), 131–144.

[7] Lambert, R., and Harriss, E. Insider accounts of dyslexia from research mathematicians. *Educational Studies in Mathematics 111,* 1 (2022), 89–107.

[8] Pfeifer, M. A., Reiter, E. M., Hendrickson, M., and Stanton, J. D. Speaking up: A model of self-advocacy for stem undergraduates with adhd and/or specific learning disabilities. *International Journal of STEM Education 7,* 1 (2020), 1–21.

[9] Shifrer, D., and Mackin Freeman, D. Problematizing perceptions of stem potential: Differences by cognitive disability status in high school and postsecondary educational outcomes. *Socius 7* (2021), 2378023121998116.

[10] Wu, I., Molina Jr, R. M., et al. Self-determination of college students with learning and attention challenges. *Journal of Postsecondary Education and Disability 32,* 4 (2019), 359–375.

Contribuição de mulheres para o ensino e pesquisa de matemática

Belini, Marcela E.[528] e Salvador, José A.[529]

Resumo: *Nesta exposição, iremos destacar alguns feitos significativos de mulheres no campo da ciência, com ênfase em suas realizações no ensino e na pesquisa da Matemática. Nosso foco estará na compilação e apresentação de painéis informativos que destacam de forma concisa e precisa as conquistas e principais contribuições de mulheres matemáticas que desempenharam papéis cruciais na disseminação e aprimoramento da pesquisa e do ensino desta disciplina. Essas mulheres superaram diversas dificuldades e preconceitos ao longo do caminho, deixando um legado inspirador e impactante para as gerações futuras.*

Palavras-chave: *História, mulheres matemáticas, contribuições femininas para a matemática.*

INTRODUÇÃO

A proposta desta mostra é destacar as significativas contribuições de mulheres para o campo do ensino e pesquisa da Matemática. Através de painéis individuais, detalharemos as realizações específicas de figuras notáveis como Hypatia, Maria Gaetana Agnesi, Marie-Sophie Germain, Sofia Kovalevskaya, Katherine Coleman Goble, Evelyn Boyd Granville, além de destacarmos importantes figuras brasileiras, como Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, entre outras. Estas exposições foram meticulosamente pesquisadas com o objetivo de exibi-las nas colunas do Departamento de Matemática da UFSCar durante a IX Bienal da SBM 2024.

Algumas mulheres matemáticas

O legado das mulheres na matemática e ciência é vasto e profundamente inspirador. Entre elas, vamos destacar algumas aqui:

Hipátia de Alexandria, uma matemática, astrônoma e filósofa neoplatônica do século IV d.C. Hipátia é reconhecida por suas notáveis contribuições para a preservação e transmissão do conhecimento grego clássico, em um período em que as mulheres enfrentavam desafios significativos para se destacarem em campos dominados por homens. Sua trágica morte em 415 d.C. simboliza o conflito entre a razão e a intolerância religiosa da época.

Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), filha de um renomado professor de Matemática na Universidade de Bolonha, destacou-se desde a infância por sua excepcional habilidade em línguas e estudos acadêmicos. Entre suas realizações mais notáveis está a publicação dos "Fundamentos Analíticos para o Uso da Juventude Italiana", em quatro extensos volumes, que ofereciam uma abordagem didática abrangente de tópicos como

[528] UFSCar

[529] DM-UFSCar

Álgebra, Geometria Analítica, Cálculo e Equações Diferenciais. Agnesi também é lembrada por seus estudos sobre a curva representada por

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, \quad a \in \mathbb{R},$$

que mais tarde recebeu o nome de "Curva da Bruxa" como mostramos ressaltada cobrindo a sua cabeça na Figura 162.

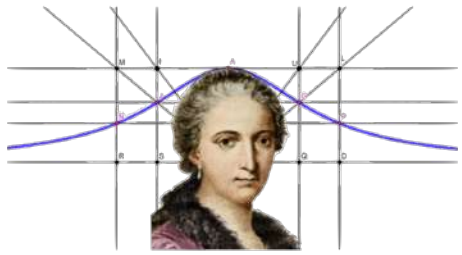


Fig. 162: Agenesi e a Curva da Bruxa

No século XIX, Marie-Sophie Germain enfrentou desafios semelhantes devido à sua condição de mulher. Ela se destacou na matemática, contribuindo para a teoria dos números e elasticidade, apesar da falta de acesso formal à educação. Seu trabalho pioneiro, especialmente em números primos, a tornou uma figura inspiradora na história da matemática.

Outra figura notável é Sofia Kovalevskaya, uma matemática russa que se tornou a primeira mulher a obter um doutorado em matemática na Europa, em 1874. Kovalevskaya fez contribuições significativas para áreas como a teoria das equações diferenciais parciais e mecânica, abrindo caminho para futuras gerações de mulheres na matemática e ciência.

No contexto da corrida espacial, Katherine Coleman Goble Johnson se destacou como uma matemática e física norte-americana, contribuindo de forma crucial para a NASA. Suas habilidades computacionais foram fundamentais para o sucesso de missões espaciais importantes, como o pouso na Lua da Apollo 11. O reconhecimento de seu trabalho veio através do filme "Hidden Figures" (Estrelas Além do Tempo), que destacou o papel das mulheres afro-americanas na NASA.

Além disso, no Brasil, entre outras citamos a Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, uma pesquisadora renomada na área da educação e psicologia. Suas contribuições na psicologia educacional e no debate sobre políticas educacionais deixaram um impacto duradouro, inspirando gerações de pesquisadores e profissionais da educação.

Evelyn Boyd Granville também foi uma matemática e cientista computacional americana, fez contribuições significativas para a NASA e para a matemática aplicada. Seu trabalho pioneiro na computação relacionada à trajetória de naves espaciais abriu caminho para futuras gerações de mulheres e minorias no campo da ciência e da tecnologia.

O legado dessas mulheres notáveis e de outras serve como uma fonte de inspiração e motivação, demonstrando a importância da perseverança, determinação e talento na superação de barreiras e na busca pela excelência na matemática e ciência.

CONCLUSÕES

Esperamos que os participantes sejam inspirados pelas conquistas das mulheres apresentadas nesta exposição, despertando um maior reconhecimento para o papel crucial que elas desempenharam na ciência e na matemática. Que possam apreciar não apenas a beleza dos trabalhos realizados por essas mulheres, mas também a importância de seus feitos como fonte de motivação para o progresso contínuo em todas as áreas do conhecimento.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARTINS, J. B. **As grandes damas da Física e da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2012.

[2] GRINSTEIN, L.S. & CAMPBELL, P.J, (Editores). **Woman of Mathematics, a bibliographic**. Sourcebook. Greeuwood Press, 1987.

[3] OLSEN L.M. **Woman in Mathematics** . The MIT Press, 1974.

Cultura maker no ensino de matemática com placa arduino[530]

Plácido, Selton Barone[531]; Almeida, Marcio Vieira[532]; Carvalho, Henrique Marins[533] e Jardim, Vânia Batista Flose[534];

Resumo: *Este estudo discute a integração da cultura maker no ensino de Matemática com o uso do Arduino, plataforma de prototipagem eletrônica, visando compreender seu impacto no desenvolvimento de habilidades dos alunos e na formação de professores. É apresentada uma pesquisa, em desenvolvimento, em que é objetivado incluir elementos da cultura maker ao ensino de matemática, apoiada no referencial teórico da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). Embora não haja resultados parciais até o momento, devido ao início do projeto em março de 2024, espera-se apresentar uma revisão da literatura e o esboço de uma atividade específica até a data da apresentação do pôster. Conclui-se que a integração da cultura Maker no ensino de Matemática, por meio do Arduino, pode promover habilidades como resolução de problemas e pensamento crítico entre os professores.*

Palavras-chave: *Cultura maker, ensino de matemática, arduino.*

INTRODUÇÃO

A cultura maker baseia-se a ideia “Faça você mesmo” e pode ser enunciada da seguinte forma: qualquer pessoa, com ferramentas adequadas e o do devido conhecimento, pode criar suas próprias soluções para problemas do cotidiano. Papavlasopoulou e outros (2017) e Cohen e outros (2017) são pesquisas que indicam benefícios na utilização de atividades inspiradas na cultura maker na Educação. Podemos destacar que elas indicam que atividades inspiradas na cultura maker podem auxiliar na melhoria de resultados de aprendizagem e o engajamento dos alunos, pelo fato desse tipo de atividades ser geralmente centradas no estudante, permitindo a exploração de seus interesses e desenvolvimento de suas habilidades.Além disso, os dois textos apontam que esse tipo de atividade possibilita o aprendizado interdisciplinar, pelo fato atividades inspiradas na cultura maker envolverem uma combinação de disciplinas, como engenharia, tecnologia, artes e ciências. Por fim, ambos os textos destacam que as atividades maker incentivam a colaboração e o trabalho

[530]Este trabalho foi apoiado pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - campus São Paulo, no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFSP (PIBIFSP), edital nº SPO.072 de 19 out. 2023

[531]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[532]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[533]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[534]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

em equipe.
Stella e outros (2021) apresentam quatro aspectos da Cultura Maker que podem ser utilizados na Educação, a saber: Aprender a Conhecer; Aprender a Fazer; Aprender a Conviver; e Aprender a Ser. Dessa forma surge a seguinte pergunta: como pesquisas acadêmicas relacionadas ao ensino da Matemática tem abordado elementos da cultura Maker com a utilização do Arduino?

ARDUINO E PESQUISAS RELACIONADAS AO ENSINO DE MATEMÁTICA

A placa Arduino é uma plataforma de prototipagem eletrônica de hardware livre, projetada com um microcontrolador que oferece suporte de entrada/saída embutido. A linguagem de programação utilizada é baseada em C/C++, e a placa é compatível com uma ampla gama de sensores e atuadores.
A incorporação do Arduino em atividades pode alterar a dinâmica da aula, tornando-a mais participativa e dinâmica, assim como aquelas que são inspiradas na cultura maker.
Martinazzo e colaboradores (2014) destacam a utilização do Arduino em experimentos durante aulas de Física. Segundo os autores, a utilização do Arduino, juntamente com os sensores acoplados, possibilita a coleta de dados de boa qualidade a partir da utilização de objetos e de conceitos físicos, restando propor que, didaticamente, o sistema Arduino pode ser utilizado por escolas e universidades para favorecer o aprendizado do aluno.
Silva e Baroni (2020) apresentam uma atividade para o ensino de matemática, com o Arduino. Nessa pesquisa foi proposta uma abordagem para o ensino de matrizes utilizando o circuito eletrônico Arduino. Esta proposta envolve a resolução das seguintes situações-problema, incorporando conceitos matriciais: o acionamento de uma matriz de LEDs conectada ao Arduino e a movimentação de um braço robótico em sentido horário e anti-horário, utilizando quatro servos motores, indicando a cada nova posição uma nova matriz.
Dessa forma, é possível verificar que já existem pesquisas que tem utilizado o Arduino no ensino de Matemática. Na próxima seção, vamos apresentar qual é o referencial teórico e metodológico do projeto de pesquisa apresentado.

REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO DO PROJETO

Com relação a estratégia metodológica para o desenvolvimento do projeto. Entendemos que a pesquisa possui natureza teórica e para o desenvolvimento do levantamento bibliográfico sobre atividades para o ensino da Matemática desenvolvidas na perspectiva da cultura maker desenvolvidas em pesquisas realizadas em âmbito nacional. Será realizado um estudo documental, sendo essa uma pesquisa do tipo levantamento bibliográfico. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2009, p. 102) esse tipo de pesquisa realiza-se sobre qualquer tipo de documentação escrita. Para esse estudo, serão desenvolvidas pesquisas em repositórios tanto de pesquisa quanto de artigos que apresentem atividades para o ensino da Matemática que utilizaram placas Arduino.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendemos que seja necessária fornecer formação básica aos professores de Matemática, capacitando-os a integrar efetivamente elementos da cultura maker em sua prática pedagógica. Isso pode envolver tanto a familiarização com outras ferramentas de fabricação digital como o Arduino quanto a compreensão dos princípios subjacentes à abordagem maker. Por isso, é necessário que as Instituições de Ensino Superior, possam auxiliar tanto na formação inicial quanto na continuada de professores de Matemática, contato com atividades que possibilitem aos licenciados e professores conhecerem elementos da cultura maker e que possam, futuramente, ter condições de desenvolver esse tipo de atividades em sua prática pedagógica.
Finalizamos indicando que como o projeto iniciou-se em março de 2024, ainda não temos resultados parciais do projeto. Contudo, até a apresentação do pôster, serão apresentados a revisão de literatura sobre o tema e a proposta de atividade selecionada.

BIBLIOGRAFIA

[1] COHEN, J., HUPRICH, J., JONES, W. M., SMITH, S. Educators' perceptions of a maker-based learning experience. **International Journal of Information And Learning Technology**, v. 34, n. 5, p.428-438, 2015.

[2] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S.. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3ª Edição. Campinas: Autores Associados, 2009.

[3] MARTINAZZO, C. A.; TRENTIN, D. S.; FERRARI, D.; PIAIA, M. M.. Arduino: uma Tecnologia no Ensino de Física. **Perspectiva**, vol. 38, n. 143, p. 21-30.

[4] PAPAPVLASOPOULOU, S.; GIANNAKOS, M. N.; JACCHERI, L.. Empirical studies on the Maker Movement, a promising approach to learning: a literature review. **Entertainment Computing**, v. 18, p. 57-78, 2017.

[5] SILVA, F. A. A.; BARONI, M. P. M. A.. Proposta para o ensino de matrizes através do circuito eletrônico Arduino. **ACTIO: Docência em Ciências**, v. 5, n. 1, p. 1-20, 2020

[6] STELLA, A. L.; FIGEIREDO, A. P. S.; SILVA, D. D. S. S. D.; AMARAL, M. C.; SACHETTI, W. L. BNCC e a cultura maker: uma aproximação na área da matemática para o ensino fundamental. **Revista InovaEduc**, Campinas, SP, n. 4, p. 1–37, 2021.

Explorando elementos da cultura maker no ensino de matemática com impressoras 3D[535]

Silva, Danielle Agostinho[536]; Almeida, Marcio Vieira[537]; Carvalho, Henrique Marins[538] e Jardim, Vânia Batista Flose[539];

Resumo: *Esta comunicação apresenta um projeto de pesquisa que está em desenvolvimento e que visa desenvolver realizar um levantamento bibliográfico e uma atividade que integre a impressora 3d no ensino de Matemática, explorando elementos da cultura maker. Essa cultura, centrada na criatividade, experimentação e colaboração, tem sido reconhecida como um movimento eu possibilita uma aprendizagem prática. A abordagem metodológica adotada, no projeto apresentado, envolve um levantamento bibliográfico sobre pesquisas acadêmicas que integram a tecnologia de impressão 3D no ensino de Matemática. Apesar disso, são identificados desafios, como dificuldades técnicas e a necessidade de preparação e criatividade na elaboração de atividades. Em resumo, a integração da tecnologia de impressão 3D na educação matemática tem o potencial de modificar como os conceitos matemáticos podem ser ensinados, além de preparando os alunos para os desafios do século XXI.*

Palavras-chave: *Cultura maker, ensino de matemática, impressora 3d.*

INTRODUÇÃO

A Cultura maker pode ser entendida como um movimento que valoriza a criatividade, a experimentação e a colaboração na construção de objetos e artefatos. Ela incentiva a aprendizagem prática, a resolução de problemas e a inovação, promovendo um ambiente propício para o desenvolvimento de habilidades práticas e cognitivas.

Valente e Blikstein (2019) indicam que atividades inspiradas na cultura maker estão sendo inseridas no Ensino Básico e Ensino Superior. Os autores entendem que essas atividades poder ser uma forma com a qual alunos possam aprender conceitos STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics). Esse aprendizado pode ocorrer por meio do desenvolvimento de projetos, sendo mais ativos ao longo de sua própria experiência

[535]Este trabalho foi apoiado pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - campus São Paulo, no âmbito do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFSP (PIBIFSP), edital nº SPO.072 de 19 out. 2023

[536]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[537]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[538]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
[539]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

escolar e mais engajados em atividades centradas em novos tópicos e tecnologias.
Segundo Blikstein, Valente e Moura (2020), o movimento Maker é fundamentado na cultura do "Faça você mesmo", em que pessoas podem construir, consertar, modificar e fabricar uma variedade de objetos e projetos. Esse movimento reúne pessoas em espaços físicos com ferramentas tradicionais e máquinas de fabricação digital, conhecidos como espaços maker, FabLabs, hackerspaces, entre outros. Esses espaços proporcionam acesso a ferramentas de fabricação digital como impressoras 3d, máquinas de corte a laser, dentre outras.
O objetivo deste trabalho é apresentar um projeto de pesquisa na qual são apresentados elementos da Cultura maker para o ensino de Matemática utilizando o equipamento impressora 3d.

IMPRESSORAS 3D E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Impressoras 3D, do tipo FDM (Modelagem de Deposição Fundida – tradução livre da sigla *Fused Deposition Modeling*), são dispositivos capazes de criar objetos tridimensionais por meio de um processo de fabricação que envolve a construção camada por camada de um objeto. Houve um barateamento desses equipamentos nos últimos anos devido à superação de patentes que antes limitavam sua aplicação nesses outros contextos.
No contexto de pesquisas em Educação Matemática, Ng e colaboradores (2022) e Aslan e outros (2022) realizaram revisões da literatura sobre o uso da impressão 3D em pesquisas relacionadas ao ensino de Matemática. Destacamos que em ambos os artigos foram enfatizados que os objetivos do uso de tecnologias de impressão 3D incluíram o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e design de modelos tridimensionais de sólidos. Além disso, a implementação dessa tecnologia na Educação Matemática, entendemos que ela tem um potencial para aprimorar as habilidades mencionadas, contribuindo para o ensino de tópicos e conceitos relacionados ao curso e o desenvolvimento de habilidades matemáticas.
Dessa forma, o uso de tecnologias de impressão 3D pode aprimorar as habilidades dos alunos, como a aquisição de conhecimento e competências digitais, além de interesse e motivação. Destaca-se a importância do uso de software e ferramentas de modelagem 3D de fácil utilização para reduzir as dificuldades técnicas dos alunos. No entanto, existem desafios, como dificuldades técnicas, falhas produtivas e a necessidade de um tempo significativo de preparação e criatividade para projetar atividades.

REFERENCIAL TEÓRICO METODOLÓGICO DO PROJETO

Em relação à abordagem metodológica empregada no desenvolvimento do projeto em questão, é importante reconhecer a natureza teórica dele. Por esse motivo, ele envolve a realização de um levantamento bibliográfico sobre atividades educacionais para o ensino de matemática no âmbito da cultura maker, na qual envolverá principalmente uma análise documental como forma de pesquisa bibliográfica. Fiorentini e Lorenzato (2009) enfatizam que essa metodologia de pesquisa se concentra em fontes escritas de informação. A coleta sistemática de dados é realizada por meio de registros de leitura detalhados, com o objetivo de organizar as informações adquiridas de forma eficiente. Neste estudo em particular, a investigação abrangerá repositórios acadêmicos e artigos em que formam desenvolvidas atividades de ensino de matemática integrando a tecnologia de impressão 3D.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho apresentou uma pesquisa, em desenvolvimento, que objetiva relacionar o ensino de Matemática, utilizando a tecnologia de impressão 3D dentro do contexto da cultura maker.
Foi revelado que o uso de tecnologias de impressão 3D na educação matemática tem o potencial de melhorar o processo de ensino e aprendizagem, proporcionando uma experiência prática, visual e interativa. Além disso, foram discutidos os desafios associados a essa abordagem, como dificuldades técnicas e a necessidade de preparação e criatividade para projetar atividades.
Finalizamos indicando que como o projeto iniciou-se em março de 2024, ainda não temos resultados parciais

do projeto. Contudo, até a apresentação do pôster, serão apresentados a revisão de literatura sobre o tema e a proposta de atividade selecionada.

BIBLIOGRAFIA

[1] ASLAN, A.; CELIK, Y. A literature review on 3D printing technologies in education. **International Journal of 3D Printing Technologies and Digital Industry**, 6, 592–613.2020.

[2] BLIKSTEIN, P.; VALENTE, J.; MOURA, E. M. Educação maker: onde está o currículo? **e-Curriculum**, São Paulo, v. 18, n. 2, 523-544, 2020

[3] FIORENTINI, D.; LORENZATO, S.. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3ª Edição. Campinas: Autores Associados, 2009.

[4] NG, O. L.; TSUI, M. F.; YUEN, M. Exploring the use of 3D printing in mathematics education: A scoping review. **Asian Journal for Mathematics Education**, v. 1, n. 3, 338–358. 2022.

[5] VALENTE J. A.; BLIKSTEIN, P. Maker education: where is the knowledge construction? **Constructivist Foundations**, v. 14, n. 3. 252–262.2019.

O uso do pensamento computacional como estratégia de resolução de problemas de porcentagem no sexto ano do ensino fundamental

Pereira, João Carlos Silva[540]; Leonel, Marcos André Silva[541] e Silva, Teófilo Viturino da[542]

Resumo: *Este estudo investigou o impacto do pensamento computacional no ensino de porcentagem em alunos do 6º ano do ensino fundamental, comparando uma turma experimental, que utilizou o método inovador, fazendo uso das competências do pensamento computacional, com uma turma controle, que seguiu o método tradicional, utilizando apenas no livro didático. Os resultados indicaram que a turma experimental apresentou um aumento nas médias de acertos após a intervenção, embora desafios significativos permanecessem em questões mais complexas. A pesquisa sugere a necessidade de estratégias de ensino que interliguem teoria e prática, e destaca a importância de adaptar métodos pedagógicos para aprimorar o aprendizado matemático dos alunos.*

Palavras-chave: *Pensamento computacional, ensino de matemática, educação fundamental, métodos de ensino, porcentagem.*

INTRODUÇÃO

O estudo propôs explorar as tecnologias educacionais no ensino de porcentagem para alunos do sexto ano. Optamos por integrar Pensamento Computacional como uma abordagem inovadora, unindo princípios computacionais a desafios matemáticos.

O termo Pensamento Computacional foi inicialmente introduzido no livro Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas, em 1980, por Seymour Papert, tratando da relevância de instruir as crianças nas noções fundamentais da computação, enfatizando como esse conhecimento poderia capacitá-las a se adaptar à evolução tecnológica.

O estudo buscou responder à pergunta: Qual é a relevância das competências do pensamento computacional no ensino de porcentagem para alunos do sexto ano do ensino fundamental em comparação com métodos tradicionais? Para isso, objetivamos comparar os resultados da integração do pensamento computacional no ensino de porcentagem, em relação ao método tradicional, visando identificar a abordagem mais eficaz para o aprimoramento da compreensão e aplicação deste conceito matemático.

[540] IFPE
[541] IFPE
[542] IFPE

[1] apresenta uma abordagem inovadora na integração do Pensamento Computacional no currículo escolar, visando a melhoria do letramento matemático e o desempenho dos alunos, isso agregou-se profundamente com nossos objetivos pedagógicos.

Os objetivos específicos incluíram avaliar os desempenhos pré-intervenção e pós-intervenção dos alunos, treinar uma IA para identificar competências e comparar dificuldades entre métodos tradicionais e a abordagem computacional.

METODOLOGIA

Para atingir os objetivos desta pesquisa, optou-se por trabalhar em duas turmas do sexto ano do ensino fundamental da Escola Municipal de Educação Santa Sofia localizada na Rua Santa Sofia, S/N, Bairro Camoxinga, Santana do Ipanema – Alagoas, CEP: 57500-000. A turma "A", designada como a turma experimental, e a turma "B", a turma controle. Antes de iniciar as aulas de porcentagem, foi realizado um pré-teste para avaliar o nível de compreensão de cada turma sobre o assunto. Após o pré-teste, a turma controle prosseguiu com o uso do material didático convencional utilizado pela escola que é o livro do Ênio Silveira, Matemática: compreensão e prática. 5. Ed. São Paulo: Moderna, 2018. Enquanto na turma experimental o material foi adaptado para contemplar as competências do pensamento computacional.

No desenvolvimento do nosso projeto, direcionamos nossos esforços para treinar uma inteligência artificial que pudesse identificar competências de pensamento computacional nas questões de atividades de livros didáticos. Para isso, utilizamos o ChatGPT-4, um modelo avançado de processamento de linguagem natural desenvolvido pela OpenAI. Optamos pelo ChatGPT-4 devido à sua capacidade de compreensão de texto e aprendizado de máquina supervisionado, escolhendo Árvores de Decisão como nossa técnica principal devido à sua eficácia comprovada em tarefas de classificação.

RESULTADOS E ANÁLISES

Na tabela 1 podemos observar os dados obtidos no teste pré-intervenção.

Questão	Média da Turma Experimental (%)	Média da Turma Experimental (%)
1	$\approx$ 14,70	$\approx$ 10,71
2	$\approx$ 36,76	$\approx$ 21,42
3	0	0
4	$\approx$7,35	$\approx$1,19
5	0	0

Tab. 15: Média de acertos pré-intervenção

Agora na tabela 2 estão os dados coletados no teste pós-intervenção.

Questão	Média da Turma Experimental (%)	Média da Turma Experimental (%)
1	$\approx$ 26,47	$\approx$ 52,38
2	$\approx$ 55,88	$\approx$ 77,38
3	0	$\approx$ 33,33
4	$\approx$ 10,29	$\approx$ 27,38
5	$\approx$ 1,56	$\approx$ 33,33

Tab. 16: Média de acertos pós-intervenção

Os resultados apontam para um avanço notável na Turma Experimental em comparação com a Turma Controle, especialmente nas questões envolvendo interpretação e na capacidade de manipular e aplicar aumentos e descontos percentuais de maneira efetiva. Ainda assim, em ambas as turmas, as questões que envolvem cenários práticos ou cálculos mais complexos de porcentagens ressaltam a importância de revisões didáticas e abordagens que incentivem a aplicação prática do conhecimento matemático.

CONCLUSÕES

A intervenção teve um efeito positivo na Turma Experimental, como evidenciado pelo aumento geral nas médias de acertos em comparação com a Turma Controle. No entanto, questões específicas que requeriam um entendimento mais aprofundado de descontos, aumentos percentuais e a aplicação de porcentagens em situações excepcionais continuaram a ser desafiadoras para ambos os grupos.

As considerações finais deste estudo apontam para a inclusão de métodos que incentivem o raciocínio lógico e a resolução de problemas pode ser benéfica. Além disso, há um chamado claro para a adoção de abordagens de ensino que integrem melhor a teoria e a prática, permitindo aos alunos não apenas realizar cálculos matemáticos, mas também aplicar seu conhecimento de forma significativa em suas vidas cotidianas.

BIBLIOGRAFIA

[1] SILVA, Teófilo Viturino da. **O pensamento computacional como ferramenta de resolução de problemas de matemática**. 2020.

Grupo das classes via redes complexas

A fórmula de Dirichlet do número de classes para corpos quadráticos imaginários

Ribeiro Bernardo Silvério, Marcus Vinicius[543] e Teixeira Godinho, Hemar.

Resumo: *Por meio de ideais do anel dos inteiros algébricos de um corpo imaginário quadráticos em paralelo com Redes Complexas é possível construir um grupo abeliano finito $Cl(-n)$ conhecido como Grupo das Classes. Através de conceitos da Análise Complexa, definimos a função Zeta Dedekind junto às séries de Dirichlet permitindo definir e caracterizar a Função Zeta de Riemann e as $L-$Funções de Dirichlet resultando na fórmula do número das classes de ideais a qual representa a ordem do grupo $Cl(-n)$.*

Palavras-chave: *Anel dos inteiros Algébricos de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$; Grupo das classes; Redes Complexas; Fórmula do número das classes.*

INTRODUÇÃO

Seja $n \in \mathbb{N}$ um número livre de quadrados, uma extensão imaginária quadrática $\mathbb{Q}(\sqrt{-n}) = \{a + b\sqrt{-n};\, a,\, b \in \mathbb{Q}\}$ forma um espaço vetorial de dimensão 2 sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$.

O ANEL DOS INTEIROS ALGÉBRICOS $\mathcal{O}_{-n}$

O anel dos inteiros algébricos de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-n}\right)$ é descrito por:

$$\mathcal{O}_{-n} = \begin{cases} \mathbb{Z} + \sqrt{-n}\cdot\mathbb{Z} & \text{se } n \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ \mathbb{Z} + \left(\frac{1+\sqrt{-n}}{2}\right)\cdot\mathbb{Z} & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}.$$

Ideais Fracionários de $\mathcal{O}_{-n}$

Definição 9.37 *Para $I = (\alpha_1, \alpha_2)$ um ideal de $\mathcal{O}_{-n}$, diremos que $\mathcal{I}$ é um ideal fracionário de $Cl(-n)$ se:*

$$\text{existe um número algébrico não-nulo } \gamma \in \mathcal{O}_{-n} \text{ tal que } \mathcal{I} = \frac{1}{\gamma}I = \left(\frac{\alpha_1}{\gamma}, \frac{\alpha_2}{\gamma}\right) \subset \mathcal{O}_{-n}.$$

[543]Afiliação. Este autor foi apoiado pela CAPES e CNPq

Proposição 9.13 *Todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{-n}$ possui um único elemento primo $p \in \mathbb{N}$. Assim a fatoração prima de um ideal principal (p) em $\mathcal{O}_{-n}$ é da forma:*

$$\begin{cases} (p) & se \left(\frac{-n}{p}\right) = -1 \\ \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 & se \left(\frac{-n}{p}\right) = 1 \\ \mathfrak{p}^2 & se \left(\frac{-n}{p}\right) = 0 \end{cases}$$

onde $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ e $\mathfrak{p}$ são determinados de acordo com o elemento primo p e $\left(\frac{-n}{p}\right)$ denota o símbolo de Legendre módulo p.

O grupo $\mathcal{C}l(-n)$

O grupo das classes de ideais de $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-n}\right)$ é dado pelo quociente:

$$\mathcal{C}l\,(-n) = \frac{\text{Ideais fracionários de } \mathcal{O}_{-n}}{\text{Ideais Principais fracionários de } \mathcal{O}_{-n}}.$$

Redes Complexas

Definição 9.38 *Um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{C}$ é dito uma rede complexa (denote $\Lambda = \langle \alpha, \beta \rangle$) se existem $\alpha, \beta \in \Lambda$, elementos não nulos, tais que:*

$$\Lambda = \{m_1\alpha + m_2\beta;\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\} \text{ e } im(\tfrac{\beta}{\alpha}) \neq 0$$

Definição 9.39 *Duas redes complexas Λ, $\tilde{\Lambda}$ são ditas equivalentes se existir $\delta \in \mathbb{C}^{\times}$ tal que $\Lambda^* = \delta \cdot \Lambda$, ou seja*

$$\Lambda = \langle \alpha, \beta \rangle \sim \Lambda^* \iff \Lambda^* = \langle \delta\alpha, \delta\beta \rangle .$$

Os ideais de $\mathcal{O}_{-n}$ podem ser interpretados como redes no plano complexo possuindo uma propriedade chamada de multiplicação complexa, a saber:

Definição 9.40 *Dado $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, é dito que Λ é uma rede complexa com multiplicação complexa por ρ (denote MC_ρ) se $\rho\Lambda \subset \Lambda$.*

Teorema 9.36 *O grupo das classes $\mathcal{C}l(-n)$ é finito.*

FÓRMULA PARA O NÚMERO DE CLASSES.

Definição 9.41 *A Função Zeta Dedekind de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ é descrita para $s \in \mathbb{R}$ como:*

$$\zeta_{-n}(s) \overset{def}{=} \sum_{\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{-n}} \mathcal{N}(\mathcal{I})^{-s} = \zeta_{-n}(s) = \prod_{\wp \subset \mathcal{O}_{-n}} \left(1 - \mathcal{N}(\wp)^{-s}\right)^{-1}.$$

Proposição 9.14 *Para $s > 1$, a função zeta Dedekind converge e assume uma forma em produto de Euler dada por:*

$$\zeta_{-n}(s) = \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{-n}{p}\right)=1}} (1 - p^{-s})^{-2} \cdot \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{-n}{p}\right)=0}} (1 - p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p \\ \left(\frac{-n}{p}\right)=-1}} (1 - p^{-2s})^{-1}$$

com p primo; mais ainda, possui um polo simples em $s = 1$ com resíduo $\frac{h(-n)\pi}{A\,w_{-n}}$ onde A denota a área do paralelogramo com vértices 0, 1, β_{-n}, $1 + \beta_{-n}$ em que:

$$A = \begin{cases} n & se\ n \equiv 1, 2 \pmod 4 \\ \frac{n}{2} & se\ n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Para $s > 1$, sejam as funções Zeta de Riemann e $L-$Dirichlet dadas por, respectivamente, $\zeta(s) \overset{def}{=} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}$ e $L_{-n}(s) \overset{def}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-n}{m}\right) m^{-s}$ então:

Proposição 9.15 *Para $s > 1$, temos que*

$$\zeta_{-n}(s) = \zeta(s) \cdot L_{-n}(s).$$

Teorema 9.37 *Seja $h(-n)$ o número das classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ e $w_{-n} = \begin{cases} 2 & se\ n \neq 1,3 \\ 4 & se\ n = 1 \\ 6 & se\ n = 3 \end{cases}$; a quantidade de elementos do conjunto das unidades de $\mathcal{O}_{-n}$, temos que:*

$$L_{-n}(1) = \begin{cases} \dfrac{h(-n) \cdot \pi}{\sqrt{n} \cdot w_{-n}} & \textit{caso } n \equiv 1,2 \pmod 4; \\[2ex] \dfrac{2 \cdot h(-n) \cdot \pi}{\sqrt{n} \cdot w_{-n}} & \textit{caso } n \equiv 3 \pmod 4; \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] WESTON, Tom. **Lectures Lectures on the Dirichlet Class Number Formula for Imaginary Quadratic Fields**, 2004.

[2] ALACA, Saban and WILLIAMS, Kenneth S., **Introductory Algebraic Number Theory**, Cambridge University Press, New York, 2004.

[3] BOREVICH, Z. I. and SHAFAREVICH, I. R.. **Number Theory**, Academic press, London, 1966.

Equações diofantinas com soluções na sequência de Fibonacci

Alvarenga, Roberto[544]; Chaves, Ana[545]; Ramos, Maria[546]; Silva, Matheus[547] e Sosa, Marcos[548]

Resumo: *Sejam* $\{F_m\}_{m\geq 0}$ *a sequência de Fibonacci, com termos iniciais* 0 *e* 1 *e cada termo, a partir do terceiro, sendo a soma dos dois anteriores, e* $\{F_m^{(k)}\}_{m\geq -(k-2)}$ *a sequência de Fibonacci* k*-generalizada, definida com* $k-2$ *termos de índice negativo todos iguais a zero,* $F_0 = 0$*,* $F_1 = 1$*, e cada termo a partir do terceiro sendo a soma dos* k *termos anteriores. No presente texto utilizamos formas lineares em logaritmos para solucionar completamente as equações diofantinas:* $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$ *e* $(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+d}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}$*. Também encontramos todas as soluções para a equação* $F_m^s + F_{m+1}^s + \ldots + F_{m+d}^s = F_n$ *quando* $d+1 < m$*. Onde* m, d, k *e* s *são inteiros positivos.*

Palavras-chave: *Equações diofantinas, sequência de Fibonacci, formas lineares em logaritmo.*

INTRODUÇÃO

Na sequência de Fibonacci $\{F_m\}_{m\geq 0}$ cada termo é obtido somando os dois termos anteriores, sendo o primeiro e o segundo termo iguais a 0 e 1, respectivamente. Os números de Fibonacci aparecem pela primeira vez em literatura no *Liber Abaci*, livro escrito por Leonardo de Pisa século *XIII*, e são conhecidos por possuirem propriedades incríveis. Por exemplo, a soma dos quadrados de dois números de Fibonacci consecutivos também é um número de Fibonacci:

$$F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_{2m+1}. \tag{142}$$

A identidade acima é uma equação diofantina com soluções nos números de Fibonacci, esse é o tipo de equações que investigamos nesse projeto e que também motiva diversos outros trabalhos em Teoria dos Números. Em 2010, Marques e Togbé [1] provaram que se a partir de um m suficientemente grande a soma $F_m^s + F_{m+1}^s$ é um número de Fibonacci, então os únicos valores possíveis para s são 1 e 2. A equação diofantina relacionada à essa soma foi resolvida completamente em 2011 por Luca e Oyono [2], eles provaram que $F_m^s + F_{m+1}^s = F_n$ não possui solução quando $s \geq 3$ e $m \geq 2$, portanto, se o expoente é maior que 2 não é possível conseguir uma identidade como em (142).

Note que até então, só foram consideradas somas de potências de dois números de Fibonacci consecutivos e nada foi dito quando esses números estão separados por uma distância qualquer ou quando é somada uma

[544] ICMC-USP. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

[545] IME-UFG. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

[546] ICEx-UFMG. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

[547] ICMC-USP. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

[548] ILACVN-UNILA. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

quantidade qualquer de potências de termos consecutivos. Neste trabalho, nós investigamos as generalizações do resultado obtido em [2]. Mostramos que a equação diofantina $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$ não possui solução além das já conhecidas, concluíndo que, mesmo se retirarmos a condição dos números de Fibonacci serem consecutivos, não conseguimos uma propriedade como em (142) para potências de grau maior que 2. Além disso, provamos que se $d + 1 < m$, então a equação diofantina $F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n$ não possui soluções quando s e m são pelo menos 3 e d é no mínimo 2, o que indica que mesmo permitindo mais potências de números de Fibonacci consecutivos, se o exponte for mair que 2 ainda não consiguiremos uma propriedade como em (142).

Outra generalização da identidade (142) foi obtida por Chaves e Marques [3] em 2014, na qual os autores consideraram a sequência de Fibonacci k-generalizada $\{F_m\}_{m \geq -(k-2)}$ definida com $k - 2$ termos de índice negativo todos iguais a zero, $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, onde cada termo a partir do terceiro pode ser obtido como a soma dos k termos anteriores. O resultado que obtiveram diz que para $m > 1$ e $k \geq 3$ a equação diofantina $(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}$ não possui solução. Portanto, a identidade (142) não é válida quando aumentamos a ordem da sequência de Fibonacci. Apresentamos uma generalização desse resultado, considerando dois termos não necessariamente consecutivos da sequência k-generalizada de Fibonacci.

RESULTADOS

Teorema 9.38 (Marcos, Maria e Matheus - 2024) *Dados $m \geq 1$, $d \geq 1$ e $s \geq 2$ números inteiros, a equação diofantina:*

$$F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$$

não possui solução quando $(m, d) \notin \{(1, 2), (1, 1)\}$.

Teorema 9.39 (Marcos, Maria e Matheus - 2024) *Sejam $m \geq 3$, $s \geq 3$, $d \geq 2$ inteiros, se $d + 1 < m$ então a equação diofantina:*

$$F_m^s + F_{m+1}^s + ... + F_{m+d}^s = F_n$$

não possui solução.

Teorema 9.40 (Marcos, Maria e Matheus - 2024) *Dados $m \geq 1$ e $k \geq 3$ inteiros positivos, a equação diofantina:*

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+d}^{(k)})^2 = F_n^{(k)}$$

possui solução se, e somente se, $m = d = 1$.

A equação diofantina $F_m^2 + F_{m+1}^s = F_n$ possui solução para todo m natural fixo: como vimos em 142, basta tomar $n = 2m + 1$. Apesar disso, concluímos que as versões mais gerais dessa equação não se comportam da mesma maneira.

BIBLIOGRAFIA

[1] MARQUES, D.; TOGBÉ, A. On te sum of powers of two consecutive Fibonacci numbers. **Proceedings of the Japan Academy Ser. A Math. Sci.**, v. 86, n. 1, p. 174-176, 2010.

[2] LUCA, F.; OYONO, R. An exponential Diophantine equantion related to the powers of two consecutive Fibonacci numbers. **Proceedings of the Japan Academy Ser. A Math. Sci.**, v. 137, n. 2, p. 45-50, 2011.

[3] CHAVES, A.; MARQUES, D. A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutive k-generalized Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 52, n. 1, p. 70-74, 2011.

Modelagem da COVID-19 usando autômatos celulares

da Silva Satelis, Maria Letícia[549] e Ferreira de Souza, Luryane[550]

Resumo: *Este estudo de iniciação científica propõe explorar a aplicação de autômatos celulares na modelagem da disseminação do vírus COVID-19 por meio da simulação computacionais. Busca-se compreender padrões de transmissão e avaliar medidas de intervenção, destacando sua capacidade de melhorar estratégias de saúde pública para controle de epidemias.*

Palavras-chave: *Autômatos celulares, modelagem, COVID-19.*

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática tem suas raízes na antiguidade, tendo suas primeiras aplicações para resolver problemas práticos na agricultura, astronomia e comércio nas civilizações antigas, mas se estabeleceu no Renascimento com o método científico e o trabalho de figuras como Galileu e Newton. A jornada da modelagem matemática na epidemiologia deu-se início com o matemático Daniel Bernoulli que foi pioneiro ao aplicar a matemática na epidemiologia em 1760 [5], demonstrando a eficácia da vacinação contra a varíola. Desde então, a modelagem matemática tem sido crucial para entender e combater doenças infecciosas.

O conceito de autômatos celulares foi criado nos anos 1940 para estudar a auto-replicação. John von Neumann desenvolveu o primeiro autômato celular para explorar a evolução e comportamentos complexos a partir de regras simples. A modelagem por meio de autômatos celulares é uma ferramenta importante para a compreensão de fenômenos pois é um processo iterativo que busca replicar, matematicamente, um comportamento real.

Autômatos celulares são modelos matemáticos que representam sistemas dinâmicos discretos. Eles consistem em uma grade de células que evoluem em passos discretos de tempo, seguindo regras determinísticas baseadas no estado atual da célula e dos estados de células vizinhas [2]. A idéia básica de AC não é tentar descrever um sistema complexo a partir de equações difíceis, mas simular sistemas por meio de interações entre as células regidas por regras simples.

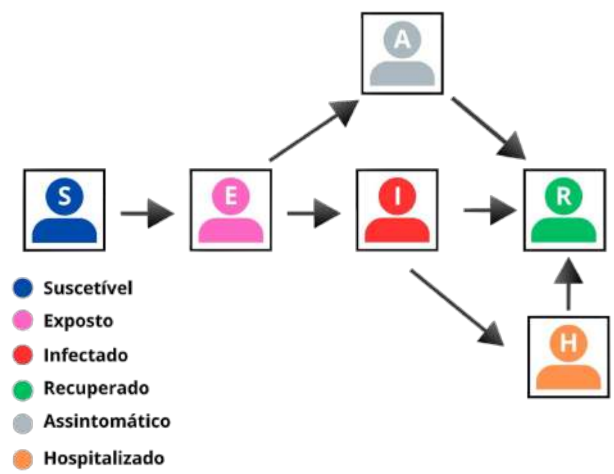
O SARS-CoV-2, um vírus de alta contagiosidade, causou surpresa global e impulsionou um movimento científico significativo. Diversos modelos de propagação foram desenvolvidos para auxiliar os principais órgãos de saúde na tomada de decisões [4]. Com a relevância da modelagem na disseminação de doenças, este estudo visa explorar conceitos da teoria de autômatos celulares e suas aplicações no estudo da disseminação de vírus. Enquanto a maioria dos modelos matemáticos para epidemias se baseia em equações diferenciais ordinárias (EDO), eles apresentam limitações, como as características locais do processo de propagação e não incluem a susceptibilidade variável dos indivíduos [5]. Nossa proposta é simular um modelo que descreva a propagação espacial e temporal da COVID-19 usando modelos discretos.

Neste estudo, exploramos a teoria dos autômatos celulares bidimensionais, com foco em modelos de propagação de doenças a partir de um modelo discreto. Analisamos vários modelos epidemiológicos, incluindo

[549]Universidade Federal do Oeste da Bahia. Este trabalho foi apoiado pelo edital Nº 02/2023 -PIBIC- UFOB
[550]Universidade Federal do Oeste da Bahia. Este trabalho foi apoiado pelo edital Nº 02/2023 -PIBIC- UFOB

o modelo SIR [1], que categoriza indivíduos em três grupos: Suscetíveis (S), Infectados (I) e Recuperados (R). Também examinamos o modelo SEIR, que adiciona um grupo adicional de indivíduos Expostos (E) ao modelo SIR. Por fim, estudamos o modelo SEIAHRV [3], que é uma extensão mais complexa dos modelos anteriores e será o foco principal de nossa pesquisa. O modelo SEIAHRV é uma ferramenta epidemiológica avançada utilizada para entender e prever a propagação de doenças infecciosas, como a COVID-19. No modelo, indivíduos suscetíveis (S) podem ser expostos (E) ao vírus, progredindo para infectados (I) se a doença for transmitida. Alguns infectados podem não apresentar sintomas, tornando-se assintomáticos (A), enquanto outros podem necessitar de hospitalização (H). Após o tratamento ou o curso natural da doença, os indivíduos podem se recuperar (R) ou, infelizmente, falecer devido à doença. O modelo também considera a vacinação (V), dividindo os vacinados em categorias baseadas no número de doses recebidas e na eficácia da vacina.

Fig. 163: O modelo SEIAHRV



CONCLUSÕES

A pesquisa destaca a utilidade dos autômatos celulares na simulação e análise da propagação de doenças infecciosas, exemplificada pela COVID-19. Esses modelos, baseados em regras iterativas, permitem prever a disseminação do vírus, auxiliando na formulação de políticas de saúde pública. A validação do modelo em Python, comparando-o com outros modelos e dados reais, reforça sua precisão e relevância prática. Portanto, os autômatos celulares emergem como uma abordagem promissora para a biologia computacional e o manejo de crises de saúde, contribuindo significativamente para a prevenção e controle de epidemias.

BIBLIOGRAFIA

[1] Almeida, P. R. de.; **Modelos epidêmicos SIR, contínuos e discretos, e estratégias de vacinação.** Dissertação (Mestrado em Epidemiologia), Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2014.

[2] Melotti, G.; Aplicação de Autômatos Celulares em Sistemas Complexos: Um Estudo de Caso em Espalhamento de Epidemias. 93 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

[3] Rocha F.; T. M. et al.; **A data-driven model for COVID-19 pandemic - Evolution of the attack rate and prognosis for Brazil.** Chaos, solitons, and fractals, v. 152, n. 111359, p. 111359, 2021.

[4] Schimit, P. H. T.; **Multi-Strain Epidemic Models of Mutating Viruses with Airborne Transmission Based on Cellular Automata and Ordinary Differential Equations.** Axioms, v. 12, n. 7, p. 632–632, 26 jun. 2023.

[5] White, S. H.; Del Rey, A. M.; Sánchez, G. R.; **Modeling epidemics using cellular automata.** Applied mathematics and computation, v. 186, n. 1, p. 193–202, 2007.

Geodésicas pela perspectiva computacional

Simulações computacionais de curvas geodésicas em superfícies de revolução

Santos, Matheus[551] e Seixas, Wladimir[552]

Resumo: *O estudo de curvas geodésicas em superfícies é uma área importante na geometria diferencial e na matemática aplicada. Intuitivamente, geodésicas são curvas que minimizam a distância entre dois pontos em uma superfície. Nosso objetivo neste trabalho é apresentar uma abordagem computacional para o estudo de curvas geodésicas em superfícies de revolução utilizando softwares gratuitos de simulações geométricas tais como GeoGebra e Geomview.*

Palavras-chave: *Geodésicas, computação, geogebra, geomview, superfícies.*

INTRODUÇÃO

A Geometria Diferencial é o estudo de objetos geométricos utilizando-se das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. Habitualmente, curvas e superfícies são objetos considerados intuitivamente compreensíveis. Assim, muitas das questões que podem ser levantadas sobre estes objetos são tidas como evidentes.

Dessa forma, a Geometria Diferencial preocupa-se com a formulação matemática dessas questões e usando as técnicas do cálculo diferencial, procura solucioná-las. No plano euclidiano $\mathbb{E}^2$, se desejamos ir de um ponto a outro a trajetória mais curta será uma linha reta. Uma linha reta pode ser caracterizada de duas maneiras diferentes no plano: é o caminho mais curto entre dois pontos; é a trajetória que possui curvatura nula à medida que viajamos ao longo dela. Isto posto, transferindo as ideias do plano para uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, as curvas geodésicas irão desempenhar o papel das linhas retas. Ou seja, são trajetórias descritas na superfície que minimizam o comprimento de arco dentre todas as curvas que unem dois pontos na superfície.

Do ponto de vista computacional, é factível o uso de softwares gratuitos de simulações geométricas, como por exemplo GeoGebra, na simulação de curvas geodésicas $\alpha(t)$ cuja expressão analítica é conhecida em uma superfície dada por uma parametrização regular $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Ademais, caso necessário uma simulação numérica mais exata da geodésica, programas auxiliares potentes, como por exemplo Geomview, podem ser utilizados em vista de sua ampla disponibilidade e variedade de linguagens de programação.

Neste trabalho, exploraremos a importância das curvas geodésicas na Geometria Diferencial e, principalmente, o uso de métodos computacionais para simulações numéricas das geodésicas em superfícies de revoluções utilizando do GeoGebra e Geomview.

[551]UFSCar. Este autor foi apoiado pela Coordenação dos Cursos em Matemática, Departamento de Matemática - CCET

[552]UFSCar. Este autor foi apoiado pela Coordenação dos Cursos em Matemática, Departamento de Matemática - CCET

BIBLIOGRAFIA

[1] TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial.**. São Paulo: Blucher, 2008.

[2] DO CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

Códigos e reticulados

Uma introdução à teoria dos códigos

TOLEZANO, Matheus[553] e MARTINS, Victor[554]

Resumo: *Apresentamos os códigos corretores de erros sob o ponto de vista algébrico, demonstrando os benefícios de se mesclar códigos e estruturas algébricas: melhores e mais sofisticados algoritmos de codificação e decodificação de erros. O principal objetivo é estudar elementos geométricos envolvidos na teoria de códigos e assim utilizar toda a base algébrica mesclada a uma visualização geométrica de alguns importantes conceitos. Com isso, nosso objetivo principal é fazer um estudo dos reticulados, que são subgrupos aditivos do espaço euclidiano n – dimensional.*

Palavras-chave: *Códigos algébricos, códigos geométricos, reticulados, teoria da informação.*

INTRODUÇÃO

A partir da segunda metade do século XX, uma nova teoria se firmava, tendo como desbravador C. E. Shannon: a teoria matemática da comunicação, ou teoria dos códigos corretores de erros. Essa teoria utiliza ferramentas estatísticas e algébricas para investigar o processo de transmissão de sinais digitais (ou seja, uma mensagem), através de um canal físico de comunicação sujeito a ruído, entre um emissor e um receptor. Trata-se portanto de uma teoria essencial para todos os processos de envio e armazenamento de informações com grande apelo tecnológico. O fato que nos interessa diretamente é que, no processo de transmissão/armazenamento de uma informação por/em meio eletrônico, a mensagem tem que ser convertida inicialmente em sinal digital, ou seja, codificada, para só então ser transmitida ou armazenada; entretanto, no momento da transmissão/armazenamento, a mensagem pode ser adulterada pela interferência de ruídos que ocorrem devido ao meio físico utilizado, os chamados canais. Por conseguinte, os canais são aperfeiçoados e calibrados de forma a se reduzir a possibilidade de ruído, eliminando-se assim os erros sistemáticos que podem advir do mau uso desses equipamentos e mesmo alguns aleatórios que surgem do ambiente em que os instrumentos operam.

Desenvolveram-se estratégias para correção das mensagens corrompidas pelo ruído inerente aos canais; a mais simples delas é a repetição da mensagem, isto é, a mesma mensagem é remetida várias vezes, pois que a comparação entre as várias recepções pode auxiliar na reconstrução da mensagem original; A questão que surge é que o processamento de mensagens, quer para transmissão, quer para armazenamento, por ser um processo que faz uso de equipamentos físicos, tem um custo. Custo esse que se manifesta no tempo gasto no processo, na energia despendida e até na capacidade dos equipamentos necessários. A redundância, só multiplica esse custo. Assim, é necessário que se estabeleça um balanço ótimo entre o custo para o processamento da mensagem a partir do seu emissor, incluindo a redundância, e a capacidade de correção, para reconstrução da mensagem original, pelo receptor. Ou seja, quanto maior for a redundância acrescentada ao envio da mensagem na emissão, maior será a confiança, na recepção, de que a mensagem será corrigida

[553]Universidade Federal do Espírito Santo
[554]Universidade Federal do Espírito Santo

corretamente, todavia o custo aumentará; em contrapartida, quanto menor for o custo, menor será a confiança. Aí é que entram em cena os chamados códigos detectores e corretores de erro, os quais deram origem à teoria dos códigos de erro, uma teoria matemática que acabou por ganhar vida própria e tornar-se um campo de ativa pesquisa atualmente.

Sabe-se atualmente que a utilização de mais estruturas algébricas sobre um código nos dá mais informações a respeito do mesmo, bem como algoritmos de codificação e decodificação mais eficientes. Neste projeto procuramos estudar os conceitos básicos dos códigos do ponto de vista algébrico a fim de identificar e estudar com mais detalhes as características geométricas dos códigos. Nosso objetivo é entender um pouco sobre a teoria básica dos códigos em diferentes estruturas algébricas, em particular sobre os espaços vetoriais e sobre os reticulados, que são subgrupos aditivos do espaço euclidiano n − dimensional.

Teoria básica de códigos

Considere um conjunto finito A que chamaremos de alfabeto. Um código corretor de erros é um subconjunto próprio qualquer de A^n, para algum número natural n.

Por exemplo, suponhamos que o nosso conjunto A seja o alfabeto da língua portuguesa, formado pelas 23 letras. Nesse caso, a língua portuguesa é um subconjunto próprio P de A, o que o torna um código detector e corretor de erros. De fato, suponha que ao escrevermos a palavra “cathorro", este não é um elemento de P. Portanto, percebe-se que houve um erro e, nesse caso, a correção é possível pois a palavra que mais se assemelha a “cathorro"é “cachorro". Vale observar que esse é um exemplo de código não muito eficiente, já que existem muitas palavras próximas uma das outras. A fim de tornar precisa essa noção de proximidade de palavras, apresenta-se um modo de medir a distância entre palavras de A^n.

Definição 9.42 *Dados dois elementos $u, v \in A^n$, a distância de Hamming entre u e v é definida como*

$$d(u,v) = |\{i;\ u_i \neq v_i, 1 \leq i \leq n\}|.$$

Se C é um código. A distância mínima de C é o número

$$d = min\{d(u,v);\ u, v \in C \ e \ u \neq v\}.$$

A distância mínima é um dos principais parâmetros de um códigos, pois com ela somos capazes de medir a capacidade de correção de um código, como vemos no seguinte resultado:

Teorema 9.41 *Seja C um código com distância mínima d. Então C pode corrigir até $\kappa = \left[\frac{d-1}{2}\right]$ erros e detectar até $d-1$ erros.*

A classe de códigos mais utilizada na prática são os códigos lineares. Nestes códigos, adotamos como alfabeto um corpo finito K. Daí, um código $C \subset K^n$ será um **código linear** se for um subespaço vetorial próprio de K^n.

CONCLUSÕES

Utilizamos [1] para um breve estudo dos fatos básicos da teoria dos códigos algébricos, em particular dos códigos lineares. Em seguida inspirados, principalmente em [2, 3, 4], buscamos utilizar a estrutura dos reticulados para obter algumas visualizações geométricas de conceitos da teoria de códigos.

Uma de nossas motivações para entender melhor a teoria dos reticulados se fundamenta no estudo de empacotamentos esféricos.

Um empacotamento esférico no espaço euclidiano é uma reunião de esferas de mesmo raio de modo que duas esferas não se interceptam ou se interceptam apenas no bordo e um empacotamento reticulado é um empacotamento esférico cujos centros das esferas formam um reticulado. O problema de encontrar o empacotamento esférico que cobre a maior parte do espaço foi relacionado à teoria dos códigos corretores de erros em 1948 por Claude E. Shannon.

BIBLIOGRAFIA

[1] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Códigos corretores de erros**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[2] ARAÚJO, R. R. **Reticulados algébricos e aplicações a códigos e criptografia**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2018.

[3] JORGE, G. C. **Reticulados q-ários e algébricos**. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2012.

[4] LAVOR, C. C.; ALVEZ, M. M. et all. **Uma introdução à teoria de códigos**. Notas em Matemática Aplicada. Vol. 21. SBMAC, 2012.

Análise topológica de dados

Freitas, Mirelle Alves de[555]

Resumo: *Este projeto tem como objetivo estudar propriedades e aplicações de técnicas topológicas na análise de dados, em particular as técnicas introduzidas por Edelsbrunner e Carlsson, que constituem uma adaptação de métodos da teoria usual de homologia para problemas de reconhecimento topológico de padrões em conjuntos de dados. Como objetivo final temos a utilização dessas técnicas em aplicações de identificação biométrica de voz e ou análise de geradores de números aleatórios.*

Palavras-chave: *Homologia, topologia de dados, barcodes, homologia persistente, topologia algébrica.*

INTRODUÇÃO

A Análise Topológica de Dados é um campo recente que emergiu da confluência de vários trabalhos em topologia algébrica e geometria computacional motivados por problemas estatísticos. Embora se possa rastrear abordagens geométricas para análise de dados anteriores, a Análise Topológica de Dados Topológicos realmente começou como um campo com os trabalhos pioneiros de Edelsbrunner [3] e o trabalho de Zomorodian e Carlsson [4] em homologia persistente.

Uma característica importante da ciência moderna é a abundância de dados: uma enorme gama de dados dos mais diferentes tipos estão sendo produzidos a uma taxa sem precedentes.

Duas característica fundamentais desses dados são sua **multidimensionalidade**, que restringe severamente nossa capacidade de visualizá-los e o fato de serem muito mais **ruidosos** do que os dados típicos obtidos anteriormente. Essas características impõem todo um conjunto novo de dificuldades e a Análise Topológica de Dados fornecem um novo arcabouço ferramental para lidar com esses desafios.

Assim, nesta iniciação discutiremos como a topologia pode ser aplicada de modo a obter contribuições úteis para a análise de vários tipos de dados.

Homologia de Grafos

A homologia de grafos formaliza a ideia do número de "buracos"no grafo. É um caso especial de homologia simplicial, assim como um grafo é um caso especial de complexo simplicial. Como um grafo finito é um 1-complexo 1 os únicos grupos de homologia não triviais são H_0 e H_z.

A fórmula geral para o i-ésimo grupo de homologia de um espaço topológico X é:

$$H_i(X) := \ker \partial_i \big/ \operatorname{im} \partial_{i+1}$$

[555]Universidade Federal do ABC

Homologia Persistente

Os paradigmas para a construção da Homologia Persistente são os seguintes:

1. É benéfico substituir um conjunto de pontos de dados por uma família de simplexos, indexados por um parâmetro de proximidade. Isso converte o conjunto de dados em objetos topológicos globais.

2. É benéfico visualizar esses complexos topológicos através das lentes da topologia algébrica - especificamente, através de uma nova teoria da homologia persistente adaptada às famílias parametrizadas.

3. É benéfico codificar a homologia persistente de um conjunto de dados na forma de uma versão parametrizada de um número de Betti: um código de barras (barcode).

Sendo assim, dado um conjunto de dados associamos a uma filtração de complexos simpliciais e assim teremos que a homologia persistente captura características topológicas dos dados em diferentes escalas, através de uma filtração. Uma filtração é uma sequência aninhada de simplexos representando o "crescimento" de K:

$$\varnothing = K_0 \subset K_1 \subset \cdots K_m \subset K_m = K$$

A Figura 164 ilustra esse processo de crescimento para uma nuvem de pontos bidimensional. Com uma métrica definida em nosso espaço (por exemplo, a distância euclidiana), acompanhamos a geração e a destruição de componentes conexas enquanto aumentamos o limiar de distância, ou seja, o alcance da visão de um ponto.

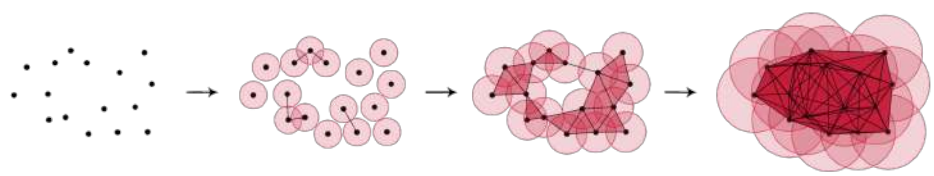


Fig. 164: O processo de filtragem aplicado a uma nuvem de pontos bidimensional. A cada passo m, aumentamos o limite de distância ϵ e, portanto, alteramos as componentes conexas existentes. Como você pode ver na segunda etapa da filtragem, também podemos notar fenômenos topológicos de dimensões mais altas, como ciclos e buracos.

Formalmente, considere uma função à valores reais em um grafo $f : K \to \mathbb{R}$ que não diminui com o aumento das arestas, então $f(\sigma) \leq f(\tau)$ sempre que σ é uma face de τ em K. Então, para cada $a \in \mathbb{R}$ o conjunto de subníveis $K(a) = f^{-1}(-\infty, a]$ é um subgrafo de K e a ordem dos valores de f induz uma ordenação nos grafos de subníveis, o que define uma filtragem.

$$\varnothing = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n = K$$

Quando $0 \leq i \leq j \leq n$, a inclusão $K_i \hookrightarrow K_j$ induz um homomorfismo$f_p^{i,j} : H_p(K_i) \to H_p(K_j)$ no grupos de homologia para cada dimensão p. Os **p-ésimos grupos de homologia persistente** são as imagens desses homomorfismos e os **p-ésimos números de Betti persistente** $\beta_p^{i,j}$ são as dimensões desses grupos.

OBJETIVOS E METAS

Este projeto tem como objetivo familiarizar o aluno com a construção, propriedades e aplicações do Análise Topológica de Dados, através do estudo das diversas relações existentes entre a homologia e a análise de dados. O aluno tomará contato com o ferramental matemático e computacional utilizados no estudo deste tipo de problemas. Dependendo do andar do projeto e do interesse do aluno propomos algumas possíveis caminhos para o desenvolvimento final do projeto:

- Testar e quiçá desenvolver um teste de entropia topológica, análogo ao teste da entropia aproximada e varios outros, como forma de controle de qualidade de geradores pseudoaleatórios com fim específico de uso em criptografia;

- Utilizar as ferramentas de topologia de dados como forma de explorar e quiçá criar um sistema de biometria de voz;
- Utilizar esses métodos no estudo de sistema caótico ou em algum conjunto de dados experimentais.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHUNG, MOO K. Brain Network Analysis. **Cambridge University Press**, 2019.

[2] SHAUN V. AULT Understanding Topology: A Practical Introduction. **John Hopkins University Press**, 2018.

[3] EDELSBRUNNER, H.; MOROZOV, D Persistent homology: theory and practice. **Lawrence Berkeley National Lab**, 2012.

[4] CARLSSON, G. et al. Persistence barcodes for shapes. International Journal of Shape Modeling. **World Scientific**, v. 11, n. 02, p. 149–187, 2005.

Teorema espectral para o operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos

Garcia, Naísa Camila[556] e Marrocos, Marcus Antonio Mendonça

Resumo: *No presente trabalho, abordaremos o problema de autovalores do Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann. Nosso objetivo é estudar o Teorema Espectral para o operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, *onde* Ω_1 *e* Ω_2 *são domínios de* $\mathbb{R}^k$ *e* N *respectivamente.*

Palavras-chave: *Laplaciano Grushin, autovalores, teorema espectral.*

INTRODUÇÃO

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade produto do tipo $\mathcal{M} := \mathbb{R}^k \times N$, onde (N, g_N) é uma variedade Riemanniana fechada e $\mathcal{M}$ é dotada com a métrica Riemanniana produto. O operador Laplaciano Grushin age em $u \in C^\infty(\mathcal{M})$ por:

$$\Delta_G\ u = \Delta^{\mathbb{R}^k}\ u + \|x\|_{\mathbb{R}^k}^{2s}\ \Delta^N\ u$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ e Δ^N denotam respectivamente o Laplaciano Beltrami em $\mathbb{R}^k$ e em N.

Para um domínio limitado (conjunto aberto e conexo) $\Omega \subset \mathcal{M}$ com fronteira C^2, consideramos os problemas de autovalores para o operador Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Neumann ou Dirichlet agindo em $u \in C^\infty(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta_G\ u & = \lambda u \quad em\ \Omega \\ \mathcal{B}_\alpha(u) & = 0 \quad sobre\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{143}$$

$\mathcal{B}_\alpha(u) = \alpha\langle \bullet_G u, \nu\rangle + (1-\alpha)u$, para $\alpha \in \{0,1\}$, em outras palavras, quando $\alpha = 0$ estamos considerando a condição de fronteira de Dirichlet e quando $\alpha = 1$ estamos com condição de fronteira de Neumann, ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\bullet_G u$ é chamado gradiente Grushin de u e é dado por: $\bullet_G u = (\bullet_x u, \|x\|_{\mathbb{R}^k}^s \bullet_y u)$, onde $\bullet_x$ e $\bullet_y$ denotam os gradientes de $\mathbb{R}^k$ e N respectivamente.

O Laplaciano Grushin não é uniformemente elíptico, pois degenera para $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ em pontos da fibra $\{0\} \times N$ no entanto, alguns resultados clássicos da teoria dos operadores elípticos permanecem válidos para o operador Laplaciano Grushin, tais como a desigualdade de Sobolev, a desigualdade de Poincaré e a existência de soluções fracas.

Nosso objetivo é estudar o Teorema Espectral para o operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são domínios de $\mathbb{R}^k$ e N respectivamente.

[556] O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e com o apoio da Universidade Federal do ABC - UFABC.

PRELIMINARES

Definição 9.43 *Seja Ω um domínio de $\mathcal{M}$. Denotamos por $W_G^{1,2}(\Omega)$ o espaço das funções reais em $L^2(\Omega)$ tais que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e $\|x\|^s \frac{\partial u}{\partial y_j} \in L^2(\Omega)$, munido da norma*

$$\|u\|_{W_G^{1,2}(\Omega)} := \left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega \|\bullet_G \; u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, denotamos por $W_{G,0}^{1,2}(\Omega)$ o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_G^{1,2}(\Omega)$.

A partir deste momento, concentraremos nossa atenção exclusivamente na condição de fronteira de Dirichlet.

Definição 9.44 *Uma função $u \in W_{G,0}^{1,2}(\Omega)$ é chamada solução fraca do problema (1) com condição de fronteira de Dirichlet, quando satisfaz*

$$\int_\Omega \bullet_G u \cdot \bullet_G \; \varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi \quad \forall \; \varphi \in W_{G,0}^{1,2}(\Omega)$$

O PROBLEMA DE AUTOVALOR EM DOMÍNIOS CILÍNDRICOS

Para resolver o problema de autovalores com condição de fronteira de Dirichlet em domínios cilíndricos, empregamos o método de separação de variáveis. Nesse contexto, as soluções u do problema (1) podem ser podem ser expressas como

$$u(x,y) = f(x)g(y) \qquad (x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

e o problema (1) torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{rl} -\Delta^N g(y) = & \mu g(y) \;\; em \;\; \Omega_2 \\ g(y) = & 0 \;\; sobre \;\; \partial\Omega_2 \\ -\Delta^{\mathbb{R}^k} f(x) + \mu\|x\|^{2s} f(x) = & \lambda f(x) \;\; em \; \Omega_1 \\ f(x) = & 0 \;\; sobre \;\; \partial\Omega_1 \end{array} \right. \tag{144}$$

O problema de autovalores é então dividido em dois problemas de autovalores acoplados, um para o Laplaciano e outro para o operador Schrodinger com potencial $\mu\|x\|^{2s}$. Conforme amplamente conhecido, o primeiro problema admite uma sequência de autovalores

$$0 < \mu_1(\Omega_2) \le \mu_2(\Omega_2) \le \mu_j(\Omega_2) \le \cdots \nearrow +\infty,$$

com autofunções correspondentes $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormais em $L^2(\Omega_2)$.

Isto posto, para cada μ fixado, o problema de autovalor do operador de Schrodinger admite uma sequência de autovalores

$$0 \le \lambda_1(\mu, \Omega_1) < \lambda_2(\mu, \Omega_1) \le \lambda_j(\mu, \Omega_1) \le \cdots \nearrow +\infty,$$

com autofunções $\{f_j^\mu\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormais em $L^2(\Omega_1)$.

Consequentemente, uma família de autovalores é dada por $\{\lambda_j(\mu_k(\Omega_2), \Omega_1)\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ com autofunções associadas $\left\{g_k f_j^{\mu_k(\Omega_2)}\right\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ que formam um sistema completo em $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, e então

$$\{\lambda_n(\Omega)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda_j(\mu_k(\Omega_2), \Omega_1)\}_{j,k\in\mathbb{N}}$$

Para obter estimativas dos autovalores, conforme é comumente praticado, empregamos uma abordagem baseada na caracterização variacional. Nesse contexto, o primeiro autovalor $\lambda_1(\mu_1, \Omega_1)$ do problema (1), é expresso por:

$$\lambda_1(\mu_1, \Omega_1) = \min_{f \in W_{G,0}^{1,2}(\Omega_1)} \frac{\int_{\Omega_1} \left(|\bullet_x f|^2 + \mu_1 \|x\|^{2s} f^2 \right) dx_1}{\int_{\Omega_1} f^2 dx_1}$$

Condição de fronteira de Neumann

Ao consideramos o problema (1) com condição de fronteira de Neumann, em vez da condição de Dirichlet, o desenvolvimento é análogo. Além da diferença na condição de fronteira, a distinção entre os dois problemas reside no fato de que as funções teste agora pertencem ao espaço $W_G^{1,2}(\Omega)$ e devem satisfazer $\int_\Omega \varphi = 0$, uma vez que, no caso Neumann, o primeiro autovalor é igual a zero.

BIBLIOGRAFIA

[1] JOST, J. **Partial Differential Equations**. Springer-Verlag, New York. 2002.

[2] LAMBERTI,P.D.; LUZZINI, P.; MUSOLINO, P. **Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues**. The Journal of Geometric Analysis, 31, 10679-10717.2021.

[3] LUZZINI, P.; PROVEZANO, L.; STUBBE, J. **The First Grushin Eigenvalue on Cartesian Product Domains**. Advances in Calculus of Variations. 2023.

Álgebra de Virasoro e suas representações

Goveia, Othávio V. C.[557]

Resumo: *A primeira parte desse estudo destina-se a introduzir conceitos e definições necessários para a compreensão da temática. Daí, apresentaremos a única extensão central não trivial da álgebra de Witt, chamada álgebra de Virasoro. A álgebra de Witt, por sua vez, se caracteriza como a álgebra de Lie complexa das derivações da álgebra complexa dos polinômios de Laurent. Por fim, exploraremos representações de energia positiva, de peso máximo, e em particular, representações de tipo Verma.*

Palavras-chave: *Álgebra de Virasoro, álgebra de Lie, álgebras de derivações, representações de álgebras de Lie.*

INTRODUÇÃO

Iniciaremos este trabalho apresentando os conceitos introdutórios de álgebras de Lie, derivações, extensão central e álgebra envolvente universal. Partindo daí, definiremos a álgebra de Witt como a álgebra das derivações dos polinômios de Laurent e a muniremos de uma estrutura de Lie por meio do comutador usual. Na sequência, determinaremos uma base para a álgebra de Witt, como o comutador se comporta nessa base e mostraremos que a álgebra de Witt é $\mathbb{Z}$-graduada como álgebra de Lie.

Em seguida, enunciaremos a única extensão central não trivial da álgebra de Witt, conhecida como álgebra de Virasoro e exibiremos uma decomposição triangular em subálgebras de Lie da álgebra de Virasoro. Finalmente definiremos e exploraremos representações de energia positiva, de peso máximo, e em particular, representações de tipo Verma, que ocupam papel central nesta exposição.

A teoria de representações da álgebra de Virasoro tem sido desenvolvida intensamente nos últimos anos, principalmente levando em consideração sua forte relação com teoria das cordas e campos conformes bidimensionais.

CONCEITOS PRELIMINARES

A álgebra de Witt, que denotaremos por W é a álgebra de derivações da álgebra complexa dos polinômios de Laurent

$$\mathbb{C}[t, t^{-1}] = \left\{ \sum_{k \in J \subseteq \mathbb{Z}} a_k t^k : a_k \in \mathbb{C} \text{ e } a_k \neq 0 \text{ para } |J| < \infty \right\}$$

e recebe o seu nome em homenagem ao matemático alemão Ernst Witt (1911-1991).

[557]Mestrando em Matemática na Universidade Federal do ABC. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

A álgebra de Witt possui uma base $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, com

$$d_n = -t^{n+1}\frac{d}{dt}, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

e uma única extensão central não trivial, a menos de isomorfismo. Tal extensão tem uma base $\{c\} \cup \{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de tal maneira que o comutador de Lie satisfaz as seguintes relações

$$[c, d_n] = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$[d_m, d_n] = (m-n)d_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c, \ \forall m,n \in \mathbb{Z}.$$

Essa extensão será chamada de álgebra de Virasoro e denotada por *Vir* em homenagem ao físico argentino Miguel Ángel Virasoro (1940-2021).

OBJETIVO PRINCIPAL

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo detalhado da teoria de representações de peso máximo da álgebra de Virasoro, as quais estão completamente caracterizadas por dois parâmetros complexos. Como ferramenta principal de estudo vamos usar as representações de tipo Verma e a sua propriedade universal. O nome se deve Daya-Nand Verma (1933-2012) quem definiu e explorou esse tipo de representações na sua tese de doutorado.

Teorema 9.42 *Dados $C, h \in \mathbb{C}$ denotamos por $M(C,h)$ a representação de Verma associada. Então:*

(i) $M(C,h)$ é indecomponível, ou seja, não podemos encontrar subrepresentações não triviais W_1, W_2 de $M(C,h)$ tais que $M(C,h) = W_1 \bigoplus W_2$.

(ii) $M(C,h)$ tem uma única subrepresentação própria maximal $J(C,h)$; mais ainda, e $V(C,h) := M(C,h)/J(C,h)$ é a única representação irredutível de peso máximo, cujo peso máximo é (C,h).

BIBLIOGRAFIA

[1] HARTWING, J. T. **Generalized derivations on algebras and highest weight representations of the Virasoro algebra.** Master thesis-Lund University, Lund, 2002.

[2] LUNDHOLM, D. **The Virasoro algebra and its representations in physics.** KTH, Estolcomo, 2005.

[3] SAN MARTIN, L. A. B. **Álgebras de Lie**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2010.

Corpo teórico de Storto

Storto, Paolo Garcia

Resumo: *O artigo aborda o Corpo teórico de Paolo Garcia Storto que recebe o nome de Paolo, pois aplica diversas séries de restrições para a utilização na área de possibilidades (derivado do latim que significa "possibilities") que são amplamente aplicados no campo da Análise Combinatória (área da matemática que estuda um conjunto de elementos finitos ou infinitos a partir de parâmetros estabelecidos), e foi tratado pela primeira vez como um estudo científico por Christiaan Huygens. O mesmo apresenta relações que são funcionais para a utilização em métodos probabilísticos.*

Palavras-chave: *Análise combinatória, teoria dos números, teoria das probabilidades.*

INTRODUÇÃO

Iniciamos no âmbito de Permutações, Arranjos e Combinações no campo da Análise Combinatória, definindo assim x possibilidades para um evento quando pelo menos um dos n elementos estiver restrito, sendo n (elementos), p (posições) e l (elementos restritos) as variáveis que serão apresentadas ao longo da discussão:

$$\{n, p \geq 0; n \geq p\} \in A_{n,p} \quad \text{e} \quad C_{n,p}\{n, p \geq 0; n = p\} \in P_n \quad 0 \leq l \leq n$$

Ideia fundamental

$$(\text{Total de possibilidades}) - (\text{Possib. de pelo menos um dos } n\text{'s em um } p)$$

$$(P_n \text{ ou } A_{n,p} \text{ ou } C_{n,p}) - \left(\frac{P_n}{n} \cdot l \text{ ou } \frac{A_{n,p}}{n} \cdot l \text{ ou } \frac{C_{n,p}}{n} \cdot l\right)$$

Dividimos por n para determinar as possibilidades individuais em uma das posições $(p) \Rightarrow$

$$\left(n! \text{ ou } \frac{n!}{(n-p)!} \text{ ou } \frac{n!}{p!(n-p)!}\right) - \left(\frac{n!}{n} \cdot l \text{ ou } \cdot \frac{n!}{n(n-p)!} \cdot l \text{ ou } \frac{n!}{np!(n-p)!} \cdot l\right) \Rightarrow$$

Reescrevendo para cada um dos casos:

- $P_n = n! - \frac{n!}{n} \Rightarrow \frac{nn! - n!l}{n} \Rightarrow \frac{n!(n-l)}{n} \Rightarrow \frac{n(n-1)!(n-l)}{n} \Rightarrow (n-1)!(n-l)$
- $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} - \frac{n!l}{n(n-p)!} \Rightarrow \frac{nn! - n!l}{n(n-p)!} \Rightarrow \frac{n!(n-l)}{n(n-p)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!(n-l)}{(n-p)!}$
- $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} - \frac{n!l}{n \cdot p!(n-p)!} \Rightarrow \frac{nn! - n!l}{n \cdot p!(n-p)!} \Rightarrow \frac{n!(n-l)}{n \cdot p!(n-p)!} \Rightarrow \frac{(n-1)!(n-l)}{p!(n-p)!}$

Os dados apresentados acima são somente válidos para casos onde a restrição atinge uma posição. É possível reescrever para situações onde a posição assume um valor maior que 1, $\{p \in \mathbb{N} \mid p \geq 1\}$:

Definimos uma nova variável para este tipo de caso, $\mathbf{q}$, que representa a quantidade de posições em que n elementos estão restritos (l)

- $P_n = (n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)$

Assumimos, $\forall\ (n,k,q,l) \in \mathbb{N}$, tal que, $\{0 \leq q \leq n; 0 \leq k-l \leq n\}$. Nas fórmulas de arranjo e combinação a aplicação é a mesma, tendo como denominador de uma fração $\dfrac{P_n}{G}$, G, em que G é igual para o arranjo $((n-p)!)$; e para a combinação $(p!(n-p)!)$.

Concordância restritiva

Conceituaremos as ideias gerais quando, $\forall(p \geq 1) \in \mathbb{N}$, p tiver todas as suas posições restritas. Denominamos, inicialmente, Concordância restritiva com/sem repetição:

$$(n-l)^p$$

O modelo acima é válido somente se, (n,p,l) pertencerem ao conjunto dos naturais e l estiver restrito nesta condição: $\{0 \leq l \leq n\}$. Quanto a concordância restritiva for sem repetição:

Assumindo $(q = n)$; $(q-1 = p-1)$ quando todas as posições estão restritas:

$$\frac{(n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)}{(n-p)!} \Rightarrow \frac{(n-n)!\left(\prod_{k=0}^{p-1}(n-k-l)\right)}{(n-n)!} \Rightarrow \prod_{k=0}^{p-1}(n-k-l)$$

É validado quando, $\forall(n,p,l) \in \mathbb{N}$, tal que, $\{0 \leq k-l \leq n\}$.

Progressão restritiva aritmética

Admite que r seja a razão da P.A.(progressão aritmética).

$$\prod_{k=0}^{p-1}(n-(l_1+kr))$$

E para todo $\{(n,l_1,k,r,p) \in \mathbb{N}$, temos que $\{0 \leq l_1+kr \leq n\}$. Na progressão restritiva aritmética sem repetição denominamos $\forall(n,l_1,k,r,p) \in \mathbb{N}$; $\{0 \leq k-(l_1+kr) \leq n\}$:

$$\prod_{k=0}^{p-1}(n-k-(l_1+kr))$$

Progressão restritiva geométrica

Assim como tratado na progressão restritiva aritmética, trataremos também aqui, nesta seção, **r** como, agora, a razão de uma P.G. (progressão geométrica). É importante ressaltar que **r** pertence ao conjunto dos naturais.

$$\prod_{k=0}^{p}(n-l_1r^{k-1}))$$

Para assumirmos que a norma acima seja válida, definiremos uma condição de existência representado ao lado: $\{(n,l_1,k,r,p) \in \mathbb{N} \,|\, 0 \leq l_1r^{k-1} \leq n\}$. Na progressão restritiva geométrica sem repetição definimos $\forall(n,l_1,k,r,p) \in \mathbb{N}$; $\{0 \leq k-1-l_1r^{k-1}) \leq n\}$:

$$\prod_{k=0}^{p}(n-k-1-l_1r^{k-1}))$$

Aleatoriedade restritiva

Considere para os elementos restritos (l) uma sequência aleatória com todos os valores de l. $\{l \in \mathbb{N} \mid 0 \leq l \leq n\}$. Chamamos de n_l:

$$n_l = n^p - \left(\prod_{k=1}^{p} l_k\right) \cdot n^{p-1} + (l_p \cdot l_{p-1} + \ldots + l_{p-1} l_{p-2}) \cdot n^{p-2} + \ldots + (l_p \cdot l_{p-1} \ldots) \cdot n \pm \prod_{k=1}^{p} l_k.$$

$$\prod_{k=1}^{p} (n - l_k)$$

As condições de existência para ambos são, para n_l, $\{(n, p, l, k) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq \left(\prod_{k=1}^{p} l_k\right) n^{p-1} + \ldots \pm \prod_{k=1}^{p} l_k \leq n^p\}$, e para o preceito simplificado ; $\{(n, p, k, l) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq l_k \leq n\}$. Todos os grupos $((l_p \cdot l_{p-1} + \ldots l_{p-1} \cdot l_{p-2})$ ou $(l_p + l_{p-1} + \ldots + l_1))$ trabalharão com um seguimento, ou seja, quando o p de n^p, ao assumir o valor de 1, as combinações entre os elementos restritos irão aumentando. O dado apresentado segue a proposta do Teorema da Decomposição de Polinômios, abordado em Teoria dos Números. $\left(+ \prod_{k=1}^{p} l_k\right)$, quando p for par . $\left(- \prod_{k=1}^{p} l_k, \right)$, quando p for ímpar. Os grupos que demonstrar combinações com o número de posições ímpar, esses terão sinal negativo. Exemplo: $-(l_4 l_3 l_2 + \ldots + l_1 l_2 l_3) n^{p-3}$. Para a aleatoriedade restritiva sem repetição existir, $\{(n, k, l, p)$ devem pertencer ao conjunto dos naturais, tal que $\{0 \leq k - l_{k+1} \leq n\}$.

CONCLUSÕES

Concluindo, este estudo mostrou distintas formas de solucionar e obter resultados a partir de problemas matemáticos que contenham algum tipo de restrição quanto aos elementos ativos na proposta do problema. É facilmente aplicável em espaços que envolvam não só possibilidades, como probabilidade, mas outrossim em setores como os estudos polinomiais. Além disso, destaco a importância que há em compreender o campo de forma dissemelhante e aprofundada.

Álgebras com divisão sobre os reais e o teorema de Frobenius[558]

Bussola, Pedro Augusto[559] e Gonçalves, Dimas José (orientador)[560]

Resumo: *Neste trabalho será apresentado o Teorema de Frobenius. Mais especificamente, será mostrado que toda álgebra com divisão associativa de dimensão finita sobre o corpo dos Reais é isomorfa aos Reais ou Complexos ou Quatérnions.*

Palavras-chave: *Teorema de Frobenius, álgebras com divisão sobre os reais.*

INTRODUÇÃO

O assunto a ser tratado neste trabalho está inserido dentro da área de álgebra, ou mais especificamente, dentro da teoria de anéis associativos. As álgebras com divisão de dimensão finita são objetos simples e reunem os aspectos e propriedades mais favoráveis dentro da teoria. Como muitas vezes acontece, os objetos mais simples não são os mais fáceis de estudar, e os temas clássicos não são menos profundos que os modernos.

Duas álgebras com divisão sobre $\mathbb{R}$ são bem conhecidas desde o ensino básico: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Uma outra álgebra não tão conhecida é a dos quatérnions, denotada por $\mathbb{H}$. Essa foi descoberta pelo matemático Hamilton durante a tentativa de extensão de $\mathbb{C}$, e trata-se da primeira álgebra com divisão sobre $\mathbb{R}$ não comutativa.

Podemos nos perguntar: além das 3 álgebras citadas, existe outra álgebra com divisão associativa de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$? A resposta será dada neste trabalho.

O TEOREMA DE FROBENIUS

Um espaço vetorial $(A,\ +,\ \cdot)$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma álgebra sobre $\mathbb{F}$ se existe uma operação binária $* : A \times A \to A$, chamada multiplicação, que satisfaz

$$(x+y)*z = x*z + y*z,\ z*(x+y) = z*x + z*y \ \text{ e}$$

$$\lambda\cdot(x*y) = (\lambda\cdot x)*y = x*(\lambda\cdot y)$$

para todos $x, y, z \in A$ e $\lambda \in \mathbb{F}$. Se adicionamos a condição

$$x*(y*z) = (x*y)*z$$

[558]Este trabalho foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processo 2023/10439-1.

[559]Universidade Federal de São Carlos. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processo 2023/10439-1.

[560]Universidade Federal de São Carlos.

para todos $x, y, z \in A$, dizemos que A é uma álgebra associativa.

Por exemplo, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $M_n(\mathbb{R})$ (matrizes) com as operações usuais de soma, produto por escalar e multiplicação são álgebras associativas sobre $\mathbb{R}$. Diferente da última, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ têm uma propriedade a mais, que definimos a seguir.

Uma álgebra A sobre um corpo $\mathbb{F}$ é chamada de álgebra com divisão se:

(a) A tem um elemento, denotado por 1, com a propriedade

$$1 * x = x = x * 1 \text{ para todo } x \in A,$$

(b) todo $x \in A$ tem um elemento, denotado por x^{-1}, tal que

$$x * x^{-1} = 1 = x^{-1} * x.$$

A álgebra dos quatérnions, denotada por $\mathbb{H}$, é a álgebra sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 4 que possui uma base $\{1,\ i,\ j,\ k\}$ com as seguintes propriedades:

$$i * i = j * j = k * k = -1,$$

$$i * j = k = -j * i,\ j * k = i = -k * j,\ k * i = j = -i * k.$$

Tal álgebra é associativa e com divisão.

Note que "trocando a roupa" dos elementos das álgebras $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$, obtemos novas álgebras com as mesmas estruturas algébricas. Isso pode ser resumido no seguinte conceito: duas álgebras sobre um corpo $\mathbb{F}$ são isomorfas se existe um isomorfismo linear entre elas que preserva a multiplicação. Com base no exposto, podemos enunciar o resultado principal deste trabalho, devido ao matemático Frobenius, provado em 1878.

Teorema 9.43 (Frobenius) *Toda álgebra com divisão associativa de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ é isomorfa a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

Além deste resultado, mostraremos que sob certas condições do corpo $\mathbb{F}$, toda álgebra com divisão associativa de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$ é isomorfa a $\mathbb{F}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESAR, M. Introduction to Noncommutative Algebra. [S.l.]: Springer, 2014. (Universitext). ISBN 978-3-319-08692-7.

Olimpíadas da UNIVATES

Fomentando o Raciocínio Lógico

Moura, P. Macário[561]; Quartieri, M. Teresinha[562]; Dullius, M. Madalena[563]; Rehfeldt, M. Jussara Hepp[564] e Maman, A. Spessatto De[565]

Resumo: *A OMU (Olimpíada Matemática da Univates) teve sua 1º edição em* 1997 *e em* 13 *de setembro de* 2024 *acontecerá sua 26º edição, esta tem parceria com a Chamada CNPq/MCTI no* 03/2023 *Olimpíadas Científicas. O objetivo da OMU é estimular o interesse e o gosto pela matemática, despertando a vocação para as carreiras científicas dos seus participantes, que são dos municípios do Vale do Taquari e circunvizinho. Participam da OMU estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao 3º do Ensino Médio. Destaca-se que o uso da calculadora é permitida no decorrer da prova, pois as questões primam pelo raciocínio lógico e interpretação. Já participaram* 54.849 *estudantes de* 35 *municípios no decorrer das* 25 *edições. Portanto, pode-se inferir que, o projeto "Olimpíada Matemática da Univates: fomentando o raciocínio lógico", por ter como premissa atividades em grupos acaba fomentando habilidades como integração entre pessoas, comunicação, organização, escrita, argumentação, trabalho em grupo percebendo a diversidade de saberes nas relações com o outro. Ademais, a resolução de desafios requer atenção e interpretação, persistência para resolução, criatividade no uso de estratégias diferenciadas, que são habilidades importantes na formação do estudante como pessoa e profissional.*

Palavras-chave: *OMU, raciocínio lógico, oficinas.*

INTRODUÇÃO

Vários estudos têm demonstrado que alunos da educação básica têm dificuldades em conteúdos de matemática, principalmente na resolução de problemas e Pronça *et al.* (2022) destacam que observa-se certo desinteresse pela Matemática o que, consequentemente, acarreta no aluno a busca por áreas de conhecimento distintas das Ciências Exatas ou até mesmo a desistência dos estudos. Segundo De Losada; Taylor (2022), uma maneira para minimizar esse desinteresse é criar um ambiente de ensino e aprendizagem em que os alunos se sintam desafiados a superar essas desmotivações em relação à matemática. E um destes espaços são as competições matemáticas saudáveis ou olimpíadas. A este respeito Marushina (2021) afirma que ao participar deste tipo de atividades os alunos desenvolvem o gosto pela matemática.

[561] Doutorando em Ensino - Universidade do Vale do Taquari (Univates)/Professor da Secretaria de Educação e Esportes de Pernambuco (SEEPE)/Coordenador Regional de Iniciação Científica – CO-PE02/PIC-OBMEP/Núcleo de Pesquisa e Ensino em Matemática/NUPEMAT/UNIVASF

[562] Doutora em Educação- Universidade Vale do Taquari (Univates)

[563] Doutora em Ensino de Ciências - Universidade Vale do Taquari (Univates)

[564] Doutora em Informática da Educação - Universidade Vale do Taquari (Univates)

[565] Doutora em Ensino - Universidade Vale do Taquari (Univates)

Neste sentido, podemos dizer que uma das ações que tem demonstrado eficácia é a Olimpíada Matemática da Universidade do Vale do Taquari (OMU Univates) - que iniciou em 1997, a fim de estimular o interesse e o gosto dos estudantes pela matemática.

Dos participantes da OMU, os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental ao 1º do Ensino Médio, podem escolher 8 entre as 10 questões propostas na prova, para resolver, os estudantes do 2º ano do Ensino Médio escolhem 9 das 10; e, finalmente, os estudantes do 3º ano devem responder a todas as questões. Entende-se que a escolha de questões por parte dos estudantes favorece e incentiva estes, desde cedo, a tomarem decisões. As provas podem ser realizadas em duplas, o que proporciona segurança aos participantes, uma vez que possibilita a troca de ideias, cooperação e colaboração.

A natureza das questões é de, aproximadamente, 30% objetivas e 70% subjetivas, sendo que em todas é exigidos o desenvolvimento, o que permite à equipe proponente observar diferentes estratégias usadas na resolução dos problemas. Destaca-se que a calculadora é permitida no decorrer da prova, pois as questões primam pelo raciocínio lógico e interpretação.

Várias atividades que são desenvolvidas para divulgar a OMU, tais como: palestras, oficinas e atividades interativas, envolvendo a participação de professores e estudantes, em especial os que, muitas vezes, não vislumbram estar inseridos neste contexto, como por exemplo, meninas, negros e PcD. Portanto, as ações desta Olimpíadas têm potencial para divulgação e popularização das ciências, uma vez que a disponibilidade de desafios interativos, bem como as oficinas de raciocínio lógico podem ocorrer de forma presencial ou virtual com o intuito de fomentar o interesse e o gosto dos participantes pela área científica.

OBJETIVOS

Objetivo geral

Desenvolver o raciocínio lógico e a criatividade, essenciais no processo de resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento, despertando nos estudantes o gosto pelas áreas científicas e tecnológicas e estimular o espírito investigativo, a construção colaborativa de conhecimentos, a competitividade saudável e o respeito às diversidades.

Objetivos específicos

- Estimular o desenvolvimento da construção colaborativa do conhecimento, do espírito investigativo e do raciocínio lógico dos estudantes, contribuindo com a qualificação do ensino da Matemática, despertando a vocação para as carreiras científicas.
- Proporcionar aos estudantes e professores da Escola Básica ações para desenvolver o raciocínio lógico na modalidade presencial ou virtual, bem como desafios interativos online.
- Incentivar os professores da Educação Básica a utilizar as questões de Olimpíadas Matemáticas, levando questões desafiantes para a sala de aula, tornando o ensino menos livresco e conteudista.
- Proporcionar troca de experiências entre os estudantes envolvidos, incentivando a colaboração e a solidariedade, bem como a competitividade saudável descobrindo novos talentos.
- Promover a interação entre as escolas e a Instituição de Ensino Superior, fortalecendo a interação dialógica, socializando experiências e oportunizando diferentes vivências para Educação de Qualidade.
- Estimular a participação de meninas, negros e PcD nas ações do Projeto, visando a valorização de suas potencialidades.
- Socializar resultados decorrentes do Projeto, visando ao intercâmbio científico entre diferentes atores do meio educacional, bem como promovendo a popularização e/ou divulgação científica.

Histórico da OMU

O evento Olimpíada Matemática da Univates (OMU) iniciou em 1997, a fim de estimular o interesse e o gosto dos estudantes pela matemática. Contou com estudantes de apenas duas escolas. Em 1998, não houve evento. Em 1999, ocorreu a segunda edição da OMU, na Instituição proponente e as inscrições foram abertas para as escolas dos municípios do Vale do Taquari, região em que está localizada a Instituição. Participaram, na 2º edição da OMU, 1200 estudantes, de 46 escolas, de 19 municípios.

A partir da 6º edição da OMU, que ocorreu em 2003, a equipe proponente decidiu limitar o número de inscritos por escola, em função da logística necessária para o evento, elaborando critérios para que, o máximo de participantes, fosse de 2700 estudantes. Como a prova é realizada, majoritariamente, em duplas, o critério escolhido foi que cada escola poderia fazer a inscrição de até 3 duplas (ou de forma individual) por turma de cada ano de escolaridade do 5º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio.

Até 2015, o evento era concebido como uma atividade de extensão voltada para a competição. De 2016 até 2018, fez parte do projeto de extensão universitária "Redes Interdisciplinares: desvendando as Ciências Exatas e Tecnológicas" em que havia o envolvimento de cinco projetos de extensão na área de Ciências Exatas. Neste período, além do evento OMU, eram ofertadas, na Instituição proponente ou nas próprias escolas, oficinas de raciocínio lógico aos estudantes da Escola Básica.

Em 2019, ocorreu a desvinculação com o referido projeto e iniciou a "Olimpíada Matemática da Univates: fomentando o raciocínio lógico", que existe até os dias atuais. Este projeto dá continuidade ao evento OMU e às oficinas para estudantes da Escola Básica. Além disso, incluiu, em 2019, oficinas para estudantes do Ensino Superior focando no ENADE. Destaca-se que as ações propostas possibilitam explorar o raciocínio lógico e a criatividade, essenciais no processo de resolução de problemas de qualquer área do conhecimento, despertando o gosto pelo conhecimento científico.

Em 2020, não ocorreram ações do projeto devido à pandemia da COVID-19 que afetou todo o país. Em 2021, as ações do projeto voltaram a ocorrer. Entretanto, as oficinas aconteceram virtualmente e a prova da OMU foi aplicada nas escolas, mas elaborada e corrigida pelos integrantes do projeto. Nessa edição, não houve limite de número de estudantes por escola, para participação na prova da OMU. No ano de 2021, foi incluída a ação de elaboração e divulgação de desafios interativos, de forma online, para a comunidade em geral.

Em 2022, a OMU ocorreu novamente nas escolas, mas nessa edição (24º OMU), novamente foi limitado o número de estudantes por escola, sendo que cada escola podia inscrever 3 inscrições (duplas ou de forma individual) por turma e ano de escolaridade. Em relação às oficinas para os estudantes elas ocorreram presencialmente e virtualmente; continuando-se também com a ação dos desafios interativos de forma online. Para 2023, optou-se pela mesma sistemática de 2022, inclusive para a 25º OMU.

Desta forma, historicamente, desde a 2º edição até a 24º OMU, o evento contou, anualmente, com a participação de, aproximadamente 2200 estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, oriundos de, aproximadamente, 70 escolas diferentes, de aproximadamente, 23 municípios diferentes do Vale do Taquari e arredores. Portanto, já participaram mais de 50.000 estudantes. Aliado a isso, e devido ao número elevado de participantes da OMU, a equipe proponente conta com a colaboração voluntária, de aproximadamente, 120 estudantes de graduação, por edição, como fiscais no dia da aplicação da prova, quando da forma presencial na Univates. Muitos desses voluntários, são de cursos de licenciatura ou de bacharelado, já foram em outras edições, participantes da OMU e se sentem "professores" neste dia.

No quadro 1 é apresentado o número de inscritos, de escolas, de municípios e de premiados das 25 edições que já foram realizadas pela OMU.

Quadro 1 – Dados das edições da Olimpíada Matemática da Univates

Edição da OMU	Ano	Total de inscritos	Número de escolas	Número de municípios	Número de premiados
1ª	1997	286	2	2	48
-	1998	Não ocorreu evento	-	-	-
2ª	1999	1200	46	19	48
3ª	2000	2417	76	21	48
4ª	2001	1874	81	21	210
5ª	2002	2960	95	29	238
6ª	2003	2000	66	28	180
7ª	2004	2360	72	26	192
8ª	2005	2700	93	35	234

9ª	2006	2460	87	31	222
10ª	2007	2492	80	26	208
11ª	2008	2384	70	26	188
12ª	2009	2438	60	21	168
13ª	2010	2268	66	18	180
14ª	2011	2624	72	19	192
15ª	2012	2170	61	20	170
16ª	2013	2148	62	21	172
17ª	2014	2350	65	25	178
18ª	2015	2008	65	25	178
19ª	2016	2237	76	31	200
20ª	2017	2228	74	26	196
21ª	2018	2246	77	27	202
22ª	2019	2522	86	27	220
	2020	Não ocorreu evento	-	-	-
23ª	2021	2460	85	26	Não houve premiação
24ª	2022	1948	58	22	164
25ª	2023	2.069	64	24	176
Total		**54.849**	**1739**	**596**	**4212**

Fonte: Dos autores (2023)

De acordo com o Quadro 1, no decorrer das 24 edições da OMU, houve a participação de 52780 estudantes. Muitos destes estudantes, são reincidentes, ou seja, integraram mais de uma edição do evento. Além disso, em relação aos premiados, alguns estudantes foram classificados, em mais de uma edição, como primeiros colocados.

A 26º edição da OMU

A 26º edição da OMU acontecerá no dia 13 de setembro de 2024 na Instituição Proponente e contará com auxílio financeiro do CNPq pela Chamada CNPq/MCTI no 03/2023 Olimpíadas Científicas. De acordo com a referida chamada, 20 premiados (sendo pelos menos 10 meninas, 6 negros, 2 PCD) da 26a edição da OMU serão contemplados com bolsas de Iniciação Científica Júnior (IC-Jr), os quais, durante o ano de 2025, participarão de diversas atividades que visam desenvolver o raciocínio lógico por meio de oficinas e resolução de questões relacionadas aos conteúdos de matemática e Ciências exatas.

Nas oficinas serão propostos problemas e desafios que poderão ser resolvidos em pequenos grupos, possibilitando aproximações entre os sujeitos envolvidos, discutindo-se diferentes estratégias de resolução. Estas serão ministradas pelos integrantes deste projeto, cuja formação é em Matemática, e que têm larga experiência em Olimpíadas Matemáticas. Elas poderão ocorrer nas salas de aula da Univates ou em espaços das escolas.

No decorrer do projeto serão desenvolvidas quatro principais ações: oficinas de raciocínio lógico; desafios interativos online; 26º Olimpíada Matemática da Univates; encontros sistemáticos para bolsistas de Iniciação Científica Júnior. Tais ações estão fundamentadas em referenciais que contemplem ensino, pesquisa e extensão (Almeida e Sampaio, 2010; Gonzatti *et al.*, 2017; Síveres, 2013); olimpíadas matemáticas (Haetinger *et al.*, 2012); raciocínio lógico (Carvalho e Campos, 2016; Sérates, 2004); resolução de problemas e suas estratégias (Dante, 2010; Furlanetto, 2013; Andreatta e Alevatto, 2018; Rehfedt, 2017). O intuito não é somente a resolução de problemas e desafios, mas a problematização de curiosidades e temas matemáticos que evidenciam que a Matemática não é uma Ciência pronta e acabada, fomentando o interesse e a curiosidade pela área das Ciências Exatas. No final destas oficinas, serão realizadas avaliações com o intuito de investigar percepções dos participantes em relação ao que foi proposto, bem como melhorar edições posteriores das oficinas.

A ação - oferta de desafios interativos, na forma online – será destinada para professores e estudantes, bem como comunidade em geral. O intuito é fomentar o desenvolvimento do raciocínio lógico por meio de desafios e curiosidades. Serão pesquisadas e/ou elaboradas atividades usando recursos tecnológicos, tais como software Geogebra (construção de applets), Kahoot, Google forms, dentre outros, buscando envolver diversos conteúdos de forma atraente, incluindo posts informativos sobre a matemática, curiosidades e quizzes. Estes desafios interativos serão disponibilizados em redes sociais, visando a interação com a comunidade. Ademais, pretende-se criar um Blog ou uma página como forma de repositório, para o uso contínuo dos interessados.

Diante deste contexto, justifica-se a importância do projeto, pois as ações explicitam o envolvimento da comunidade escolar, fortalecendo a ideia de promover formas desafiadoras e lúdicas de aprender, estimulando o raciocínio, a lógica e a criatividade, despertando nos participantes o gosto pela Matemática. Como continuidade deste projeto e aliado aos objetivos deste edital, a equipe proponente pretende implementar ações que incentivem a participação de um número maior de estudantes meninas, de negros, de PcD (pessoa com deficiência) nas atividades propostas, buscando a inclusão dos mesmos no ambiente acadêmico. Salienta-se que a Instituição proponente está implementando sua política de ações afirmativas e as atividades que serão realizadas neste projeto podem fazer parte de tais ações, contribuindo produtivamente para as discussões.

CONCLUSÕES

Dessa forma, desde 1º até a 25º edição a OMU já colaborou com a melhoria nas estratégias de resolução das questões de mais de 50.000 estudantes do 5o ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio, oriundos de, aproximadamente, 72 escolas diferentes, em cerca de, 41 municípios diferentes do Vale do Taquari e arredores. Uma vez que, ao observarmos as respostas que estão publicadas nos anais de cada edição, percebemos que as estratégias para resolver os problemas têm uma evolução. Em relação às Oficinas de Raciocínio Lógico, já foram atendidos dentro e fora da instituição, aproximadamente, 5.500 estudantes, todas essas ações denotam a inter-relação existente entre comunidade escolar e universidade.

A 26º edição terá diferenças significativas, pois além do apoio da Univates, teremos o apoio do CNPq paraque 20 premiados em situação de vulnerabilidade social, tenha acesso, em 2025, a um Programa onde serão desenvolvidas atividades e oficinas, com questões interessantes da matemática que irão estimular ainda mais o raciocínio lógico dos participantes, os mesmos ainda receberão uma bolsa de IC-Jr.

BIBLIOGRAFIA

[1] Almeida, L. P. de; Sampaio, J. H.; **Extensão universitária: aprendizagens para transformações necessárias no mundo da vida.** Revista Diálogos: construção conceitual de extensão e outras reflexões significativas. Brasília, v. 14, n.1, dez/2010, p. 33-41. Disponível em: `portalrevistas.ucb.br/index.php/RDL/article/view/2926/1836`. Acesso em: 10 out. 2023.

[2] Andreatta, C.; Allevato, N. S. G.; **A resolução de problemas nos documentos de orientação curricular oficiais da Educação Básica brasileira.** Anais... SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasil, ago. 2018. Disponível em: `http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/466/498`. Acesso em 10 out. 2023.

[3] Carvalho, S.; Campos, W.; **Raciocínio lógico simplificado.** 2. ed. Salvador: Juspodivm, 2016.

[4] Dante, L. R.; **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática.** Ensino fundamental: 1o ao 5o ano. São Paulo: Ática, 2010.

[5] De Losada, M.F.; Taylor, P.J.; **Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education.** ZDM Mathematics Education 54, 941–959 2022.

[6] Furlanetto, V.; **Explorando estratégias diferenciadas na resolução de problemas matemáticos.** 121f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) Universidade do Vale do Taquari – Univates, Lajeado, RS, 2013.

[7] Gonzatti, S. E. M. et al.; **Redes Interdisciplinares - desvendando as Ciências Exatas e Tecnológicas: desafios e interlocuções de um projeto de extensão universitária.** In: Cataventos - Revista de Extensão da Universidade de Cruz Alta, v. 9, n. 1, p.140- 163, nov., 2017. Disponível em: `revistaeletronica.unicruz.edu.br/index.php/Cataventos/article/view/5352/1133`. Acesso em: 16 set. 2023.

[8] Haetinger, C. et al.; **Olimpíadas Matemáticas do Centro Universitário UNIVATES: questões e melhores soluções da 6º a 13º edição.** Curitiba: CRV, 2012.

[9] Marushina, A.; **Mathematics competitions: what has changed in recent decades.** ZDM Mathematics Education 53, 1591-1603, 2021.

[10] Proença, M. C. de.; Maia-Afonso, É. J.; Mendes, L. O. R.; Travassos, W. B.; **Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações.** Bolema: Boletim De Educação Matemática, 36(72), 262-285, 2022.

[11] Rehfeldt, M. J. H. et al.; **Uma análise das provas da olimpíada matemática: índices de erros e acertos dos alunos do ensino fundamental.** In: MUNHOZ, A. V.; GIONGO, I. M. (Orgs.) Observatório da educação III: práticas pedagógicas na Educação Básica. Porto Alegre: Ed. Criação Humana/Evangraf, 2017. p. 182-197.

[12] Sérates, J.; **Raciocínio lógico: lógico matemático, lógico quantitativo, lógico numérico, lógico analítico, lógico crítico.** 11. ed. Brasília (DF): Jonofon, 2004.

[13] Síveres, L. (org); **A Extensão universitária como um princípio de aprendizagem.** Brasília: Liber Livros, 2013.

Um breve passeio ao continuum de Cantor

Santos, Pettrick[566] e Ortega, Kevelyn Osmar do Nascimento Souza[567]

Resumo: *A hipótese do contínuo, formulada por Georg Cantor, é um problema fundamental na teoria dos conjuntos que questiona a existência de um conjunto infinito cujo tamanho está estritamente entre o dos números naturais e o dos números reais. Cantor conjecturou inicialmente que tal conjunto não existiria. Em 1938, Kurt Gödel demonstrou que a negação da hipótese do continuum não poderia ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel, em 1963, e Paul Cohen demonstrou que a hipótese do continuum também não poderia ser provada a partir dos mesmos axiomas. Isso significa que sua veracidade não pode ser provada nem refutada a partir desses axiomas. A questão continua sendo um dos grandes desafios matemáticos não resolvidos, inclusive é um dos problemas propostos por Hilbert em 1900, destacando a complexidade e a profundidade dos conceitos fundamentais da matemática.*

Palavras-chave: *Continuum, Georg Cantor, conjuntos, Hilbert e conjectura.*

INTRODUÇÃO

Hilbert procede do seguinte modo em relação ao primeiro problema de sua famosa lista. Depois de explanar o conceito de número cardinal de um conjunto, como introduzido por Cantor, afiança que as investigações de Cantor de tais agregados de pontos sugere um teorema muito plausível, que, no entanto, apesar dos ingentes esforços, ninguém foi bem sucedido em prová-lo. Eis o teorema:

Todo sistema de infinitos números reais, i.e., todo agregado de números (ou pontos) é ou equivalente ao agregado dos números naturais, $(1, 2, 3, \cdots)$, ou ao agregado de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito á equivalência, há, portanto, somente dois agregados de números, o agregado enumerável e o continuum.

Desse teorema seguiria, imediatamente, que o continuun tem o número cardinal seguinte àquele do agregado enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o agregado enumerável e o continuum.

A Hipótese do Continuum ou o Primeiro Problema de Hilbert

A posterior introdução, nos trabalhos sobre os números transfinitos, dos dois princípios geradores de ordinais, a saber:

(I) Dado qualquer ordinal α, existe um menor ordinal maior do que α em questão, o chamado $(\alpha + 1)$;

[566]Este autor foi apoiado por Dominus Energia Solar. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS - CPAN
[567]Orientador

(II) Dada qualquer seqüência crescente α_n de ordinais, existe um menor ordinal maior do que todos os α_n, o chamado $\lim \alpha_n$.

Para prosseguir na busca de resultados melhores, Cantor sentiu ser necessário formular, com mais precisão, sua hipótese restritiva sobre os pontos de exceção. Para isso, intuiu haver mister de uma teoria mais acurada dos números reais.

Quem é maior que quem?

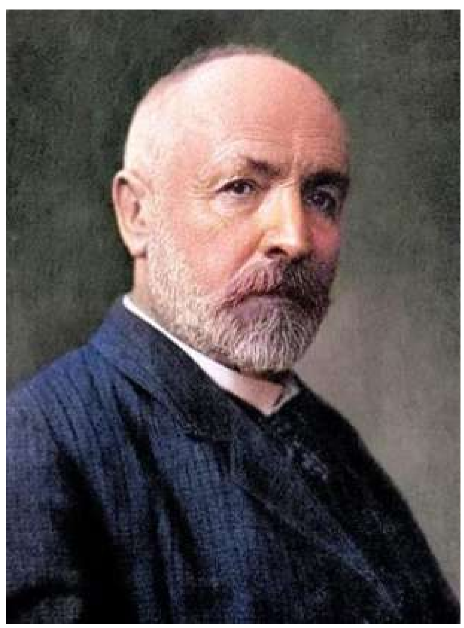
Cantor descobriria uma chave útil para entender a natureza da continuidade. Em 1874, publicou o seguinte teorema no Journal de Crelle: "O conjunto, R, dos números reais não pode ser posto em correspondência um-a-um com o conjunto, N, dos número naturais".

Assim, em algum sentido, há mais números reais do que números naturais, ou seja, de algum modo, os números reais compõem uma infinidade de ordem superior àquela constituída pelos números naturais.

Cantor escreve: "E agora que provamos, para um rico e extenso campo de agregados, a propriedade de ser capaz de correspondência com os pontos de uma reta contínua ou com uma parte dela (um agregado de pontos contidos nela), segue a questão: Em quantas e quais classes (se dissermos que agregados de mesma ou de diferente potência são agrupados, respectivamente, na mesma ou em diferentes classes) caem, de fato, os agregados lineares?

Por um processo de indução, em cuja descrição não entraremos aqui, somos levados ao teorema de que o número de classes é dois: uma contendo todos os agregados suscetíveis de serem postos na forma: functio ipsius ν, em que ν pode receber todos os valores inteiros positivos; e a outra contendo todos os agregados de forma: functio ipsius x, em que x pode tomar todos os valores reais no intervalo $(0, 1)$".

Fig. 165: Matemático Georg Cantor



CONCLUSÕES

Depois de ter introduzido o menor número cardinal transfinito $\aleph_0$, e de ter derivado suas propriedades mais à mão, surge a questão quanto aos números cardinais mais elevados e de como eles procedem de $\aleph_0$. Mostraremos que os números cardinais transfinitos podem ser arranjados de acordo com sua magnitude, e que, nessa ordem, formam, como os números finitos, um "agregado bem ordenado", em um sentido estendido das palavras. A partir de $\aleph_0$ procede, por uma lei determinada, o próximo número cardinal maior, $\aleph_1$; a partir desse, pela mesma lei, o próximo maior, $\aleph_2$; e assim por diante. Mas, mesmo a seqüência ilimitada de números cardinais

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_n, \cdots$$

não exaure o conceito de número cardinal transfinito.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cantor, G.; **Contributions to the Foundings of the Theory of Transfinite Numbers.** Dover, 1955.

[2] Gödel, K.; "What is Cantor's continuum problem?", in P. Banacerraf E H. Putnan (ed.), Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, (2nd ed.) 1983.

[3] Hilbert, D.; **On the infinite**, in P. Benacerraf e H. Putnun (ed.), Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, (2nd ed.) 1983.

Geometria fractal e origami

Um entrelaçamento possível

Larangeira, Quendra[568] e Mathias, Carmen[569]

Resumo: *Sabendo das particularidades inerentes a área da Geometria Fractal, e considerando que em poucos cursos de de Matemática Licenciatura esse tópico consta no currículo, este trabalho tem como objetivo apresentar um recorte de uma pesquisa em andamento, cuja proposta de trabalho consta no estudo de tal Geometria. Além disso, pretende-se compartilhar os conhecimentos por meio de uma oficina que visa apresentar as características da referida Geometria e propor a construção do fractal Esponja de Menger utilizando origamis. Essa atividade está sendo planejada para ser aplicada em acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade localizada no sul do país.*

Palavras-chave: *Geometria fractal, origami, formação de professores.*

INTRODUÇÃO

É famosa a frase "nem as nuvens são esféricas, nem as montanhas cônicas, nem as costas circulares, nem a casca [da árvore?] lisa nem tampouco o raio é retilíneo" [6]. Ao estudo de formas que a Geometria Euclidiana não é capaz de descrever, caracterizadas por irregularidades e fragmentações, Mandelbrot chamou de Geometria Fractal [9, 6].

Podemos dizer que a geometria fractal surgiu ao acaso - para fazer um pequeno trocadilho com a teoria que a acompanha, a teoria do caos. Benoit Mandelbrot, geômetra natural, como afirma Stewart (2019), concebeu a Geometria Fractal após inúmeros contatos com estruturas chamadas curvas patológicas, buscando modelos matemáticos que descrevessem a natureza [6].

Assim, o que temos, em termos de Geometria Euclidiana, é uma simplificação da realidade, reunindo estruturas idealizadas e simples para que se trabalhe com elas. Nesse sentido, os fractais possuem estruturas complexas e detalhadas em todas as escalas de ampliação [9].

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê o estudo de Geometrias não Euclidianas, especificamente de fractais, na etapa do ensino médio, buscando desenvolver habilidades de interpretação e compreensão da realidade [?]. No entanto, para que se trabalhe com este tema, é necessário que o professor tenha conhecimento sobre ele. Em geral, os cursos de licenciatura em Matemática em sua maioria, e na Universidade Federal de Santa Maria (UFSM), em particular, não apresenta a Geometria Fractal na grade curricular.

Dessa forma, este trabalho, recorte de uma pesquisa em andamento, tem como objetivo delinear uma proposta de oficina de construção do fractal Esponja de Menger utilizando origamis para acadêmicos de licenciatura em matemática da UFSM. Para tanto, traremos um breve referencial teórico acerca do tema e a proposta da oficina.

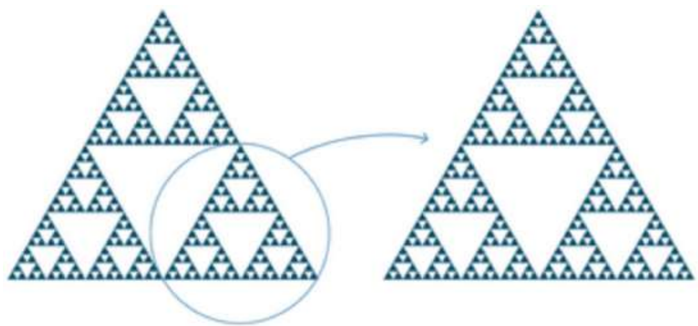
[568] Universidade Federal de Santa Maria. Este autor foi apoiado pelo projeto PIBIC/Cnpq
[569] Universidade Federal de Santa Maria

GEOMETRIA FRACTAL

"[...] objetos matemáticos são modelos, não a realidade em si. Eles captam algumas características do mundo natural em forma idealizada, simples o suficiente para o cérebro humano analisar." [9]. Nesse sentido, apesar de ser amplamente conhecida, a Geometria Euclidiana não é a única geometria existente. No entanto, esta área da matemática também possui limitações, como por exemplo, descrever elementos da natureza. A Geometria Fractal possui características que a distingue das outras geometrias, como a autossimilaridade, a dimensão fractal e a complexidade infinita dos objetos. A seguir, falaremos brevemente de cada um desses itens.

A autossimilaridade diz respeito à similaridade entre uma pequena região e a região toda. Existem dois tipos de similaridade: a similaridade exata - existente em modelos matemáticos, em que o todo é formado por partes perfeitas delas mesmas, gerados por um processo iterativo - e a similaridade aproximada - existente na natureza, em que todas as partes são semelhantes ao todo [8]. Podemos citar como exemplo do primeiro o fractal Triângulo de Sierpinski, e do segundo um ramo de samambaia (Figuras 1 e 2, respectivamente).

Fig. 166: Triângulo de Sierpinski

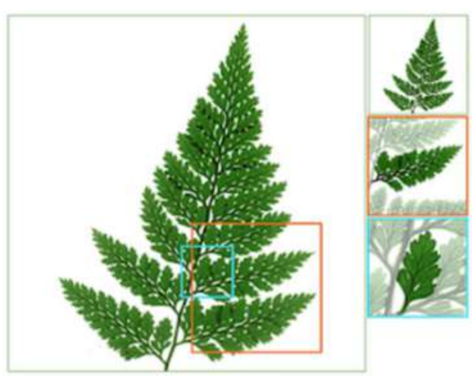


Fonte: [5]

A dimensão fractal representa "o grau de ocupação de uma estrutura no espaço que a contém" [2]. Por esta definição vê-se que, ao contrário da dimensão euclidiana, a dimensão fractal pode assumir valores não inteiros. A dimensão fractal é dada por

$$D_f = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

Fig. 167: Ramo de Samambaia

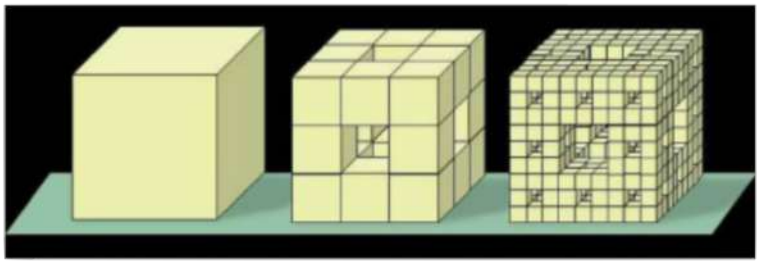


Fonte: [7]

Já a complexidade infinita está se referindo ao processo de geração de uma figura, ou seja, ao longo do processo de iterações, ocorrem iterações semelhantes a iteração anterior. No caso de fractais com autossemelhança exata, ou seja, aqueles modelados matematicamente, infinitas iterações podem ser realizadas, gerando uma estrutura infinitamente complexa [2].

O fractal a ser explorado na proposta que estamos desenhando é a Esponja de Menger, que, foi apresentado pela primeira vez por Karl Menger (1902 - 1985), um matemático austríaco [1]. Esse fractal é construído a partir de uma figura de três dimensões, sendo uma extensão tridimensional do Conjunto de Cantor e do Tapete de Sierpinski.

Fig. 168: Esponja de Menger



Fonte: [1]

A esponja é gerada a partir de um cubo, que deve ter cada uma de suas faces divididas em 9 quadrados e dessa forma o cubo original será dividido em 27 cubos menores. Retirando-se o cubo gerado a partir do quadrado localizado do meio de cada face e o cubo central, restam 20 cubos. Este é o primeiro nível da Esponja de Menger, que nada mais é do que o limite desse processo após um número infinito de iterações [1].

ORIGAMIS

Origami é a arte japonesa de dobrar papel, criando representações de objetos apenas com papel dobrado. Assim, a utilização dessa arte na matemática pode ser muito útil, tanto pela questão da utilização de material concreto quanto pela matemática presente no processo de dobradura em si. Essa arte, pode ser um aliado no ensino da geometria, podendo ser utilizado nas noções de ângulos, paralelismo, proporcionalidade e frações [4].

Ainda segundo a mesma pesquisa , o origami é um recurso que pode ser utilizado na exploração de propriedades matemáticas presentes nas figuras planas e sólidos geométricos. Além disso, a manipulação de objetos concretos auxilia na construção do conhecimento matemático, pois tanto a manipulação quanto a visualização tornam conceitos complexos mais fáceis de serem compreendidos.

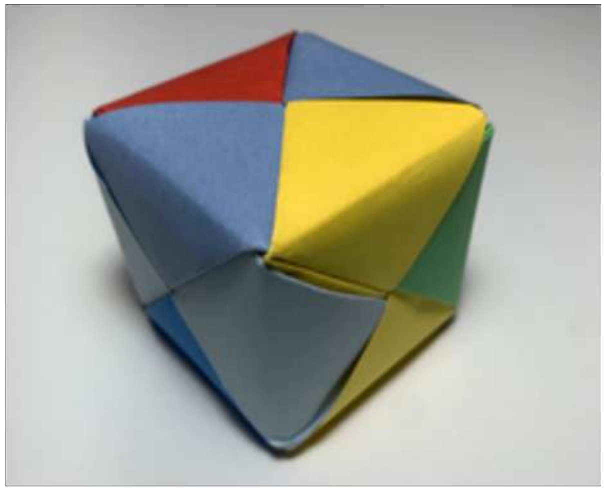
Nesse sentido, no presente trabalho, o origami será utilizado na construção da Esponja de Menger. Para tanto, precisa-se de 6 paralelogramos, construídos a partir da dobradura de papéis, que quando juntos, formam um cubo, como ilustrado abaixo.

PROPOSTA DE OFICINA

A partir do exposto, e considerando que os acadêmicos em licenciatura da UFSM não tem contato com a Geometria Fractal a partir das disciplinas ofertadas no curso, este trabalho propõe uma oficina a ser realizada com os alunos que já tenham cursado Geometria Plana e Espacial.

Pretende-se realizar quatro encontros: 1) para apresentar a pesquisa e a Geometria Fractal, destacando suas características e particularidades, bem como alguns fractais clássicos, como por exemplo o Conjunto de Cantor, a Curva de Von Koch e o Triângulo de Sierpinski.; 2) Apresentar a Esponja de Menger e suas características - dimensão, área e volume; 3) Apresentar os origamis e iniciar a construção dos cubos; 4) finalizar a construção da Esponja e realizar encaminhamentos finais.

Fig. 169: O cubo em origami



Fonte: Autoras

Em todas as etapas, pretende-se realizar conexões com o ensino básico, dentro de suas respectivas limitações. No entanto, acredita-se que a inserção da Geometria Fractal na educação básica, além de ser preconizada pela BNCC, pode facilitar o trabalho com a geometria, no momento em que exige o conhecimento de alguns conceitos da Geometria Euclidiana, ao mesmo tempo que a ultrapassa em alguns sentidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Arita, A. C. P.; Silva, F. S. M.; Gambera, L. R.; **A geometria da Esponja de Menger.** Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru v. 2, n. 2, p. 70-77, 2013.

[2] Assis, T. A.; Miranda,J. G. V.; Mota, F. B.; Andrade, R. F. S.; Castilho, C. M. C.; *Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais.* Revista Brasileira de Ensino de Física, [s. l.], v. 30, ed. 2, p. 2304-1 a 2304-10, 25 abr. 2024.

[3] Brasil; **Ministério da Educação.** Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

[4] Farias, E. M.; **Ensino de polígonos: Proposta metodológica a partir do origami.** 146 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2023.

[5] Fractalize [570]; **Triângulo de Sierpinski.** Juiz de Fora, Minas Gerais, 2021.

[6] Mandelbrot, B.; **La geometría fractal de la naturaleza.** 1. ed. Barcelona: Tusquets Editores, 662 p. ISBN 978-84-9066-913-6, 2021.

[7] Santos, L. F.; **A inserção da geometria fractal nas aulas de matemática nos anos finais do ensino fundamental: UM ESTUDO DE CASO.** Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, 114 p. 2020.

[8] Nunes, R. S. R.; **Geometria Fractal e Aplicações.** Tese (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade do Porto, [S. l.], 78 p., 2006.

[9] Stewart, I.; **Desbravadores da matemática: da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot.** 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 320 p. ISBN, 978-85-378-1838-1, 2019.

[570] `https://www2.ufjf.br/fractalize/`

Comparação dos frutos de duas espécies de porta-enxerto para o limão Tahiti, cultivados na região norte do Mato Grosso, através do teste t de Student para diferença entre médias de duas populações

Santos Filho, Rokécio V.[571] ; Daguetti, Yago A.[572] e Décio Júnior, Roberto[573]

Resumo: *O presente trabalho traz uma possibilidade de aplicação dos testes de hipótese na atuação do técnico em Agropecuária, mais especificamente, na comparaçãpo dos frutos de duas espécies de porta-enxerto do limão Tahiti, cultivadas no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso (IFMT) Campus Guarantã do Norte. Serão avaliadas as variáveis: volume e massa do fruto, e quantidade de suco do mesmo, comparando as médias através do teste t de Student. Espera-se, sobretudo, mostrar a Estatística como ferramenta na atuação profissional do técnico em Agropecuária.*

Palavras-chave: *Estatística inferencial; agropecuária; enxertia.*

INTRODUÇÃO

A enxertia, técnica comum e amplamente utilizada em fruticultura, baseia-se em fundir duas espécies diferentes de plantas, que irão se desenvolver como uma só. Nessa associação, o porta-enxerto é a planta que servirá como sistema radicular e o enxerto, a planta que por suas características (como o fruto, por exemplo), se tem interesse em produzir. A maioria das espécies de frutíferas de interesse econômico apresentam dificuldades de enraizamento natural [1], sendo a enxertia uma alternativa para a multiplicação/propagação dessas. O Campus Guarantã do Norte do IFMT, onde é ofertado o curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio, possui 13 espécies de porta-enxerto para o limão Tahiti, cada uma contando com 20 plantas (organizadas em 5 parcelas), oriundas de um projeto [2] que visou testar a viabilidade da cultura do

[571] Discente do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio do IFMT Campus Avançado Guarantã do Norte

[572] Discente do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio do IFMT Campus Avançado Guarantã do Norte

[573] Mestre em Modelagem Matemática, Professor do IFMT Campus Avançado Guarantã do Norte (decio.junior@ifmt.edu.br)

referido limão na região norte do estado do Mato Grosso, avaliando o crescimento vegetativo de diferentes espécies de porta-enxerto, buscando mostrar para quais espécies o limão Tahiti pode ser mais uma opção de produção para a agricultura da região, principalmente no que se refere à agricultura familiar.. Nesse contexto, este trabalho tem por objetivo aplicar conceitos de Estatística como ferramenta útil na atuação do Técnico em Agropecuária, aqui na subárea de fruticultura, para comparar os frutos obtidos de duas espécies de porta-enxerto para o limão Tahiti, disponíveis no Campus do IFMT da cidade de Guarantã do Norte.

METODOLOGIA E RESULTADOS ESPERADOS

Para isso, será empregado o teste t de Student, seguindo metodologia apresentada em [3], com uma amostragem aleatória por conglomerados, utilizando-se se um sistema eletrônico de sorteio para selecionar as plantas das quais serão colhidos os limões. As variáveis de estudo serão: volume (cm^3) e massa (g) do fruto e quantidade de suco (mL) do mesmo. O teste t de Student será aplicado separadamente para estas três variáveis, a fim de concluir se existe diferença na média destas nos frutos de cada espécie de porta-enxerto, ou não. Vale ressaltar que o objetivo deste estudo é empregar a estatística como ferramenta de avaliação e/ou tomada de decisão na área de atuação do Técnico em Agropecuária de fruticultura, e, sendo assim, não será discutida a relação dos resultados obtidos com a espécie do porta-enxerto considerado.

BIBLIOGRAFIA

[1] EMBRAPA **Enxertia em fruteiras.**. Recomendações técnicas 92 (ISSN 1415-0891). Porto Velho, 2005.

[2] EMBRAPA **Crescimento vegetativo de limeira-ácida 'Tahiti' sobre novos porta-enxertos no norte do Mato Grosso.**. Boletim de pesquisa e desenvolvimento 5 (ISSN 2675-0813). Sinop, 2021.

[3] MORETTIN, P.; BUSSAB, W. **Estatística Básica.**. 9ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

Ressignificando a trigonometria no curso técnico em agropecuária: construção de um dispositivo para medir distâncias em campo

Daguetti, Yago A.[574] e Décio Júnior, Roberto[575]

Resumo: *No sentido de ressignificar o tópico de trigonometria em triângulos quaisquer trabalhado em uma turma de 2o ano do curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio (CTAEM) do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso – Campus Avançado Guarantã do Norte (IFMT - GTA), foi feita a proposta de construir um dispositivo, tendo como inspiração um teodolito, que possibilitasse aos discentes medir distâncias utilizando as razões trigonométricas; comparando os resultados obtidos com as distâncias que constam no software Google Earth® e refletindo sobre as causas das diferenças a serem encontradas. Neste resumo, são trazidos 2 dos dispositivos criados, e os resultados obtidos pelos respectivos grupos de alunos da referida turma. Em suma, os discentes tiveram êxito na criação dos seus dispositivos, obtendo medidas satisfatórias e sentiram-se estimulados na realização do desafio proposto.*

Palavras-chave: *Trigonometria, agropecuária, teodolito, educação matemática, ensino de matemática.*

INTRODUÇÃO

No ensino de Trigonometria, quando explora-se as razões trigonométricas em triângulos quaisquer, com as leis do seno e do cosseno, um exemplo muito recorrente de aplicação é o uso do teodolito, aparelho que mede ângulos horizontais e verticais, possibilitando determinar tanto distâncias entre dois pontos como diferença de nível entre estes. Na área de atuação do Técnico em Agropecuária, os teodolitos foram de imensa valia para medir talhões, propriedades e identificar curvas de nível (Inteliagro, 2024).

No âmbito da educação profissional técnica integrada de nível médio, ofertada no Brasil majoritariamente pelos Institutos Federais, como o IFMT, um currículo integrado implica necessariamente a articulação entre conhecimentos básicos e conhecimentos técnicos, que, muitas vezes, fundem-se no processo de ensino e aprendizagem vislumbrando a formação humana integral (IFMT, 2022). Ademais, segundo Sonza Fagan (2022), a integração pode ser vista como uma possibilidade de construção de conhecimentos que podem ressignificar processos de ensino e aprendizagem.

---

[574]Discente do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio do IFMT Campus Avançado Guarantã do Norte

[575]Mestre em Modelagem Matemática, Professor do IFMT Campus Avançado Guarantã do Norte (decio.junior@ifmt.edu.br)

Nesse sentido, seguindo as diretrizes do currículo integrado, foi proposta a uma turma de 2o ano do curso CTAEM do IFMT/GTA uma atividade avaliativa na qual, após as aulas teóricas de trigonometria com resolução de exercícios do livro didático, os discentes deveriam construir um dispositivo, baseando-se no teodolito. Com este, medir ângulos horizontais, a fim de obter distâncias horizontais na área do Campus, as quais deveriam ser comparadas com as fornecidas pelo software Google Earth®, refletindo também sobre a diferença encontrada. Neste resumo, são trazidos dois dispositivos dos 5 criados na atividade com a referida turma.

RESULTADOS

Os dispositivos criados e respectivas áreas utilizadas para medição encontram-se na Figura 1.

O Grupo 1, criou um dispositivo utilizando um modelo transferidor impresso, sobre uma base de papelão, apoiado em um tripé metálico reaproveitado (conforme na Figura 1a), utilizando um canudo plástico para medir os ângulos na horizontal. Com este, mediu a distância entre dois pontos e os dois ângulos adjacentes ao segmento de reta formado, calculando a distância que atravessa o lago (Figura 1b), encontrando um erro $3,77\%$ em relação à medida fornecida pelo Google Earth®. O outro grupo (Grupo 2), confeccionou em madeira uma estrutura muito semelhante ao teodolito, utilizando um cano plástico para medir os ângulos, com um transferidor de plástico, e com um sistema de rotação que permitiria medições de ângulos na horizontal e vertical (Figura 1c). O grupo optou por determinar que o triângulo fosse retângulo através do seu dispositivo, e calculou a hipotenusa com um erro de $10,83\%$, na área mostrada na Figura 1d. Na reflexão sobre o erro encontrado, os grupos trouxeram o fato de estarem utilizando um equipamento artesanal, sem a mesma precisão do equipamento profissional, e a diferença de nível do terreno.

CONCLUSÕES

A atividade foi realizada pelos discentes conforme o proposto. Os dispositivos criados demonstraram sua criatividade e capacidade de resolver problemas utilizando Matemática. As distâncias calculadas através dos seus dispositivos e cálculos utilizando o que foi aprendido nas aulas de Trigonometria, aproximaram-se satisfatoriamente das distâncias fornecidas pelo software Google Earth®. Em relação ao aprendizado, os cálculos foram realizados corretamente e com segurança na apresentação que foi feita em sala de aula. Os discentes também demonstraram interesse e satisfação na atividade, por exemplo, fazendo até um trabalho adicional ao que foi proposto, como o Grupo 2.

Fig. 170: Dispositivos em (a) e (c), e as áreas utilizadas, em (c) e (d); respectivamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] Inteliagro. Peça de museu: Teodolito. Disponível em `https://www.inteliagro.com.br/teodolito/`. Acesso em 06 de maio de 2024.

[2] IFMT; **Texto-base indutor das Diretrizes da Educação Profissional Técnica-integrada de Nível Médio do IFMT**. Cuiabá, 2022.

[3] Sonza, A. ; Fagan, S.; **Um olhar sobre a matemática no ensino integrado: estudos relacionados**. Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico, 8: 189422, 2022. doi: `10.31417/educitec.v8.1894`.

Método de resolução para recorrências e equações diferenciais de segunda ordem: uma abordagem integrada

Costa, Ronaldo Campelo[576]; Oliveira Neto, Guilherme Luiz de[577] e Oliveira, Luiz Gustavo[578]

Resumo: *Ao compararmos as formas de resolução de recorrências de segunda ordem e equações diferenciais de segunda ordem, encontramos semelhanças no método de resolução que refletem a natureza subjacente desses problemas. Tanto as recorrências quanto as equações diferenciais de segunda ordem descrevem fenômenos que evoluem com base em relações entre valores atuais e passados, o que cria paralelos na abordagem para encontrar soluções. Uma das semelhanças notáveis é a ênfase na identificação e manipulação de padrões e relações entre diferentes iterações ou instantes no tempo. Em ambas as situações, o objetivo é encontrar uma expressão geral que descreva o comportamento do sistema ao longo do tempo ou em um intervalo específico. Isso muitas vezes envolve a determinação de soluções particulares, que representam casos específicos, e soluções homogêneas, que capturam a natureza recorrente ou regular do problema. Além disso, a utilização de técnicas analíticas é comum em ambas as áreas. Métodos como a substituição de soluções propostas, a aplicação de princípios de álgebra e cálculo, e a manipulação de equações são fundamentais tanto na resolução de recorrências como na solução de equações diferenciais. Esses métodos oferecem ferramentas poderosas para derivar soluções precisas e compreender o comportamento dos sistemas modelados. Outra semelhança reside na importância das condições iniciais ou de contorno. Assim como as equações diferenciais exigem condições iniciais para determinar soluções específicas, as recorrências também dependem de valores iniciais ou condições iniciais para determinar o comportamento futuro do sistema. Essas condições fornecem pontos de partida cruciais para a análise e a resolução de problemas. Portanto, ao explorar as semelhanças no método de resolução de recorrências de segunda ordem e equações diferenciais de segunda ordem, podemos aproveitar as percepções e técnicas de uma área para informar e aprimorar a compreensão e a resolução de problemas na outra área. Essa abordagem integrada não só amplia nosso repertório de ferramentas matemáticas, mas também destaca a interconexão e a complementaridade entre diferentes aspectos da teoria matemática.*

Palavras-chave: *Recorrências, equações diferenciais ordinárias, método de resolução, modelagem.*

[576] *Campus* Picos. Este autor foi apoiado pelo IFPI.
[577] *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI.
[578] *Campus* Floriano. Este autor foi apoiado pelo IFPI.

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas envolvendo recorrências e equações diferenciais de segunda ordem é fundamental em diversas áreas da matemática e da ciência. No entanto, muitas vezes esses dois tipos de problemas são abordados separadamente, resultando em técnicas distintas para cada caso. Este artigo propõe uma abordagem inovadora e integrada para resolver tanto recorrências quanto equações diferenciais de segunda ordem, visando simplificar o processo de resolução e oferecer uma compreensão unificada desses conceitos matemáticos.

Ao unir técnicas específicas para cada tipo de problema, este método proporciona uma estrutura coesa e versátil para lidar com uma variedade de desafios matemáticos. Em vez de tratar recorrências e equações diferenciais de segunda ordem como entidades separadas, a abordagem integrada deste artigo permite que os praticantes da matemática incorporem uma única metodologia para resolver ambos os tipos de problemas. Isso não apenas simplifica o processo de resolução, mas também promove uma compreensão mais profunda das relações subjacentes entre esses conceitos, ampliando o horizonte de aplicação e facilitando a solução de problemas complexos em diversas áreas.

Estruturas matemáticas das recorrências e das equações diferenciais de segunda ordem

As recorrências de segunda ordem são um tipo de sequência matemática em que cada termo é definido em relação aos dois termos anteriores. Essas recorrências são comumente representadas por uma equação que expressa o termo atual em função dos dois termos anteriores, juntamente com condições iniciais que especificam os valores dos primeiros termos da sequência. Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes é da forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0 \tag{145}$$

Para resolver recorrências de segunda ordem, uma abordagem comum é utilizar técnicas como a substituição, onde a recorrência é transformada em uma equação polinomial ou exponencial, facilitando sua resolução. Outro método frequentemente empregado é a técnica da árvore de recursão, que visualiza a recorrência como uma árvore, permitindo uma compreensão mais intuitiva de sua estrutura e padrões.

Com relação a equação diferencial de segunda ordem homogênea geralmente segue uma estrutura básica que expressa a relação entre uma função desconhecida e suas derivadas de segunda ordem em relação a uma variável independente. Aqui está a estrutura típica de uma equação diferencial de segunda ordem:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{146}$$

A solução de uma equação diferencial de segunda ordem envolve encontrar a função que satisfaz a equação diferencial dada, juntamente com as condições iniciais ou de contorno apropriadas. Dependendo da natureza da equação diferencial e das condições fornecidas, a solução pode assumir várias formas.

CONCLUSÕES

O método integrado para resolver recorrências e equações diferenciais de segunda ordem proposto neste contexto busca unir técnicas específicas para cada tipo de problema, oferecendo uma abordagem unificada que simplifica o processo de resolução e promove uma compreensão mais profunda das relações entre esses conceitos matemáticos.

Ao integrar métodos para lidar tanto com recorrências quanto com equações diferenciais de segunda ordem, os praticantes da matemática podem aplicar uma única metodologia para resolver ambos os tipos de problemas. Isso não apenas simplifica o processo de resolução, mas também permite uma compreensão mais ampla e coesa das estruturas matemáticas subjacentes.

O método integrado pode envolver técnicas como a substituição, onde a recorrência ou equação diferencial é transformada em uma forma mais fácil de resolver, a abordagem de árvore de recursão, que permite visualizar a estrutura da recorrência, e métodos analíticos ou numéricos para encontrar soluções específicas.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRAHAM, R. L; KNUTH, D. E; PATASHNIK, O. **Concrete Mathematics: a foundation for computer science**. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, sixth printing, 1990.

[2] HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Coleção Textos Universitários. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[3] LIMA, E. L; CARVALHO, P. C. P; WAGNER, E; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 4: Enunciados e Soluções dos Exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[4] Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2015). **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC.

Baralhos e passeios aleatórios[579]

Alves, Raphael[580]; Estácio, Sabrina[581]; Frómeta, Susana[582]; Jara, Milton[583]; Marinho, Rodrigo[584]; Marques, Luiz[585]; e Pimenta, João[586]

Resumo: *Desejamos utilizar um baralho com $2K$ cartas para simular um passeio aleatório de comprimento T, em que $T < 2K$. Em particular, nos concentramos na simulação obtida ao estabelecer que metade das cartas, quando sorteadas, representam um movimento para a esquerda e, a outra metade, representa um movimento para a direita. Formalmente, essa simulação é uma variável aleatória X entre o espaço dos possíveis embaralhamentos das $2K$ cartas e o espaço dos possíveis passeios aleatórios de comprimento T. É intuitivo pensar que, para uma quantidade fixa de cartas sorteadas, a medida de probabilidade induzida por X deva se comportar como a medida uniforme, se aumentarmos a quantidade de cartas do baralho. Como a intuição humana quase sempre é traída pelos estudos em Probabilidade, o objetivo deste trabalho é apresentar uma relação entre a quantidade de cartas no baralho e a quantidade de cartas sorteadas para que a medida de probabilidade induzida por X se comporte como a medida uniforme, a menos de um pequeno erro que conseguimos estimar.*

Palavras-chave: *Baralho, passeio aleatório simétrico, simulação, medida de probabilidade, distância de variação total.*

INTRODUÇÃO

Imagine que um professor, durante uma aula, deseje realizar uma simulação do passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$. Isto é, em instantes discretos, a partícula pode se mover para o inteiro à sua direita ou para o inteiro à sua esquerda com igual probabilidade.

Uma forma de fazer essa simulação é utilizando uma moeda honesta: lança-se a moeda e, se o resultado for cara, dá-se um passo à direita. Se for coroa, dá-se um passo à esquerda. Porém, o ato de lançar a moeda não é prático, e pode ser laborioso realizar esse experimento repetidas vezes. Uma alternativa possível é utilizar um baralho de cartas: atribuindo ações às cartas, podemos fazer simulações apenas revelando-as uma-a-uma, sem reposição, o que é bem mais prático.

Dentre as diversas formas de se atribuir ações às cartas, uma simples maneira é — considerando que o baralho está dividido em cartas vermelhas e pretas — atribuir às cartas vermelhas a ação de dar um passo

[579]Este trabalho foi apoiado pela FAPESP
[580]FFCLRP-USP
[581]ICEx-UFMG
[582]IME-UFRGS
[583]IMPA
[584]UFSM-CS
[585]IME-USP
[586]IFSC-USP

à esquerda, e às cartas pretas a ação de dar um passo à direita. Este procedimento será denominado no decorrer deste texto como *simulação tradicional*.

Tipo (cor)	Movimento atribuído
♣ ♠	$\rightarrow$
♥ ♦	$\leftarrow$

Tab. 17: Ação atribuída às cartas na *simulação tradicional*.

Há, porém, um detalhe a ser observado. Suponha que a carta sorteada na primeira retirada seja preta. No momento que precede a retirada da segunda carta, o baralho tem uma carta vermelha a mais do que pretas, fazendo com que a probabilidade de ser retirada uma carta vermelha seja ligeiramente maior que a probabilidade de ser retirada uma carta preta, o que não deveria ocorrer em um passeio aleatório simples simétrico. Esta situação pode se agravar se mais cartas pretas forem retiradas seguidamente. Nessa simulação, os passos apresentam dependência com os anteriores, fato que não ocorre com a moeda.

Será que, ainda assim, este procedimento é adequado para simular o passeio aleatório que desejamos? Caso sim, quantas cartas precisa ter o baralho para que uma simulação de comprimento T fixo seja considerada boa?

O objetivo deste trabalho é apresentar a lei induzida pela *simulação tradicional* sobre as trajetórias possíveis, e o quão distante essa lei é (usando a distância de variação total) da lei representada pela simulação com uma moeda (com variáveis independentes e identicamente distribuídas). Nesse sentido, o nosso principal resultado apresenta uma resposta direta às questões propostas acima e descreve a quantidade de passos que podemos simular de um passeio aleatório para um baralho com $N = 2K$ cartas de modo que seja possível manter um controle arbitrário sobre a distância entre as distribuições.

O TEOREMA PRINCIPAL

Antes de começar a resolver qualquer problema, é necessário definir as bases que sustentam as nossas ideias, e colocar em jogo as ferramentas que temos à disposição para atacar o problema. Nesse sentido, temos que definir um *passeio aleatório simples simétrico*, e formalizar as ideias já citadas de *baralho* e *simulação*.

O parâmetro utilizado para avaliar se a simulação é boa ou não se chama *distância de variação total*, que é uma medida que determina o quão próximas estão duas distribuições de probabilidade. Durante o desenvolvimento dos nossos cálculos, surgiram duas distribuições de probabilidade conhecidas: a *binomial* e a *hipergeométrica*

Utilizando esses conceitos, podemos enunciar nosso teorema principal. A demonstração segue de uma série de manipulações e estimativas para se obter uma expressão que determine a distância de variação total entre a distribuição induzida pela *simulação tradicional* e a distribuição induzida pela simulação com a moeda, que é uma distribuição normal.

Teorema 9.44 *Para todo $c \geq 2$,*

$$d_T(cT) = \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \tag{147}$$

em que erf *acima é a função erro de Gauss definida por*

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt$$

e

$$\gamma_c = \sqrt{(c-1)\log\left(\frac{c}{c-1}\right)}. \tag{148}$$

O resultado acima nos permite calcular a proporção de cartas que o baralho deve ter em relação à quantidade de cartas retiradas para que a distância de variação total seja menor ou igual à algum valor desejado. Em outras palavras, calculamos quantas cartas precisamos ter à disposição para que a simulação seja aceitável, a menos de um pequeno erro que podemos controlar.

Alguns valores notáveis para $d_T(cT)$ em função de c podem ser observados na Tabela 18 a seguir.

$d_T(cT)$	c
0.160	2.00
0.100	2.94
0.050	5.35
0.010	24.70
0.005	48.89
0.001	242.47

Tab. 18: Relação de valores notáveis derivados a partir do Teorema 9.44.

A informação que essa tabela carrega é que, se impusermos que a distribuição tenha $d_{\mathrm{VT}}(\mu_{X,T}) \leq 0.05$, por exemplo, devemos tomar um baralho no qual a quantidade de cartas seja $N = \lceil 5,35 \cdot T \rceil$, com T suficientemente grande. Os outros valores têm interpretação análoga e o comportamento completo da função pode ser melhor observado na Figura 171.

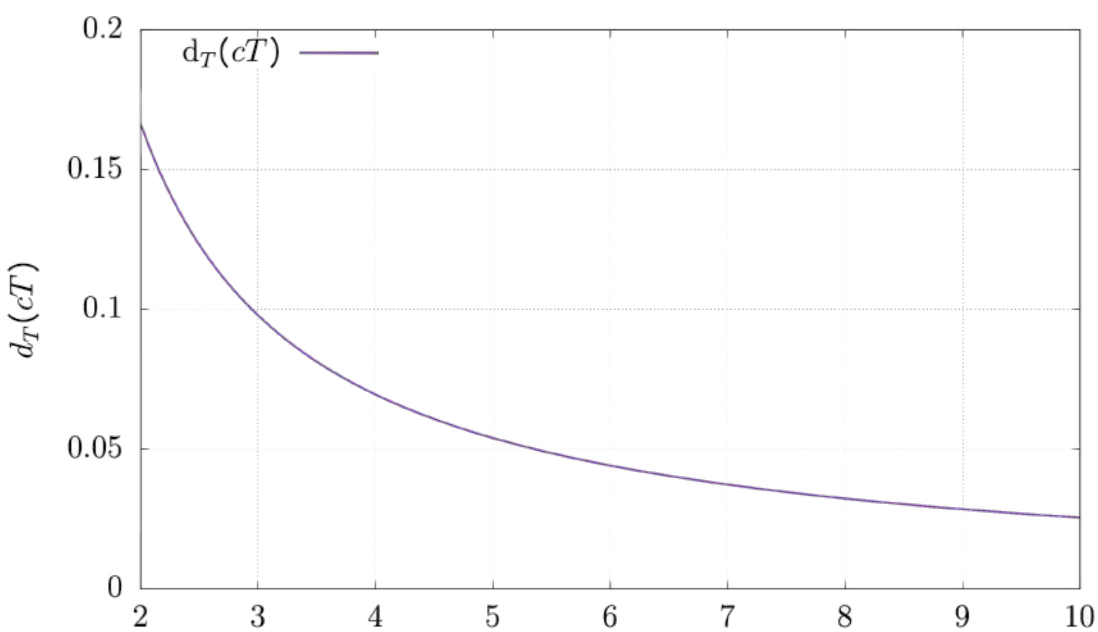


Fig. 171: Gráfico da função $d_T(cT)$ definida pelo Teorema 9.44.

CONCLUSÕES

Quando o baralho é o menor múltiplo inteiro possível do passeio aleatório simulado, ou seja, temos à disposição o dobro de cartas do que queremos retirar, a função dista da distribuição normal apenas $0,16$, e só tende a diminuir conforme a quantidade de cartas disponíveis cresce!

Surpreendemente, dessa vez a Probabilidade não traiu a intuição humana. Isso quer dizer que, de fato, quando temos um baralho com muitas cartas, ele é uma excelente ferramenta para simular um passeio aleatório simples simétrico.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAYER, D.; DIACONIS, P. Trailing the dovetail shuffle to its lair. **The Annals of Applied Probability**, v. 2, n. 2, p. 294-313, 1992.

[2] FRANCO, T. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. IMPA. Coleção Matemática Universitária, 2020.

[3] LEVIN, D.A.; PERES, Y. **Markov Chains ans Mixing Times**, MBK. American Mathematical Society, 2017.

[4] SPENCER, J. **Asymptotia**, Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2014

Grupos de isotopia e espaços de Moduli de superfícies de Riemann

Costa, Sidnei Furtado[587]

Resumo: *Neste trabalho apresentaremos as ideias principais sobre os Grupos de Isotopia e os Espaços de Moduli de superfícies de Riemann, e como eles conectam Álgebra, Geometria e Topologia. O grupo de isotopia Mod(S) de uma superfície de Riemann S, é o grupo das classes de isotopia de homeomorfismos de S que preservam orientação. O espaço de moduli $\mathcal{M}(S)$ das superfícies de Riemann homeomorfas a S é um objeto extremamente importante em matemática e é possível descrever boa parte de suas caracteristicas topológicas usando o grupo de isotopia de S. Mostraremos os detalhes da relação entre a estrutura algébrica de Mod(S) e a topologia de $\mathcal{M}(S)$, examinaremos exemplos concretos, resultados importantes e possíveis aplicações dessa teoria.*

Palavras-chave: *moduli, superfície, isotopia, teichmüller.*

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta a relação entre o espaço de isotopia e o espaço de moduli das estruturas geométricas de uma superfície de Riemann. Inicialmente, são introduzidos os conceitos essenciais e alguns resultados fundamentais sobre superfícies de Riemann. Em seguida, discutimos sobre espaços de moduli e espaços de isotopia, com a apresentação de exemplos, alguns resultados importantes e a relação entre esses dois espaços.

SUPERFÍCIES DE RIEMANN

Uma superfície de Riemann é uma variedade real bidimensional localmente homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$.

Um importante resultado em topologia diz que uma superfície de Riemann fechada é homeomorfa a uma esfera, ou a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos.

O teorema a seguir apresenta uma importante relação entre a geometria e a topologia de uma superfície de Riemann.

Teorema. Seja S uma superfície de Riemann. If $\chi(S) < 0$, então S admite uma métrica hiperbólica. Se $\chi(S) = 0$, então S admite uma métrica euclidiana.

[587]Universidade do Estado de Santa Catarina.

ESPAÇOS DE MODULI E GRUPOS DE ISOTOPIA

Espaços de moduli são espaços que representam coleções de objetos matemáticos com certas propriedades ou características em comum. O termo *moduli* foi introduzido por Riemann in 1857.

Vejamos alguns exemplos de espaços de moduli:

- o espaço projetivo real de dimensão um é o espaço de moduli das retas em $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem.
- o espaço de moduli de todas as retas em $\mathbb{R}^2$ é uma fita de Mobius.
- O espaço de moduli de todos os triângulos no plano $\mathbb{R}^2$, a menos de semelhança, é um triângulo.

Um dos exemplos mais famosos de espaços de moduli é o espaço das superfícies de Riemann compactas de gênero $g \geq 1$. É possível definir uma relação de equivalência no conjunto S_g de todas as superfícies de Riemann compactas de gênero g da seguinte forma: duas superfícies de Riemann em S_g são equivalentes se existir um mapa biholomorfo entre elas. O conjunto S_g por essa relação de equivalência é o espaço de moduli de tais superfícies de Riemann [1]. Esse espaço é denotado por $\mathcal{M}(S_g)$.

Um dos resultados mais relevantes a respeito do espaço $\mathcal{M}(S_g)$ é o seguinte
Teorema: Para $g \geq 1$, o espaço $\mathcal{M}(S_g)$ é um orbifold cujo recobrimento universal é contrátil.

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [2].

Seja S uma superfície de Riemann. Uma *isotopia* entre dois homeomorfismos $f, g : S \to S$ é uma homotopia $h : S \times I \to S$ tal que para todo $t \in I$, a aplicação $x \mapsto h(x,t)$ é um homeomorfismo de S. Quando uma tal isotopia existe, dizemos que f e g são isotópicas. O grupo de isotopia de S, denotado por $\mathrm{Mod}(S)$ é o conjunto de todas as classes de isotopia de homeorfismos de S que preservam orientação com a operação induzida pela composição de homeomorfismos. Se $\mathrm{Hom}^+(S)$ é o grupo dos homeomorfismos de S que preservam orientação e $\mathrm{Hom}_0(S)$ é o subgrupo de tais homeomorfismos que são isotópicos à identidade, é fácil ver que $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Hom}^+(S)/\mathrm{Hom}_0(S)$ [2, 3].

Vejamos alguns exemplos de grupos de isotopia:

- o grupo de isotopia do disco aberto no plano é trivial.
- o grupo de isotopia do toro é o grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$.
- o grupo de isotopia da esfera é trivial.

O espaço de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ de uma superfície de Riemann S com $\chi(S) < 0$, é o conjunto $\mathcal{H}(S)$ das estruturas hiperbólicas em S a menos de isotopia, ou seja,

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{H}(S)/\mathrm{Hom}_0(S).$$

A ação de $\mathrm{Hom}^+(S)$ em $\mathcal{H}(S)$ induz uma ação de $\mathrm{Mod}(S)$ em $\mathcal{T}(S)$. A aplicação quociente de $\mathcal{T}(S)$ para $\mathcal{M}(S)$, induz uma bijeção

$$\mathcal{M}(S) = \mathcal{T}(S)/\mathrm{Mod}(S)$$

Os detalhes sobre deste fato podem ser encontrados em [4].

CONCLUSÕES

Este trabalho explorou as relações entre o grupo de isotopia e o espaço de moduli de uma superfície de Riemann. Observamos que existe uma estreita relação entre a estrutura algébrica do grupo de isotopia $\mathrm{Mod}(S)$ e a topologia do espaço de moduli $\mathcal{M}(S)$. Essa abordagem oferece perspectivas úteis para futuras investigações e aplicações em geometria e topologia.

BIBLIOGRAFIA

[1] JI, L., **The story of Riemanns moduli space**, ICCM Not. 3 (2015), no. 2.

[2] FARB, B., MARGALIT, D., **A Primer on Mapping Class Groups**,‘ Princeton University Press, 2012

[3] LIMA, E. L., **Grupos de Isotopia**, Gazeta, No 66, pág. 2, 1966

[4] RATCLIFFE, J. G., **Foundations of Hyperbolic Manifolds**, Springer Cham, 2019

Aplicando a teoria espectral em subclasses de grafos tripartido completo

Gama, Simone[588]

Resumo: *Este trabalho apresenta a determinação espectral do grafo tripartido completo, mais especificamente as subclasses $K_{1,1,i}$ e o $K_{1,2,i}$ para $i \geq 1$. Os polinômios característicos e os autovalores para $i = 1, 2, \ldots, 8$ dessas subclasses são apresentadas.*

Palavras-chave: *Teoria espectral de grafos, grafos tripartidos completos, polinômios característicos, autovalores.*

INTRODUÇÃO

Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto finito não-vazio onde $V(G)$ é um conjunto de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas. Cada elemento e no conjunto E é um par (i, j) que indica que o vértice i é adjacente ao vértice j (ou seja, são adjacentes, e a aresta e incide em i e j). O grafo é dito não-direcionado quando os pares que representam as arestas são não-ordenados, isto é, $(i, j) = (j, i)$. A representação gráfica de um grafo consiste em pontos distintos do plano associados a cada vértice e, para cada aresta (i, j), um segmento de reta conectando os pontos correspondentes aos vértices i e j. Todas as definições em grafos são baseadas em [5, 7].

Um grafo k**-partido** é um grafo cujos vértices podem ser particionados em k partes, onde quaisquer vértices em uma mesma parte são não-adjacentes entre si. Um grafo é k-partido completo se existe aresta entre todos os pares de vértices que estão em partes diferentes. No caso do grafo bipartido completo, o $k = 2$. No caso em que $k = 3$ de um grafo k-partido completo, o grafo é conhecido como **tripartido completo**. A Figura 172 apresenta um exemplo de grafo tripartido completo $K_{2,2,3}$.

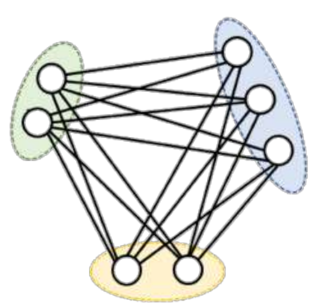


Fig. 172: Grafo tripartido completo $K_{2,2,3}$.

[588]Departamento de Engenharia de Sistemas e Computação. Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ).

Teoria Espectral dos Grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$ com n vértices. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é a matriz quadrada de ordem n cujas as entradas são $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e $a_{ij} = 0$ caso contrário. O polinômio característico dessa matriz $p_G = det(A - \lambda Id_n)$ é conhecido como **polinômio característico do grafo** correspondente e nos apresenta informações importantes a respeito das propriedades do grafo [3]. Trata-se de um polinômio de grau igual à ordem da matriz (que equivale a ordem do grafo) que o define. Suas raízes são os autovalores de A. Dizemos que λ é um **autovalor** do grafo G, se λ é um autovalor da sua matriz de adjacência $A(G)$, e que o polinômio característico de $A(G)$, $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ é o polinômio característico de G, notado $p_G(\lambda)$. Essas definições são baseados em [4, 6].

Caracterizações em grafos tripartido completo sob o olhar da álgebra linear são vistos em alguns trabalhos, como o trabalho de [1], que apresenta uma caracterização do grafo tripartido completo $K_{i,i,n-2i}$ para $n \geq 4$. O trabalho [2] apresenta uma caracterização em grafos tripartidos completos que são regulares e possuem estrela como complemento. Caracterizações em outras classes de grafos sob o aspecto da álgebra linear podem ser vistos em [4, 6].

ESPECTROS DOS TRIPARTIDOS COMPLETOS $K_{1,1,i}$ E $K_{1,2,i}$

Neste trabalho, o espectro dos grafos tripartido completo $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$, para $i \geq 1$ é apresentado. O polinômio característico e os autovalores desses grafos são apresentados. Seja n a quantidade de vértices para o grafo tripartido completo $K_{1,1,i}$, para $i \geq 1$, a quantidade de arestas é igual a $n + i$.

O polinômio característico da matriz $A(G)$ de ordem n possui grau n, isto é, $p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda, a_n$. Existem n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ associados a $A(G)$. A Tabela 19 apresenta esse polinômios característicos dos tripartidos completos $K_{1,1,i}$ e do $K_{1,2,i}$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$:

i	$K_{1,1,i}$	$K_{1,2,i}$
1	$-\lambda^3 + 3\lambda + 2$	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$
2	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$	$\lambda^5 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2$
3	$-\lambda^5 + 7\lambda^3 + 6\lambda^2$	$\lambda^6 - 11\lambda^4 - 12\lambda^3$
4	$\lambda^6 - 9\lambda^4 - 8\lambda^3$	$-\lambda^7 + 14\lambda^5 + 16\lambda^4$
5	$-\lambda^7 + 11\lambda^5 + 10\lambda^4$	$\lambda^8 - 17\lambda^6 - 20\lambda^5$
6	$\lambda^8 - 13\lambda^6 - 12\lambda^5$	$-\lambda^9 + 20\lambda^7 + 24\lambda^6$
7	$-\lambda^9 + 15\lambda^7 + 14\lambda^6$	$\lambda^{10} - 23\lambda^8 - 28\lambda^7$
8	$\lambda^{10} - 17\lambda^8 - 16\lambda^7$	$-\lambda^{11} + 26\lambda^9 + 32\lambda^8$

Tab. 19: Polinômios característicos do $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$

Os autovalores da matriz $A(G)$ não são necessariamente distintos. O número de vezes que um autovalor λ_i aparece como raiz do polinômio característico chama-se multiplicidade algébrica de λ_i e a denotamos m_i, $1 \leq i \leq n$. A matriz do tripartido completo é simétrica e real. Logo, seus autovalores são reais. A Tabela 20 apresenta os autovalores da matriz de adjacência dos tripartidos completos $K_{1,1,i}$ e do $K_{1,2,i}$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$:

i	$K_{1,1,i}$	$K_{1,2,i}$
1	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1.562, \lambda_4 = 2.562$
2	$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -(-1+\sqrt{17})/2, \lambda_3 = (1+\sqrt{17})/2, \lambda_4 = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1.2, \lambda_4 = 3.2$
3	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.484, \lambda_3 = -1.283, \lambda_4 = 3.7$
4	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2.372, \lambda_4 = 3.372,$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.919, \lambda_3 = -1.3, \lambda_4 = 4.218$
5	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2.702, \lambda_4 = 3.702,$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2.919, \lambda_3 = -1.3, \lambda_4 = 4.218$
6	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3.3, \lambda_3 = -1.308, \lambda_4 = 4.616$
7	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3.275, \lambda_4 = 4.275$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3.668, \lambda_3 = -1.313, \lambda_4 = 4.98$
8	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3.531, \lambda_4 = 4.531$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -1.317, \lambda_4 = 5.317$

Tab. 20: Autovalores do $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$

CONCLUSÕES

Como trabalhos futuros (em continuidade), deseja-se determinar a fórmula geral do polinômio característico e dos autovalores e autovetores dos tripartidos completos $K_{1,1,3}$ e $K_{1,2,3}$, além dos autovalores mínimos e máximos, bem como outras classes de grafos tripartidos completos.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALAWN, Nawras A.; AL-SAIDI, Nadia MG; RASHEED, Rashed T. Tripartite graphs with energy aggregation. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, v. 38, n. 7, p. 149-167, 2020.

[2] ASGHARSHARGHI, L. and Kiana, D., 2015. On Regular Graphs with Complete Tripartite Star Complements. Ars Comb., 122, pp.431-437.

[3] BARBOSA, Lucas Pereira; DO NASCIMENTO MARTINS, Victor. Aplicações de Álgebra Linear na Teoria dos grafos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

[4] CVETKOVIĆ, Dragoš M.; ROWLINSON, Peter; SIMIC, Slobodan. Eigenspaces of graphs. Cambridge University Press, 1997.

[5] CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. Chromatic graph theory. Chapman and Hall/CRC, 2019.

[6] DE MORAES, Patrícia Erthal. APLICAÇÕES DA TEORIA ESPECTRAL EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS. 2000. Tese de Doutorado. UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO.

[7] SZWARCFITER, J. L. Grafos e algoritmos computacionais (Graphs and Computational Algorithms). Editora Campus. Brazil. 1986.

Modelo de uma equação do 2º grau a partir dos números primos

Souza, Gladys[589] e Santos, Solange[590]

Resumo: *Este trabalho tem o objetivo de apresentar a elaboração de um modelo de equação do segundo grau a partir dos números primos para que a raiz do delta seja um número primo, bem como apresentar algumas regularidades nas raízes dessas equações. Os números primos é um tema muito relevante na Teoria dos Números e no desenvolvimento da Matemática ao longo de sua História. A dificuldade na resolução de uma raiz quadrada, cuja raiz é um número primo da forma* $\sqrt{n} = p$, *sendo* n^2 *e* $n \in \mathbb{N}$, *chamou bastante a atenção, o que desencadeou em um processo criativo para para a elaboração de uma equação de segundo grau. Neste estudo, buscou-se fundamentos sobre a curiosidade e criatividade aplicados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Portanto, apresentamos dados do processo criativo na resolução de uma questão problema quanto à sua solução e produto criativo, um modelo de equações de 2º grau com base em números primos.*

Palavras-chave: *Números primos, equação do 2º grau, ensino de matemática.*

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, tanto na Educação Básica quanto no Ensino superior não tem mostrado melhoras nos índices de aprendizado dos discentes, principalmente pós pandemia, mas o papel do professor é estimular os aprendizes da Matemática escolar a partir de um ensino que lhes mostre desafios instigantes e estimulantes que lhes desperte o gosto pela Matemática, pelo menos é o que se pensa de forma comum. Isto é um dos objetivos das Olimpíadas da Matemática e, nos resultados, perceber aqueles que estão mais propensos a gostar e ter sucesso nessa área. Entretanto, sabe-se que o gosto pelas coisa não podem ser impostos, muito de nossas tendências são idiossincráticas. Nos seres humanos ainda é um mistério a origem do porquê se gosta de algo, do motivo real por se querer vencer um determinado desafio, ou porque se entusiasma tanto pela Matemática e não por outra ciência.

Talvez por gostar tanto dos desafios e resolução de problemas matemáticos, que escolhemos esta área de estudo e a profissão de professora de Matemática. Desse modo, alguns erros na aprendizagem da Matemática, no toca de uma maneira que nos impulsiona para encontrar a solução correta. Felizmente a atuação dos professores têm apresentado mudanças significativas, com um olhar voltado para estimular ou dar mais valor à criatividade dos discentes. O que fez muita falta enquanto estudante tanto da Educação Básica, quanto no Ensino Superior. Tenho certezas que com o conhecimento na formação continuada dos professores de Matemática em Mestrados Profissionais como o PROFMAT, o de Ensino de Ciência e Matemática, bem como os doutorados na área de Ensino e Educação Matemática, propiciam uma visão mais ampliada.

[589]Universidade Federal de Roraima, `gladys.souza@ufrr.br`
[590]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, `solange.almeida@ifrr.edu.br`

Neste estudo vamos apresentar dois modelos de equação de segundo grau elaborados a partir dos primos. Este estudo teve início a partir de alguns questionamentos: (1) Por que a dificuldade em resolver raiz quadrada (sem o uso de calculadora) da forma $\sqrt{n} = p$, sendo n^2 e $n \in \mathbb{N}$?; (2) Existe algum modelo de equação de 2º grau cuja raiz do discriminante seja um número primo? A primeira pergunta não é difícil de ser respondida, pois os alunos entram em contato com os números primos somente no 6º ano do Ensino Fundamental e depois não são mais estimulados a usarem, quando chegam no 9º ano que estudam equação do 2º grau, ainda não amadureceram o conhecimento matemático e a maioria apresenta dificuldade de fatoração, decomposição em fatores primos e não sabem identificar um número primo de um número composto. A dificuldade de decompor um número em fatores primos é o que leva á dificuldade de resolver este tipo de questão. Quanto à segunda questão, pesquisou-se em grande maioria das coleções de Matemática e não encontramos exemplos desse tipo de equação.

Os números primos sempre despertaram a curiosidade, mesmo porque são a base para a solução de alguns problemas em aberto na Matemática até hoje. Desse modo, como já estava em processo de estudo desses números passamos a tentar elaborar um modelo de equação do segundo grau para que a raiz do discriminante fosse sempre um número primo. Essa iniciativa e a motivação podem ser relacionadas com a criatividade.

Segundo Ausubel [[1], p. 471] "a criatividade é a expressão mais elevada da solução de problemas, envolvendo novas ideias ou transformações originais de ideias e a gênese de novos princípios integrativos (superordenados) e explicativos". Como professor e pesquisador no campo da criatividade Contijo [[2], p. 80] enfatiza "ao buscar meios de avaliar a criatividade, estamos interessados em compreender a dinâmica do processo criativo e, a partir dos resultados encontrados, estimular os estudantes a realizar uma autorreflexão quanto às suas próprias capacidades de criação".

Quando este modelo foi desenvolvido ainda estávamos na graduação de licenciatura em Matemática, ou seja, como discentes, é importante se ter estímulo dos professores para que se possa abordar os problemas matemáticos de forma que se possa obter sucesso em sua resolução.

Na visão de Polya [[5], p. 147], para resolver um problema matemático deve-se partir de conceitos muito claros, que estão razoavelmente ordenados na mente, pois num problema matemático perfeitamente formulado, devem ser considerados todos os dados e todas as cláusulas da condicionante, não se esquecendo de fazer indagações sobre o problema e o processo, bem como avaliar as informações disponíveis.

Dessa forma, foi necessário fazer um estudo prévio e preparatório, bem como observar e realizar alguns experimentos com os números primos e a equação de 2º grau completa conhecida por fórmula de Bháskara. Entretanto, Dante [[3], p. 47] informa que "o hábito de dar o nome de *Bhaskara* para essa fórmula se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente, é apenas brasileiro, pois não se encontra o nome de *Bhaskara* para a fórmula em outros países". E, de acordo com Lucas e Raizarro [[4], p. 380] "em se tratando de equações polinomiais, no século XII, o matemático *Sridhara* determinou a fórmula atual para a resolução das equações do segundo grau, conhecidas como *Bhaskara*".

Equação de 2º grau completa conforme modelo "de Bháskara"

Toda equação com uma incógnita que pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau. Assim, a igualdade $ax^2 + bx + c = 0$ é chamada de forma geral da equação do 2º grau, em que os números a, b e c, são os coeficientes da equação, e x é a incógnita. Neste tipo de equação, além de $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, dizemos que a equação do 2º grau é completa.

Vamos usar a fórmula conhecida como de Bhaskara para achar $\sqrt{\Delta} = P \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Indicamos o valor da expressão $b^2 - 4ac$ pela letra grega Δ (delta). Assim: $\Delta = b^2 - 4ac$. Substituindo na fórmula da resolução da equação do 2º grau, obtemos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Essa fórmula vale para qualquer equação do 2° grau. Ela permite calcular o valor de x utilizando os coeficientes a, b, e c. O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação do 2°grau $ax^2 + bx + c = 0$. O valor de Δ (positivo, negativo ou nulo) é que determina quantas raízes reais a equação tem quando seus coeficientes são reais. Desse modo, quando $\Delta > 0$, a equação têm duas raízes reais e distintas.

Logo, as raízes reais (se existirem) são representadas por: $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

No caso do nosso modelo que envolve os números primos, o delta será sempre positivo, tendo duas raízes reais e distintas. Só que neste caso o delta deverá ser um quadrado perfeito de um número primo, ou seja, $\Delta = p^2$.

Elaborando o 1º modelo matemático com os números primos

Para construir o novo modelo vamos usar a forma geral e a resolução por Bháskara. Assim, dado dois primos p_i e p_s, onde p_s é o primo subsequente a p_i, eles serão usados para compor a equação, com $p_i = b$ e c será um número negativo da forma: $c = -\frac{(p_s^2 - p_i^2)}{4}$. Entretanto, no numerador tem-se uma diferença de quadrado, ou seja, $p_s^2 - p_i^2 = (p_s + p_i)(p_s - p_i)$. Logo, o valor de c pode ser calculado da seguinte forma: $\frac{(p_s+p_i)\cdot(p_s-p_i)}{4}$.

Logo, a equação de 2º grau completa ficará constituída de: $ax^2 + p_i x - \frac{(p_s+p_i)(p_s-p_i)}{4} = 0$, com $\sqrt{\Delta} = p_s$ e, sendo $\Delta > 0$, haverá duas raízes reais e distintas.

Exemplo 1: de aplicação do modelo: $ax^2 + p_i x - \frac{(p_s+p_i)(p_s-p_i)}{4} = 0$.

Dado dois primos consecutivos: 3 e 5, onde $p_i = 3$ e $p_s = 5$. Vamos substituir os números na equação de 2º de primos:

$a = 1$, $b = 3$ e $c = -\frac{(p_s+p_i)(p_s-p_i)}{4}$ (com a diferença de quadrados perfeitos de primos ímpares).

Vamos calcular primeiramente o número "c": $-\frac{(5+3)(5-3)}{4} = -\frac{8\times 2}{4} = -\frac{16}{4} = -4$.

Aplicando na equação: $ax^2 + 3x - 4 = 0$, com $a = 1$, $b = 3$ e $c = -4$.

Agora vamos testar se esta equação tem solução e se a raiz do discriminante é um número primo.

Resolvendo a equação: $x^2 + 3x - 4 = 0$, calculando primeiramente a raiz do discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (3^2) - 4 \cdot 1 \cdot (-4)$$
$$\Delta = 9 + 16$$
$$\Delta = 25 \quad \Rightarrow \sqrt{25} = 5$$

Calculando as raízes: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4.$$

Logo, as duas raízes reais são 1 e -4.

Elaborando o 2º modelo de equação do 2º grau com números primo

Criamos o segundo modelo de resolução da equação de 2º grau de números primos, mas, diferente de Bháskara. Assim, dado dois primos (p_i e p_s), usando a forma geral, onde $a = 1$, $b = p$ e $c = -\frac{(p_s^2 - p_i^2)}{4}$ ou $-\frac{(p_s+p_i)(p_s-p_i)}{4} = 0$.

Dada a fórmula geral: $ax^2 + p_i x - \frac{(p_s+p_i)(p_s-p_i)}{4} = 0$.

Para o cálculo das raízes (x_1): $x_1 = \frac{p_s - b}{2}$ e $x_2 = \frac{c}{x_1}$.

E para a verificação temos $b = p_s - 2x_1$ e $c = x_1 x_2$.

Ou seja, obtemos a primeira raiz (x_1) e o resultado será usado para encontrar a segunda raiz (x_2).

Resolvendo com o exemplo 1:

Aplicando o modelo matemático: dados $p = 7$ e $p_s = 11$ para $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$ e $b = 7$.

Calculando o valor de $c = -\frac{(11^2 - 7^2)}{4} = -\left(\frac{(11+7)(11-7)}{4}\right) = -\frac{72}{4} = -18$.

Logo, a equação do 2º grau é da seguinte forma: $x2 + 7 - 18$

Resolvendo as raízes: $x_1 = \frac{p_s - b}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{11-7}{2} = 2$

$x_2 = \frac{c}{x_1} = \frac{-18}{2} = -9$.

Podemos confirmar a partir de: $b = p_s - 2x_1$ e $c = x_1 x_2$

Sendo: $x_1 = 2$ e $x_2 = -9 \Rightarrow$

Calculando o valor de b:

$$\begin{aligned} b &= p_s - 2x_1 \\ 7 &= 11 - 2 \times 2 \\ 7 &= 11 - 4 \\ 7 &= 7 \end{aligned}$$

Calculando o valor de c:

$$\begin{aligned} c &= x_1 x_2 \\ -18 &= 2 \times (-9) \\ -18 &= -18 \end{aligned}$$

Vamos apresentar cinco exemplos de equações com pares de números primos.

Sendo
$p_i = 11$ e $p_s = 13 \Rightarrow x^2 + 11x - 12 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$
$p_i = 13$ e $p_s = 17 \Rightarrow x^2 + 13x - 30 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$
$p_i = 17$ e $p_s = 19 \Rightarrow x^2 + 17x - 18 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 19$
$p_i = 19$ e $p_s = 23 \Rightarrow x^2 + 19x - 42 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 23$
$p_i = 23$ e $p_s = 29 \Rightarrow x^2 + 23x - 78 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 29$

Agora, vamos apresentar cinco exemplos de equações de 2º grau com números primos, quando fixamos o valor de $b = p$ e mudamos os valores de p_s.

Para $p = 3$ e $p_s = 7 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 7$
Para $p = 3$ e $p_s = 11 \Rightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$
Para $p = 3$ e $p_s = 13 \Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 13$
Para $p = 3$ e $p_s = 17 \Rightarrow x^2 + 3x - 70 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 17$
Para $p = 3$ e $p_s = 19 \Rightarrow x^2 + 3x - 88 = 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 19$

Algumas considerações:

Para equações de 2º grau, quando os dois números primos são gêmeos:

- A raiz do discriminante ($\sqrt{\Delta}$) será sempre o segundo número primo, dos dois números escolhidos, p_s, logo, $\sqrt{\Delta} = p_s$;
- A primeira raiz, x_1 será sempre um (1) que é a quantidade de número composto entre p_i e p_s.

Observamos alguns padrões com o uso de alguns números primos, observando suas terminações. Vamos apresentar um caso:

Caso 1: quando os pares (p_i e p_s) de números primos têm 3 números compostos entre eles:

Esses pares de números primos são encontrados a partir de três possibilidades de combinações, considerando o algarismo da unidade, ou seja, são pares de números primos terminados em: (3 e 7), (7 e 1) e (9 e 3). No intervalo de 1 a 1000, dos 168 números primos, são 40 os pares de primos com 3 números compostos entre eles.

Vamos apresentar um exemplo para dois números primos distintos, terminados em 3 e 7.

Gerando as equações de 2º grau com um par de números primos consecutivos (p e p_s) com apenas 3 números compostos entre eles, com base na forma geral, temos:

$$Ax^2 + bx - c = 0, \text{ onde } a = 1, b = p_i \text{ e } c = (p_i + 1) + (p_s - 1)$$

Exemplo: para números primos terminados em 3 e 7:

Dados os números primos $p = 13$ e $p_s = 17$

Entre os números primos 13 e 17 há os três números compostos 14, 15 e 16.

Calculando $c = (13 + 1) + (17 - 1) = 14 + 16 = 30$, logo $c = 30$.

Temos a equação de 2º grau formada pelos primos 13 e 17: $x^2 + 13x - 30 = 0$.

As raízes são determinadas por:

- A primeira raiz x_1 dá a quantidade de dois números compostos extremos, ou seja, será sempre o número 2, logo $x_1 = 2$.
- A segunda raiz x_2 será sempre o número composto do meio (visto que entre estes pares de primos haverá somente 3 números composto, ou seja, dois números pares das extremidades e um número ímpar, do meio, considerando seu valor absoluto $|-15| = 15$.

Resolvendo pelo nosso 2º modelo e também por meio da fórmula de Bhaskara.
1º resolveremos pelo nosso modelo: Para o cálculo das raízes (x_1): $x_1 = \frac{p_s - b}{2}$ e $x_2 = \frac{c}{x_1}$.
E para a verificação temos $b = p_s - 2x_1$ **e** $c = x_1 x_2$
Calculando as raízes: $x_1 = \frac{17-13}{2} = \frac{4}{2} = 2$ e $x_2 = \frac{-30}{2} = -15$.
Verificando com os valores de b e c:

$$\text{Para} \quad b = p_s - 2x_1 \Rightarrow 13 = 17 - 2 \times 2$$
$$13 = 17 - 4$$
$$13 = 13$$

$$\text{Para} \quad c = x_1 x_2 \Rightarrow -30 = 2 \times (-15)$$
$$-30 = -30$$

Resolvendo a equação pela fórmula de Bhaskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 13^2 - 4 \times 1 \times (-30) \Rightarrow 169 + 120 = 289 \Rightarrow \sqrt{289} = 17$$
$$x_1 = \frac{-13 + 17}{2} = 2, \text{ logo } x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-13 - 17}{2} = -15, \text{ logo } x_2 = -15$$

CONCLUSÕES

Em nosso estudo percebemos que a curiosidade é um dos fatores que podem gerar o impulso para iniciar um processo criativo, mas vai depender do quão importante é para a pessoa se engajar na busca da resolução de algum problema, em nosso caso, um problema matemático.

Esperamos que os modelos apresentados possam servir para incrementar as aulas de matemática com o objetivos de aplicação dos números primos. Nos experimentos com os diversos exemplos, usando várias combinações com os números primos para serem usados na equação, observamos vários padrões, mas, por falta de espaço e a proposta de apresentação não seria possível colocá-los aqui.

Esta experiência é muito relevante, não apenas como a realização de um objetivo pessoal ter sido realizado, mas pela experiência em conduzir um processo satisfatório que pode servir de motivação para outros, professores e alunos a ampliar o conhecimento dos números primos e sua aplicação em novos problemas matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H.; **Psicologia Educacional.** Tradução Eva Nick. Editora Interamericana Ltda, Rio de Janeiro, 1980.

[2] Gontijo, C. H.; **Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em Matemática.** Revista Linhas Críticas, Brasília, v. 12, n. 23, p. 229-244, jul/dez, 2006.

[3] Dante, L. R.; **"Projeto Teláris: Matemática".** 9º do Ensino Fundamental Anos Finais. 2.ed. São Paulo: Ática, 2015.

[4] Lucas, F. R.; Raizarro, O. S.; **Determinantes de Hurwitz para verificar quando polinômios possuem somente raízes reais.** Revista Professor de Matemática on-line – Revista Eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática. RPM. V. 11 n.3, 2023. ISSN: 2319-023X. https://doi.org/10.217.11/2319023x2023/pmo1125

[5] Polya, G.; **A arte de resolver problemas.** Tradução Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Simetria na educação básica a partir de uma perspectiva artística

Pereira, Stefhani Emiliani Vicente[591] e Malagutti, Pedro Luiz Aparecido[592]

Resumo: *Este estudo refere-se a uma pesquisa desenvolvida no Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), cujo intuito é refletir sobre a simetria na Educação Básica, destacando a importância da interdisciplinaridade entre a Matemática e a Arte. Nesse ínterim, para conectar esses dois campos do conhecimento, optou-se pela análise das obras do artista Maurits Cornelis Escher, já que podem ser interpretadas por diferentes perspectivas, estimulando assim, a criatividade e a troca de experiências entre os alunos. Diante disso, foi proposto uma atividade envolvendo essa temática, em conjunto com o uso do software Geogebra, para os estudantes do 3º ano do Ensino Médio, de modo que a partir da interação e da participação dos mesmos, ficou evidente que de fato o diálogo entre a simetria e a Arte contribui para o processo de ensino e aprendizagem.*

Palavras-chave: *Simetria, matemática, arte, educação básica, Escher.*

INTRODUÇÃO

Na Educação Básica, o estudo da simetria é recomendado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pela Base Nacional Curricular Comum (BNCC), dada a sua presença em diversas situações do cotidiano, contribuindo para que os educandos criem conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. Dessa forma, essa temática acaba sendo recorrente em diversos momentos do período escolar, isto é, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. No entanto, Santos e Tales (2012) observam que mesmo com essa frequente abordagem, os alunos apresentam dificuldade em dar sequência ao estudo desse tópico, de modo que muitas vezes passam a ter um conhecimento limitado sobre os conceitos vinculados à simetria. Para Sabba e Cavalcante, isso ocorre pois, a forma com que a mesma é tratada tende a ser desestimulante para os educandos, o que dificulta a conexão das propriedades da simetria com temáticas de outras disciplinas, da própria matemática, e consequentemente visualizá-la em vivências cotidianas.

Pasquini e Bortolossi (2016) evidenciam que a justificativa para esse cenário reside devido uma certa confusão nos materiais didáticos sobre a concepção de simetria que está sendo utilizada, isso porque ao longo da história a palavra “simetria” assumiu diversas conotações, influenciadas pelo período em que estava sendo utilizada. Nesse sentido, para os autores é fundamental compreender esses diferentes significados e refletir principalmente sobre a concepção de simetria que está sendo empregada na sala de aula. Destacando assim, que atualmente o conceito mais utilizado é a Simetria Moderna, a qual a associa a simetria com o conceito de Invariância.

[591] Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
[592] Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Definição 9.45 *Seja um conjunto $\mathbb{X} \neq \emptyset$ no plano Euclidiano e uma função (transformação) F tal que*

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Assim, F será uma simetria do conjunto $\mathbb{X}$, se F satisfazer as propriedade a seguir:
i) *F for uma Isometria,*
ii) *$F(X) = X$, ou seja, X é invariante por F, não sofrendo alterações. Dessa forma, a imagem da função é igual ao próprio conjunto $\mathbb{X}$.*

Nesse ínterim, tanto Santos e Tales (2012) como Sabba e Cavalcante (2015) apontam a interdisciplinaridade entre a Arte e a Matemática como uma possível solução para essa situação, visto que proporciona diversas oportunidades de ensino e promove a construção de novos significados.

SIMETRIA E A ARTE

A interlocução entre a simetria e a Arte incentiva uma ruptura com a aula tradicional de matemática, na qual o estudante assume papel passivo no processo de ensino e aprendizagem. Dessa forma, essa conexão estimula a participação ativa dos alunos, visto que pode instigar o interesse deles nas discussões propostas em sala, auxilia no desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade, incentiva os mesmos a refletirem sobre a realidade no qual estão inseridos, e consequentemente favorece o desenvolvimento integral do estudante. Isso ocorre, pois o objetivo não é apenas o crescimento intelectual, mas também o desenvolvimento individual de cada aluno, ou seja, estimular habilidades essenciais para que os mesmos possam exercer seu papel como cidadão. Dessa forma, a aprendizagem passa a ser significativa e, por conseguinte, a educação se torna transformadora.

Neste trabalho, o diálogo entre a simetria e a Arte foi criado a partir da análise das obras de Escher, pois além de ampliar o repertório dos alunos, é possível estudá-la por diferentes perspectivas, o que incentiva a troca de experiências e a participação dos estudantes. À vista disso, os educandos irão perceber que da mesma forma que Escher utilizava intuitivamente a matemática em suas obras, eles também usufruem dos conceitos matemáticos em diversas circunstâncias no cotidiano.

EXPLORANDO A SIMETRIA NA ARTE: UMA JORNADA COM O GEOGEBRA

A aula aconteceu em uma escola pública estadual com a turma do 3º ano do Ensino Médio. Vale destacar que os alunos já haviam estudado a Isometria no Plano, de modo que no início da aula indagamos-os acerca do que eles sabiam sobre a simetria e se achavam que a mesma estava presente nos recursos artísticos. Um dos estudantes observou que a simetria ocorre quando duas figuras são idênticas, assim observa-se que intuitivamente ele compreendia a ideia de invariância de figuras sem de fato saber que estava usufruindo deste conceito.

Com o objetivo de ampliar o repertório dos alunos quanto às possibilidades de estudar a simetria nas obras de Escher, foram apresentadas outras abordagens e perspectivas de analisar esses recursos artísticos, observando não só a figura inicial que poderá compor a obra, mas sim as simetrias que dão origem às figuras iniciais. Tal reflexão despertou o interesse dos educandos para a criatividade presente nas obras, fazendo com que os mesmos tivessem curiosidade de conhecer outras obras do artista. Durante a análise das obras, foi possível identificar as diferentes percepções dos alunos ao identificarem a simetria presente no recurso artístico, de modo que a troca de informações e experiências entre eles enriqueceu a dinâmica da aula. Na execução da atividade proposta, os estudantes ajudavam os colegas que apresentavam mais dificuldade ao manusear as ferramentas do software Geogebra, e mostraram grande interesse em criar as próprias obras de arte a partir das simetrias e dos recursos disponíveis na plataforma.

Fig. 173: Autoria própria

CONCLUSÕES

Com o desenvolvimento da aula e da atividade, ficou notório que de fato a interação entre a simetria e a Arte contribui para o processo de ensino e aprendizagem, pois os estudantes mostraram grande interesse pela aula, principalmente da atividade prática, na qual puderam criar a imagem e aplicar a teoria abordada em classe. Nesse sentido, com essa abordagem da simetria na Educação Básica é possível refletir sobre a própria prática docente, visto que além de proporcionar um questionamento sobre o conceito da simetria está sendo discutido, evidencia a importância de promover situações em sala de aula que incentivem a construção de novos significados, bem como a resignificação do conhecimento prévio que os alunos possuem, incentivando-os a terem um outro olhar para a Matemática.

BIBLIOGRAFIA

[1] PASQUINI, Regina Célia Guapo; BORTOLOSSI, Humberto José. O QUE É SIMETRIA? DIFERENTES USOS DA PALAVRA AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, v. 3, n. 9, p. 6-17, 2016.

[2] SABBA, Claudia Georgina; CAVALCANTE, Clécio Esteves. A arte pelo olhar da isometria e da geometria plana na prática: dos espelhos aos ângulos. In: **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática**, 2015, Chiapas. Anais da XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática. ICMI: ICMI, 2015. v. único.

[3] SANTOS, Luciana Ferreira dos; TELES, Rosinalda Aurora de Melo. Pintar, Dobrar, Recortar e Desenhar: o ensino da Simetria e Artes Visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 26, p. 291-310, 2012.

Matemática financeira na residência pedagógica

Intervenções Pedagógicas como ferramenta para desenvolver o olhar crítico para a educação financeira

Sampaio, Suellen Fiuza[593]

Resumo: *Neste pôster vamos apresentar duas intervenções pedagógicas desenvolvidas no Subprojeto de Matemática do Programa de Residência Pedagógica da UFBA, edital* 2022*. A primeira intervenção elaborada foi um quebra-cabeças, na qual os alunos trabalharam com a resolução de problemas práticos envolvendo porcentagem e juros simples. Os alunos foram desafiados a resolver questões relacionadas a estes conteúdos e, em seguida, montar um mosaico, de maneira a encaixar as peças corretamente no tabuleiro. A segunda intervenção trata-se da composição de orçamento familiar de acordo com o contexto financeiro que os alunos estão inseridos. Desse modo, compreender os diferentes aspectos das despesas e receitas, tendo em vista os fatores de renda familiar, gastos com educação, saúde, moradia, lazer e alimentação, e simular como suas decisões financeiras podem impactar seu orçamento familiar. Essas atividades foram aplicadas em uma turma de ensino médio de uma escola pública da cidade de Salvador.*

Palavras-chave: *Educação financeira, matemática financeira, orçamento, juros, porcentagem.*

INTRODUÇÃO

A Educação Matemática desempenha um papel essencial no progresso das habilidades democráticas dos estudantes em uma sociedade cada vez mais tecnológica.Com uma vasta gama de aplicações da matemática para a sociedade e seu papel social, esta se torna uma componente indispensável. (Skovsmose, 2001).

A educação financeira é uma ferramenta transformadora, capaz de proporcionar grandes melhorias para quem detém este conhecimento e, em consequência e a longo prazo, a sociedade. "A existência de uma estratégia nacional de educação financeira favorece a promoção do tema no país e cria diretrizes para balizar iniciativas concretas, sejam do Estado, da iniciativa privada ou da sociedade civil".

Além disso, para o desenvolvimento desse processo educacional, é fundamental perceber que os avanços necessários só serão consolidados se houver uma fundamentação que auxilie a educação financeira. Dito isso, podemos compreender a importância de aprender os conceitos da Matemática Financeira, o que evidencia a necessidade de assegurar e aprimorar o ensino nas escolas de uma forma atrativa e que converse com a realidade dos estudantes. Desta forma, os mesmos poderão se tornar cidadãos críticos e aptos para solucionar os problemas financeiros do seu cotidiano, tomando decisões assertivas em relação ao próprio dinheiro.

Para trabalhar os conceitos de Matemática Financeira, é preciso apresentar noções elementares, como porcentagem, operações com frações e números decimais, que são conteúdos que muitos alunos denotam

[593]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.

dificuldade. E, por conseguinte, começar a trabalhar as concepções de Matemática Financeira, como o regime de capitalização simples, composta, taxa de juros, prazos e etc.

Com as atividades e dinâmicas, foi possível perceber a integração e participação dos estudantes, sobretudo a boa vontade e o incentivo em engajar e compreender o processo educacional. Portanto, nesse contexto, os alunos se mostraram capazes de perceber e interpretar a educação financeira a partir de outra ótica.

Quebra-Cabeça: Porcentagem e Juros Simples

O quebra-cabeças, que é um jogo que estimula o pensamento lógico e desenvolve habilidades cognitivas, foi uma intervenção pedagógica importante. Na atividade, os estudantes trabalharam em equipe, dividida em seis ou sete pessoas, tinha como objetivo montar a imagem correta, como conhecemos.

Este quebra-cabeça é dividido em dois itens: um único tabuleiro com dez perguntas; um conjunto de cards com dez respostas. Posto isto, sua montagem ocorre através da resposta correta da pergunta do tabuleiro e o encaixe do card da resposta correspondente à pergunta.

Fig. 174: Conjunto de cards; o tabuleiro com perguntas, alunas resolvendo as questões e montando o quebra-cabeça.

Fonte: Acervo da Autoras

As questões do tabuleiro envolvem cálculos financeiros básicos. A resolução desses problemas desenvolve as habilidades matemáticas, preparando os alunos para lidar com circunstâncias financeiras mais complexas. As questões de porcentagem proporcionam uma noção intuitiva aos cálculos do regime de capitalização simples, por exemplo:

- *Um objeto que custava* $R\$70,00$ *teve seu preço aumentado em* $R\$10,50$. *De quantos porcentos foi o aumento?;*

- *No ano de 2022 o salário mínimo era de* $R\$1212,00$. *Em 2023, a partir de 01 de janeiro, o salário foi alterado para* $R\$1302,00$. *Qual a taxa percentual desse aumento?*

E, por consequência, a resolução de questões de juros simples, cujo desenvolvimento do cálculo é feito em função do valor inicial, fornece embasamento para a compreensão e também solução de problemas de regime de capitalização composta.

- *Julia é cliente fiel da lanchonete da escola, mas logo numa sexta-feira esqueceu de levar o dinheiro para pagar seu sanduíche que custa* $R\$5,00$. *Como só poderia efetuar o pagamento na segunda, após três dias, a lanchonete iria cobrar o valor de* $R\$6,50$. *Qual a taxa de juros diária ao dia que foi cobrada?;*

- Um capital aplicado a juros simples rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de $R\$110,00$ depois de 24 meses. Qual foi esse capital?.

Com os exemplos acima, podemos perceber a importância de abordar problemas diversificados, para que o estudante seja capaz de calcular quaisquer informações, seja o valor dos juros, da taxa de juros, do montante ou do capital inicial. Além disso, relatar a relevância e se atentar às unidades de taxas de juros trabalhados nas questões, indicando, em contextos reais, quais são as mais utilizadas

Composição de Orçamento Familiar

O orçamento familiar é um recurso importante que representa o controle sobre as despesas e receitas de uma família, cujo objetivo é equilibrar as contas ao fim do mês. Além disso, com essa ferramenta, se torna possível compreender o destino de todo dinheiro, lidando com este de forma mais consciente e inteligente. De acordo com a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (**OCDE**), pessoas educadas financeiramente possuem uma concepção melhor em relação aos conceitos e produtos financeiros.

A intervenção pedagógica foi escrita com uma situação hipotética, na qual a família era composta por dois adultos e uma criança em idade escolar. Para preencher a planilha de orçamento familiar mensal básico, os estudantes estimaram os valores para cada uma das despesas fixadas, de acordo com a realidade em que estão inseridos e calcular a renda mensal mínima.

Fig. 175: Mockup da Atividade de Orçamento Familiar; Planilha do Orçamento Mensal

Orçamento Mensal		
Despesas Fixas	*Valor*	*Percentual da Renda*
Alimentação		
Transporte		
Moradia		
Água		
Energia		
Internet		
Gás de Cozinha		
Total		

Fonte: Acervo da Autoras

Após determinar a renda familiar mensal mínima para atender às necessidades básicas da família, os alunos calcularam o percentual de cada despesa fixa em relação a essa renda. Esse cálculo permite uma melhor compreensão do impacto de cada despesa no orçamento, sendo um suporte na tomada de decisões financeiras.

Com essa análise, os estudantes serão capazes de avaliar outras despesas necessárias para ocasionar uma melhor qualidade de vida, incluindo cuidados com a saúde, despesas com vestuário e também lazer. Por conseguinte, será recalculada uma nova renda para atender as necessidades acrescentadas, somando o valor das novas despesas à renda familiar mensal anterior. E, assim, é possível compreender a quantidade de salários mínimos necessários para suprir todas as despesas.

CONCLUSÃO

Essas atividades se destacam por sua abordagem prática e contextualizada, permitindo aos alunos uma aprendizagem mais orgânica, que pode ser aplicada diretamente ao seu cotidiano. Cabe ressaltar, ainda, que elas integram diferentes habilidades cognitivas, tais como resolução de problemas, trabalho em grupo e pensamento crítico. Dentre os benefícios aos alunos, destacamos uma maior compreensão dos conceitos matemáticos e financeiros trabalhados. Como eles tiveram que se reunir em grupos para resolver um problema prático e montar um quebra-cabeças, puderam ver concretamente quanto a matemática os cerca cotidianamente.

Por fim, a atividade de composição do orçamento familiar proporcionou aos alunos uma visão mais abrangente sobre a importância do planejamento financeiro e como as suas escolhas podem influenciar o orçamento familiar. Portanto, fez com que os alunos pensassem com mais cuidado sobre seus hábitos financeiros e sobre a necessidade de uma abordagem mais responsável em relação ao dinheiro. Estas atividades são particularmente notáveis devido ao seu valor prático e ao maior envolvimento e participação que suscitaram entre os alunos. Ao imergir os alunos em situações reais e urgentes, as atividades promoveram maior interesse e motivação entre os alunos, tornando os resultados de aprendizagem mais bem-sucedidos.

BIBLIOGRAFIA

[1] Skovsmose, O.; **Educação matemática crítica: a questão da democracia.** Papirus editora, 2001.

[2] Vieira, G.; Pessoa, C.; **Educação financeira pelo mundo: como se organizam as estratégias nacionais?.** Educação Matemática Pesquisa, v. 22, n. 2, p. 658-688, 2020.

Mortalidade infantil em Corumbá-MS

UM ESTUDO POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Teixeira, Taiane Luara Maciel[594] e Oliveira, Wellington Piveta[595]

Resumo: *O objetivo deste texto é apresentar uma modelagem dos números referentes à mortalidade infantil no município de Corumbá - MS. O problema estabelecido foi:* ***Como entender a dinâmica da mortalidade infantil em Corumbá - MS, ao longo do período de 2006 a 2022?*** *A Modelagem Matemática ocorreu em uma das componentes curriculares de um curso de graduação em Licenciatura em Matemática de uma universidade pública federal, visando a experiência do "fazer" Modelagem Matemática, de modo a promover a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática para ensinar e aprender na Educação Básica. A investigação gerou modelos que foram discutidos e refletidos, indicando o potencial da relação interdisciplinar da Matemática e outras áreas.*

Palavras-chave: *Representação matemática, modelo algébrico, saúde pública.*

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Modelagem Matemática, segundo Meyer (2020), é uma abordagem poderosa para investigar temas com base na realidade. Enquanto uma abordagem para ensinar e aprender Matemática, ela envolve a formulação de modelos matemáticos que representam as situações do mundo real, permitindo a análise, a descrição, a previsão e a compreensão de fenômenos elementares e/ou complexos.

Ensinar e aprender por meio da Modelagem Matemática exige a experimentação em "fazer" modelagem. Considerando que essa experiência cumpriu uma das etapas de formação da primeira autora, este texto tem como objetivo apresentar uma modelagem dos números referentes à mortalidade infantil no município de Corumbá - MS. Desta investigação se destacou discussões matemáticas e reflexivas realizadas no contexto do Estágio Curricular Supervisionado do curso de graduação em Licenciatura em Matemática de uma universidade federal.

A seguir, expomos uma compreensão sobre Modelagem Matemática e serão detalhadas as etapas que subsidiaram o estudo do tema em questão.

[594]Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus do Pantanal - UFMS/ CPan. taiane.maciel@ufms.br

[595]Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus do Pantanal - UFMS/ CPan. wellington.piveta@ufms.br

UMA COMPREENSÃO SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

Ao lançarmos os olhares sobre Modelagem Matemática, em essência, ela consiste em identificar um problema real, traduzi-lo para a linguagem matemática por meio de equações, gráficos, algoritmos ou representações, as quais favorecem uma análise para obter percepções e soluções para o problema original. Uma das vantagens da Modelagem Matemática é a sua capacidade de lidar com situações complexas e dinâmicas, permitindo aos pesquisadores e estudantes explorar diferentes cenários e testar hipóteses de forma controlada. Além disso, ela promove a interdisciplinaridade, pois muitas vezes requer o uso de conhecimentos de diversas áreas como, a própria matemática, ciências, engenharia, economia, entre outras.

Ao utilizar a Modelagem Matemática é possível investigar uma ampla gama de temas, desde questões ambientais e sociais a problemas de engenharia e economia. Essa abordagem oferece uma maneira sistemática e rigorosa de compreender e resolver problemas do mundo real, contribuindo para o avanço do conhecimento e o desenvolvimento de soluções inovadoras.

Para Meyer (2020) a construção de modelos envolve cinco etapas: 1) Formulação do Problema; 2) Construção do Modelo; 3) Resolução do Modelo; 4) Análise e Interpretação dos Resultados; 5) Validação do Modelo. De modo geral, essas etapas formam um ciclo interativo, no qual se refinam e aprimoram continuamente seus modelos com base nos dados observados e nas novas informações disponíveis. Em resumo, as cinco etapas envolvidas na construção de modelos fornecem um quadro sistemático para problematizar e se investigar com Matemática.

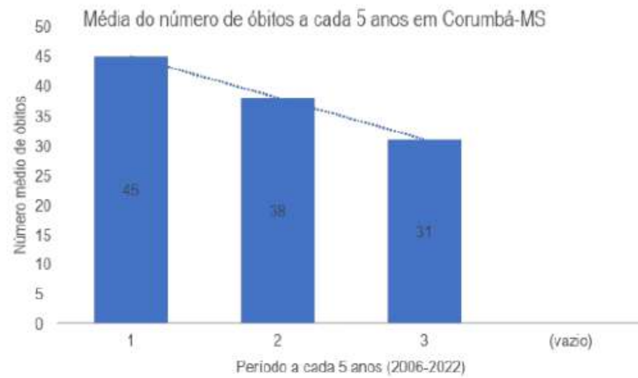
MORTALIDADE INFANTIL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

A mortalidade infantil é um indicador crítico da saúde e do desenvolvimento de uma comunidade, refletindo não apenas as condições de assistência médica, mas também fatores sociais, econômicos e educacionais. Em Corumbá, município do Estado de Mato Grosso do Sul que faz fronteira com a Bolívia, a mortalidade infantil não apenas representa um desafio para a saúde pública, mas também destaca a necessidade de políticas eficazes e acessíveis. No contexto deste problema, buscamos no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), dados que pudessem nos ajudar a compreender, matematicamente, o problema: **Como entender a dinâmica da mortalidade infantil em Corumbá - MS, ao longo do período de 2006 a 2022?** Isto porque, ao pesquisarmos, nos deparamos com dados referentes ao período de 2006 a 2022. Primeiramente, foram coletados dados relevantes sobre a população infantil, incluindo o número de nascidos vivos e óbitos registrados ao longo de um período de tempo. Esses dados foram organizados e analisados para identificar tendências e padrões relacionados à mortalidade infantil na região.

Como a modelagem algébrica oferece uma abordagem sistemática e quantitativa para entender as tendências históricas e projetar cenários futuros, permitindo uma análise mais profunda das relações entre mortalidade infantil, delineamos aos dados, uma manipulação que descrevesse a evolução da mortalidade infantil ao longo do tempo. Isso nos permitiu identificar padrões, tendências e possíveis influências de variáveis como, qualidade dos serviços de saúde. Para isso, suscitaram algumas indagações como: Qual é a taxa de mortalidade infantil em Corumbá-MS? Quais são os principais fatores que contribuem para essa taxa elevada? Como podemos reduzir a mortalidade infantil na região? Em seguida, de posse dos dados e utilizando o Excel, construímos representações como mostra a Figura 1, a seguir, e observamos que a média aritmética do número de óbitos a cada cinco anos (estabelecendo assim 4 períodos), parecia reduzir de 7 em 7 por período.

Fig. 176: Representações matemáticas do número de mortalidade infantil

Período	Ano	Nascidos vivos	Óbitos – idade menor que 1 ano	Média de 5 anos
1	2006	2001	53	45
	2007	1953	53	
	2008	2017	39	
	2009	1984	49	
	2010	1964	33	
2	2011	1996	40	38
	2012	1833	35	
	2013	1982	29	
	2014	2032	47	
	2015	1979	40	
3	2016	1855	36	31
	2017	1888	33	
	2018	1820	28	
	2019	1777	22	
	2020	1749	37	
4	2021	1867	35	-
	2022	1781	30	
	2023	Sem registros de informações		
	2024			
	-			



Fonte: Os autores (2024).

Representamos esses valores (número médio de óbitos e período) graficamente e, utilizando a ferramenta de regressão linear, identificamos o modelo algébrico: f(x) = -7(x) + 52, com $R^2 = 1$. Matematicamente, analisamos e discutimos sobre as potencialidades e limitações das representações gráfica e algébrica, no que se refere à dinâmica da Mortalidade Infantil em Corumbá - MS e refletimos que a construção delas, não apenas proporcionou uma compreensão mais abrangente da dinâmica da Mortalidade Infantil em Corumbá, mas também alertou sobre a necessidade de políticas públicas mais direcionadas e eficazes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em conta que o objetivo deste resumo foi apresentar uma modelagem dos números referentes à mortalidade infantil no município de Corumbá - MS, pudemos compreender aspectos determinantes dessa questão complexa, o que favoreceu discussões matemáticas e reflexivas. Além de evidenciar a relação interdisciplinar da Matemática com outras áreas como a saúde, política, economia, esperamos que o estudo chegue às autoridades e tenham impacto, de modo a promover a redução dos índices de mortalidade infantil na região com o ensejo de políticas públicas e investimentos adequados em saúde para o município.

BIBLIOGRAFIA

[1] Meyer, J. F. C. A. ;**Modelagem Matemática: O desafio de se “fazer” a Matemática da necessidade**. Com a Palavra, O Professor, [S. l.], v. 5, n. 11, p. 140–149, 2020.

Aplicando bases de Gröbner a problemas de otimização

Um exemplo com Multiplicadores de Lagrange

TEIXEIRA, Thiago[596]; SANTOS, Victor[597] e SOUZA, Jairo[598]

Resumo: *Este trabalho mostra uma das diversas aplicações das bases de Gröbner em ideais de anéis de polinômios de múltiplas variáveis. Abordamos um problema de otimização utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Esse método foi aplicado para determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função polinomial, sujeita às restrições de uma variedade algébrica, resultando em um sistema de equações polinomiais que pode ser computacionalmente complexo. A utilização das bases de Gröbner, com uma ordem monomial adequada, transforma este sistema em um conjunto de equações equivalentes mais simples, onde as soluções podem ser eficientemente identificadas.*

Palavras-chave: *Álgebra, bases de Gröbner, polinômios, multiplicadores de Lagrange.*

INTRODUÇÃO

As Bases de Gröbner são uma ferramenta poderosa na álgebra comutativa, conhecida por suas propriedades computacionais eficazes. Elas são capazes de resolver uma variedade de problemas matemáticos complexos, desde a determinação dos elementos de um ideal até a solução de sistemas de equações polinomiais e questões de parametrização. Essas bases são fundamentais para simplificar e computar soluções que, de outra forma, seriam inacessíveis devido à sua complexidade.

Neste trabalho, aplicamos as Bases de Gröbner a problemas de otimização nos quais tanto a função objetivo quanto as restrições são formuladas por polinômios. A utilização de Bases de Gröbner permite uma eficiente decomposição e resolução desses sistemas polinomiais, resultando em um sistema equivalente com complexidade computacional significativamente reduzida. Esta abordagem não apenas simplifica o processo de solução, mas também melhora a eficiência ao lidar com grandes sistemas de equações polinomiais.

DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Definição 9.46 *Uma ordem monomial* $>$ *em* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *é qualquer relação sobre* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$*, aplicável ao conjunto de monômios* $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$*, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $>$ *é uma ordem total (ou linear) em* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

[596] Aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão (UFCAT).
[597] Aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão (UFCAT).
[598] Prof. Orientador - IMTec Universidade Federal de Catalão (UFCAT).

(ii) Se $\alpha > \beta$ *e* $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$*, então* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$*.*

(iii) $>$ *é uma boa ordem em* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$*, significando que todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *possui um menor elemento sob* $>$*.*

Definição 9.47 *Dada uma ordem monomial, um conjunto finito* $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ *de polinômios de um ideal* I *é uma base de Gröbner se* $\langle \mathrm{LT}(g_1), \ldots, \mathrm{LT}(g_t) \rangle = \langle \mathrm{LT}(I) \rangle$*.*

Teorema 9.45 (Critério de Buchberger) *Seja* I *um ideal em um anel de polinômios. Um conjunto* $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ *é uma base de Gröbner para* I *se, e somente se, para todos os pares* i, j *com* $i \geq j$*, o resto da divisão de* $S(g_i, g_j)$ *por* G *(listados em alguma ordem) é zero.*

aplicando bases de Gröbner aos multiplicadores de Lagrange

Inicialmente, o método de Lagrange é utilizado para encontrar máximos e mínimos de uma função $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = 0$, permitindo determinar todos os valores de (x, y, z) e λ a partir da seguinte equação:

Exemplo: Considere a função objetivo $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$ e a restrição $g(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2 - 1$. Nosso objetivo é determinar os pontos de máximo ou mínimo de f na fronteira definida por g.

O primeiro passo é calcular as derivadas parciais de x, y e z para f e g:

$$\bullet f(x, y, z) = \lambda \bullet g(x, y, z)$$

$$2x - 2 = \lambda 4x^3 \tag{149}$$

$$2y - 2 = \lambda 2y \tag{150}$$

$$2z - 2 = \lambda 2z \tag{151}$$

Utilizando o Critério de Buchberger, identificamos que cada polinômio do sistema pertence ao ideal $I = \langle -\lambda 4x^3 + 2x - 2, -\lambda 2y + 2y - 2, \lambda 2z + 2z - 2, x^4 + y^2 + z^2 - 1 \rangle$. A partir disso, computando com uma ordem lexicográfica, outros novos polinômios são gerados, simplificando o sistema para incluir apenas uma única variável.

$$64z^{10} - 256z^9 + 304z^8 + 96z^7 - 471z^6 + 232z^5 + 176z^4 - 172z^3 + 4z^2 + 32z - 8 = 0 \tag{152}$$

$$y - z = 0 \tag{153}$$

$$\begin{aligned}8x - 192y^2z^7 + 448y^2z^6 - 48y^2z^5 - 624y^2z^4 + 425y^2z^3 + 163y^2z^2 - 172y^2z + 192yz^7 - 448yz^6 + \\ 48yz^5 + 600yz^4 - 393yz^3 - 140yz^2 + 136yz - 192z^9 + 640z^8 - 304z^7 - 1216z^6 + 1545z^5 + \\ 338z^4 - 1368z^3 + 368z^2 + 312z - 136 = 0\end{aligned} \tag{154}$$

$$\lambda - x^2 + x - 2y^2 + 2y - 2z^2 + 2z = 0 \tag{155}$$

A partir do primeiro sistema, um polinômio de uma única variável z foi gerado, permitindo calcular as raízes de z. Este polinômio de grau 10 pode ter até 10 raízes possíveis. Das raízes obtidas pela biblioteca de solução de polinômios "solve.lib", apenas duas eram reais e as demais complexas. Com as raízes de z, procedemos à resolução das demais equações para encontrar y, x e λ.

Primeira solução real:

$$\lambda = 2.6038, \quad x = -0.686761, \quad y = -0.62352, \quad z = -0.62352$$

Segunda solução real:

$$\lambda = -0.575253, \quad x = 0.663676, \quad y = 0.634819, \quad z = 0.634819$$

Estas duas soluções reais indicam que, com a restrição g, f_1 representa um máximo e f_2 um mínimo:

$$f_1(-0.686761, -0.686761, -0.686761) = 8.535488, \quad f_2(0.663676, 0.634819, 0.634819) = 0.379828$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., **Ideals, Varieties, and Algorithms**, 3nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2007.

[2] STEWART, James. **Cálculo**: volume 2. 8ª 2 v. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016.

[3] GREUEL, G. M.; PFISTER, G.;SCHONEMANN, H.: **A Computer Algebra System for Polynomial Computations**. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2015).

Um grupo metabeliano finitamente apresentado com subgrupo derivado abeliano livre de posto infinito

Thiago Henrique de Oliveira[599] e Orientador: Alex Carrazedo Dantas

Palavras-chave: *Grupos livres, apresentação de grupos, grupos metabelianos, posto de um grupo.*

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, estudamos o artigo *"A finitely presented metabelian group with a free abelian derived group of infinite rank"*, publicado em 1972, por Gilbert Baumslag, na revista *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 35. O artigo apresenta um exemplo de um grupo cuja apresentação é dada por 3 geradores e 3 relações possuindo como subgrupo derivado um grupo abeliano livre de posto infinito. O resultado principal é o seguinte teorema.

Teorema 9.46 *O grupo*

$$G = \langle a, s, t \mid s^t = s, [a^t, a] = 1, a^s = aa^t \rangle$$

é um grupo metabeliano cujo subgrupo derivado é abeliano livre de posto infinito, isto é, $G' \simeq \oplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$.

O exemplo em questão, do grupo com apresentação dada por 3 geradores e 3 relações, é de extrema importância, pois antes acreditava-se que um subgrupo normal abeliano de um grupo finitamente apresentado tem posto finito.

DESENVOLVIMENTO

Para compreensão e demonstração do objeto de estudo deste trabalho foi iniciado o estudo a partir de grupos livres, forma normal de um grupo livre, palavras reduzidas e apresentação de grupos . Um grupo F é dito livre sob um conjunto não vazio X, e função $\sigma : X \longrightarrow F$, se para cada função $\alpha : X \longrightarrow G$ existe um único homomorfismo $\beta : F \longrightarrow G$ tal que o diagrama comuta ($\alpha = \sigma\beta$). Esse tópico faz se crucial, pois é a partir de tal fundamentação teórica que podemos construir grupos a partir da imagem de grupos livres, conforme o seguinte teorema:

Teorema 9.47 *Sejam* G *um grupo gerado por um subconjunto* X *e* F *um grupo livre sob um conjunto* Y. *Se* $\alpha : Y \longrightarrow X$ *é sobrejetiva, ela extende para um epimorfismo de* F *para* G. *Em particular todo grupo é uma imagem de um grupo livre.*

[599] Universidade de Brasília.

Com o auxílio do teorema acima definimos a apresentação de um grupo G como sendo um epimorfismo π de um grupo livre F para um grupo G. Em símbolos podemos denotar a apresentação de um grupo da forma

$$G = \langle X | s(x) = 1, s \in S \rangle$$

onde X denota o conjunto de geradores de G, $s(x) = 1$ relações e S é um subconjunto de F tal que $S^F = Ker\pi$. Em particular, se um grupo tem X e $s(x)$ finitos, então é dito que G é finitamente apresentado.

Dando continuidade, estudamos variedades de grupos, a fim de compreendermos o conceito de grupos abelianos livres e grupos metabelianos. Uma variedade de grupos é uma maneira de definirmos classes de grupos a partir de equações, ou seja, dado W conjunto de palavras, a classe de todos os grupos tais que $W(G) = 1$ é dita a variedade $\mathcal{B}(W)$ determinada por W. Como exemplo de variedade de grupos temos $W = \{[x_1, x_2]\}$, onde $\mathcal{B}(W)$ representa a classe de grupos abelianos. Na variedade de grupos solúveis temos que, um grupo solúvel é dito metabeliano se seu comprimento é igual a 0, 1 ou 2.

CONCLUSÃO

Por fim, provamos o teorema que é objeto de estudo deste trabalho proposto pelo autor do artigo, Gilbert Baumslag, que está disponível na introdução.

BIBLIOGRAFIA

[1] Robinson, Derek. A Course in the Theory of Groups. 2ª Edição. New York: Springer, 1991.

[2] Baumslag, G. A finitely presented metabelian group with a free abelian derived group of infinite rank. roceedings of the American Mathematical Society, USA, volume 35, 61-62, Setembro de 1972.

O projeto Matemativa e as ações de extensão

Cordeiro, Thiago[600] e Neves, Eduardo de Amorim

Resumo: *A Curricularização da Extensão reafirma a importância das ações extensionistas promovidas pelas instituições de Ensino Superior ressaltando a importância da colaboração entre as IES públicas e a comunidade Externa no geral. Esse trabalho tem como objetivo descrever algumas das ações desenvolvidas pelo Projeto Matemativa para a popularização e divulgação da Matemática no Museu Dinâmico Interdisciplinar- MUDI e também em escolas, praças, parques de exposição, shoppings, espaços organizados em diferentes bairros da cidade de Maringá e em cidades da região a partir de itinerâncias que levam os princípios desse projeto vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá (UEM) a regiões centrais, periféricas e de difícil acesso, contribuindo com a divulgação científica, com a melhoria da qualidade de ensino e com o olhar equitativo e inclusivo. Como Metodologia nos valemos da pesquisa qualitativa de cunho descritivo de modo a trazer a público algumas das ações realizadas pela equipe do Matemativa. Tais ações mostram a importância do projeto para a comunidade local e regional, bem como, para os alunos que participam do projeto, que podem, a partir do mesmo melhorar sua formação acadêmica.*

Palavras-chave: *Curricularização da extensão, matemática, itinerância.*

INTRODUÇÃO

Os Projetos de Extensão são a porta de entrada para que a relação entre as Universidades Públicas e a Comunidade Externa se fortaleçam criando vínculos significativos entre o ambiente universitário a partir de professores e acadêmicos e a população no geral.

Efetivar ações de popularização e divulgação da Matemática destacando sua importância em nosso dia a dia, bem como, a beleza e contribuição dessa Ciência para as demais áreas do conhecimento são fundamentais para a melhoria do entorno Universitário, da qualidade de ensino e do aprimoramento de profissionais formados pela UEM dando a esses sujeitos (alunos, professores e comunidade geral) a oportunidade de conhecer a Matemática e compreender seus conceitos de maneira dinâmica e significativa, a partir da resolução de problemas, do uso de materiais manipuláveis, quebra cabeças e jogos que contribuem com o desenvolvimento do pensamento lógico matemático e da criatividade. Essa é a missão do Matemativa.

Esse projeto de Extensão vinculado ao Mudi e ao Departamento de Matemática da UEM, desde 2004, tem como, intuito despertar o interesse de estudantes pela matemática, de forma a fazer com que essa Ciência se torne inclusiva, equitativa e contribua com a popularização de saberes e a divulgação de conceitos científicos e educativos a todos que a ele têm acesso seja internamente a partir do MUDI ou externamente por meio das ações que desenvolve em Maringá -PR e em cidades da região.

[600] Universidade Estadual de Maringá

Nesse sentido, descreveremos aqui algumas das ações desenvolvidas pelo Matemátiva. Ações que desempenham tem um papel significativo não só para o Departamento de Matemática da UEM e para o Mudi como também para instituições de Ensino públicas e privadas de modo a contribuir com a melhoria da qualidade da educação, com a desmistificação da Matemática, com ações inclusivas e de popularizaçãodo do saber, não fazendo diferença ou distinção de pessoas ou lugares haja vista que sua meta é a de levar a Matemática a qualquer pessoa e lugar a partir de suas atividades e itinerâncias.

RESULTADOS OBTIDOS

O projeto Matemativa - Exposição Interativa de Matemática, teve início no mês de junho do ano de 2004, nas dependências da Universidade Estadual de Maringá (UEM), com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Na atualidade, o referido projeto possui um acervo composto por mais de 150 peças, as quais são empregadas para a realização de exposições itinerantes em diversos contextos educacionais, abrangendo os ambientes formais, não formais e informais de ensino. Adicionalmente às exposições itinerantes, o projeto também dispõe de um espaço permanente localizado no Museu Dinâmico Interdisciplinar – MUDI da UEM. O escopo fundamental do projeto reside na promoção da divulgação e popularização do campo da matemática. Essa promoção se dá por meio de uma abordagem diferenciada, que permite aos indivíduos experimentar a matemática de maneira participativa, interagindo com seus conceitos de forma a contribuir significativamente para o desenvolvimento de sua sensibilidade e aptidão no âmbito científico.

Fig. 177: Espaço Matemátiva no MUDI

Durante o ano de 2023, o projeto, foi levado a várias exposições, seja em escolas, praças, shoppings e parque de exposições atingindo uma quantidade significativa de pessoas e estudantes, muitos dos quais temem a matemática ou não gostam da disciplina por terem grande dificuldades de aprendizagem ou por rotulá-la como uma Ciência rigorosa e repleta de regras difíceis de serem compreendidas.

O projeto que visitou é atuou em escolas e bairros periféricos e comunidades de difícil acesso, levou sua exposição de materiais aos alunos que puderam observar, manipular, brincar, jogar e resolver desafios, isto é, a participar de forma intensa aplicando seus conhecimentos de maneira lúdicae divertida, sendo também inseridos em discussões que usam a matemática como ferramenta para a solução de problemas importantes e que afetam diretamente a vida da comunidade, como a importância da educação, o acesso à universidade e as perspectivas de futuro.

A interação entre acadêmicos e membros da comunidade durante a exposição do Matemativa em suas itinerâncias geraram um ambiente de aprendizado mútuo e cooperação, mostrando que a Matemática pode ser uma linguagem universal que une pessoas de diferentes origens.

O projeto que foi levado também para a Associação Norte Paranaense de Áudio Comunicação Infantil (ANPACIN), onde desenvolvera recursos e estratégias para tornar os conteúdos matemáticos em museus acessíveis a todos, destacando os desafios enfrentados pelos surdos, as medidas que podem ser adotadas e os benefícios de garantir que a matemática seja uma linguagem inclusiva em ambientes não formais de educação. A partir dessa experiência foram elaborados materiais que foram expostos aos alunos, com mediação da professora intérprete, que intermediou a comunicação entre os alunos e os acadêmicos do curso de Matemática que participaram da ação e tiveram a oportunidade de conhecer esse espaço e seus alunos. A partir dessa experiência foram desenvolvidas materiais de orientação em LIBRAS de forma colaborativa entre os estudantes surdos e os acadêmicos de Matemática.

Estes materiais consistem na explicação das peças exploradas na ANPACIN em LIBRAS (Língua Brasileira de Sinais). Esse processo levou em consideração a experiência adquirida na escola. Foi fundamental para a construção do material, as informações passadas pelos alunos surdos e a professora. O material foi estruturado com informações sobre as características de cada peça, explicações de seu funcionamento, fotografias acompanhadas dos sinais em LIBRAS, todas produzidas pelos autores. Os próprios alunos criaram sinais para cada material visto por eles, haja vista que não existe um sinal especifico para estes materiais matemáticos apresentados.

Fig. 178: Comandos de sinais

O Matemátiva também fez integração com os programas Residência Pedagógica (PRP) e o Programa de Educação Tutorial (PET) da matemática, em ações desenvolvidas nas escolas integrantes do PRP. A partir dos materiaias expostos aos alunos nas escolas, dentre os quais destacamos os jogos, quebra cabeças e superfícies regradas, foi possível abordar estratégias de lógica e compreensão de conceitos matemáticos, fortalecendo o conhecimento dos alunos.

Fig. 179: Matemátiva com PRP e PET nas escolas

Fonte: acervo do autor

CONCLUSÃO

Os projetos de extensão de matemática têm um impacto crucial no processo de ensino e aprendizagem, oferecendo aos alunos a oportunidade de compreender conceitos matemáticos de maneira dinâmica e significativa por meio de suas atividades itinerantes. Além disso, tais iniciativas têm um efeito positivo na inclusão, adaptando o ensino conforme as necessidades dos alunos com deficiência e contribuindo para a igualdade de oportunidades educacionais. Em regiões periféricas, onde o acesso à educação de qualidade pode ser limitado, os projetos de extensão se tornam ainda mais cruciais, atuando como um suporte para o ensino da matemática. Assim, projetos como o Matemativa têm o potencial de promover uma inclusão, não apenas em relação à deficiência, como também a alunos com dificuldade de aprendizagem ou desinteresse pela Matemática combater as desigualdades e mostrando que todos podem aprender Matemática, o que contribui com a criação de um ambiente educacional mais justo e acolhedor.

BIBLIOGRAFIA

[1] Simetrias. **Matemativa: Exposição Iterativa de Matemática**. 2013. Disponível em: `http://www.dma.uem.br/matemativa/matemativaTeste/conteudo/exposicao/simetrias/simetrias.html`. Acesso em: 10/09/2023.

[2] Gerônimo, R. J.; **Apostila: Guia Rápido para Monitores do Mudi**. pág.1-38, Maringá- PR, 2023.

Apoios:

Geometria sona e o jogo mbomge

Elementos Culturais no Ensino de Matemática

Souza, Valquiria Neris de[601]; Anjos, Geovana Alves dos Santos[602] e Fraga, Lucca Couto de Carvalho[603]

Resumo: *Neste pôster vamos apresentar o Jogo Mbomge, elaborado com elementos da Geometria Sona, trata-se de um jogo colaborativo, que foi pensado e desenvolvido como parte de uma atividade da disciplina Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática, realizada em 2023.1, no curso de Licenciatura em Matemática da UFBA. Em nossa atividade criamos a oficina Geometria Sona e o Jogo Mbomge, na qual introduzimos a geometria Sona, abordando aspectos históricos desta geometria e do povo Tchokwe, de Angola, em seguida relacionando os desenhos com conteúdos matemáticos, mdc, mmc, sequências e simetria. Aplicamos esta oficina em três escolas públicas da região metropolitana de Salvador. Aqui vamos descrever os passos para a construção da oficina e alguns problemas que podemos tratar no contexto dela.*

Palavras-chave: *Geometria sona, jogo mbomge, matemática, mdc e mmc.*

INTRODUÇÃO

A Lei 9394, conhecida por estabelecer as Diretrizes e Bases da Educação Nacional, foi publicada em 1996 e, em sua versão original, pouco abordava sobre a questão étnico-racial. Contudo, em 2003, após muitos anos de luta dos movimentos sociais, foi aprovada a Lei 10.639/03 que estabeleceu a obrigatoriedade da inclusão da história e cultura afro-brasileira no currículo das escolas brasileiras. Diante disto, é de grande importância a aplicação efetiva desta lei e como deve estar presente em todas as disciplinas do currículo, na matemática não poderia ser diferente, por isso a importância do estudo de elementos culturais e jogos africanos no ensino da matemática.

Na UFBA há uma categoria de disciplina de extensão, as *Ações Curriculares em Comunidade e Sociedade*, conhecidas pela sigla ACCS. Em 2023.2 a prof.ª Simone Maria de Moraes ministrou a disciplina *Cultura e Jogos Africanos no Ensino da Matemática*, uma ACCS, que foi aporte para a idealização e criação de oficinas com foco em elementos culturais africanos para o ensino da matemática, bem como a criação de jogos com foco em matemática para o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio, a fim de proporcionar uma abordagem lúdica da matemática e da cultura africana e afro-brasileira.

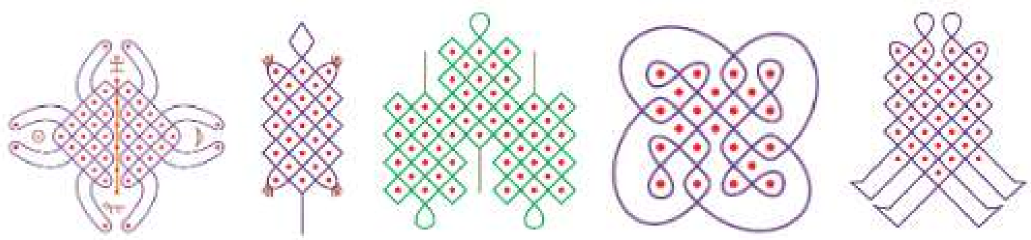
Nela realizamos o estudo da Geometria Sona do povo Tchokwe, além do estudo da cultura e singularidade dos Tchokwe, para podermos organizar a oficina e criar o jogo Mbomge, que envolve a geometria sona, aspectos culturais, históricos e conteúdos matemáticos de maneira lúdica e motivadora.

[601]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.
[602]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.
[603]Estudante do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Federal da Bahia.

Sona e a Geometria Sona

Para compreender o que é Geometria Sona necessitamos entender o que significa "Sona". Sona, plural de Lusona, é o termo que designa a escrita de figuras e desenhos, combinação de pontos e traços, feitos na areia, um conhecimento ancestral do povo Tchokwe. Esses desenhos representam fábulas, provérbios, animais, situações cotidianas, objetos que transmitem ensinamentos e conhecimento.

Fig. 180: Os Sona **Kalunga** – o caminho de Deus, **Tshihat** – pele de um lagarto, **Koluama Nhi Ana** – leopardo com filhotes, **Muapulai** – uma planta de onde se extrai veneno e **Umbate** - um casal unido



Fonte: Livro **Geometria Sona de Angola: Matemática duma Tradição Africana**, Paulus Gerdes, 2012

Já o termo Geometria Sona, de acordo com Henrique Santiago, foi apresentado e difundido pelo mundo pelo matemático holandês Paulus Gerdes, pesquisador em Etnomatemática que passou anos em África estudando sobre a arte de escrever na areia do povo Tchokwe.

O povo Tchokwe é uma etnia Banta, fala a língua chócue a cultura pertence a um grande círculo cultural de caráter bastante uniforme, que engloba todo o Leste de Angola, o Noroeste da Zâmbia e zonas circunvizinhas da República Federativa do Congo. Seu círculo cultural é marcado pela importância de uma instituição central: a de mukanda (ritos de iniciação para rapazes com a duração variável entre seis e oito meses) com a cerimônia de máscaras. Os Cokwe têm uma organização social matrilinear.

O jogo Mbomge

Mbomge é um jogo cooperativo de captura territorial, com temática centrada na cultura Tchokwe, nele os jogadores devem trabalhar em conjunto para restaurar o território do império Lunda Tchokwe.

A restauração ocorre por meio de disputas campais e desafios envolvendo a geometria sona, aspectos culturais, históricos e conteúdos matemáticos.

Fig. 181: Tabuleiro do Mbomge, mapa da Lunda Tchokwe

Fonte: Acervo dos Autores

O mapa do jogo se distribui pelo nordeste de Angola (províncias de Lunda Norte, Lunda Sul e Moxico), Noroeste da Zâmbia e Sudoeste da República Democrática do Congo.

Os acidentes geográficos presentes na região, foram utilizados como referência para a demarcação territorial, foram formados 28 territórios.

As cartas do jogo, contém problemas matemáticos e de traçado de MDC e MMC geométrico, e as cartas desafios contém problemas de sequências, simetria e monolinearidade.

Os alunos devem resolver as perguntas e desafios para terem direito a conquistar os territórios ocupadas pelas tropas inimigas (tropas da mesa).

Fig. 182: Cartas de perguntas e cartas desafios do Mbomge

Fonte: Acervo dos Autores

A oficina Geometria Sona e o jogo Mbomge

É necessário fazer a introdução do povo Tchokwe, da geometria sona e dos conteúdos matemáticos que podemos e vamos trabalhar com os desenhos, bem como o traçado do MDC e MMC geométrico que eles precisam aprender a desenhar para o jogo.

O jogo usa como ferramenta de sorteio os Estiletes Egípcios, dando configurações específicas, pré definidas nas regras do jogo, cada jogador pode responder uma carta, receber uma bonificação, uma punição ou perder a vez de jogar. Daí as conquistas de território aconteciam se eles acertassem as perguntas ou desafios.

Um dos tipos de cartas, são as de traçado de MDC e MMC geométrico que eram desenhados em uma malha pontilhada impressa em folha A4 e plastificada para eles poderem desenhar e apagar.

Fig. 183: Cartas utilizadas na oficina; tabuleiro com as peças; Estiletes Egípcios feito com pregador de roupa

Fonte: Acervo dos Autores

CONCLUSÃO

A aplicação da oficina foi importante para os alunos entrarem em contato com temas que usualmente não são abordados no ensino de Matemática, proporcionando uma conexão com nossa ancestralidade africana, além de relacionar o tema com assuntos de matemática e fazê-los aprender jogando, de maneira lúdica eles exercitavam conteúdos matemáticos com outra visão.

O jogo Mbonge por ser cooperativo faz com que os alunos trabalhem em equipe e ajudem uns aos outros nos problemas matemáticos, desafios presentes no jogo e criarem estratégias para conquistar os territórios, o que contribui para a socialização em sala de aula.

BIBLIOGRAFIA

[1] Gerdes, P.; **Geometria Sona da Angola, Matemática Duma Tradição Africana.** Volume1, Instituto Superior De Tecnologia e Gestão (ISTG), Moçambique, 2012.

[2] Santiago, H. A.; **Ensino de Matemática em uma Perspectiva Afrocêntrica Através da Geometria Sona.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática, PROFMAT, Universidade Federal da Bahia, 2022.

O grau de imperfeição em reticulados retangulares de dimensão dois

Santos, Veralucia Carvalho dos[604] e Strapasson, João Eloir[605]

Resumo: *O presente trabalho procura reticulados quase perfeitos segundo a métrica euclidiana em ambientes reticulados retangulares de dimensão dois. Iniciamos com a apresentação dos conceitos relacionados à teoria de reticulados e à teoria de códigos, em particular, aos códigos em reticulados. Discutimos também os limites, bem como as densidades de empacotamento e cobertura, e os raio de empacotamento e cobertura, considerando ambientes reticulados. Em seguida, apresentamos o grau de imperfeição de um reticulado e o algoritmo utilizado para encontrar códigos quase perfeitos em ambientes reticulados retangulares na dimensão dois. É possível encontrar códigos quase perfeitos em outros ambientes reticulados que não sejam apenas o* $\mathbb{Z}^n$*.*

Palavras-chave: *Códigos quase perfeitos, grau de imperfeição, reticulados.*

DESCRIÇÃO

O estudo de reticulados é uma teoria com diversas aplicações nas diferentes áreas da tecnologia e comunicação, sendo possível percebê-la nos problemas de empacotamento esférico e cobertura, em particular do empacotamento de reticulados. O objetivo deste trabalho é classificar reticulado quase perfeito em ambientes retangulares de dimensão 2, para uma determinada cardinalidade. Para isso, utilizamos o algoritmo desenvolvido por Strapasson (Santos, 2024), procurando encontrar quais os raios que vamos obter código quase perfeito em alguns reticulados ambientes retangulares.

O estudo de caso apresentado neste trabalho visa encontrar reticulados quase perfeitos, fixando como ambiente reticulados retangulares de dimensão 2. O que diferencia de estudos apresentados anteriormente na busca de códigos quase perfeitos e códigos perfeitos realizados pelas autoras (Morais, 2015) e (Strey, 2020). Pois, aqui estudamos reticulados quase-perfeitos em ambientes quaisquer e não apenas levando em consideração o ambiente o $\mathbb{Z}^n$.

Neste sentido, o trabalho foi desenvolvido em 4 etapas: o estudo da teoria de reticulados, destacando alguns reticulados importantes, em seguida o estudo voltado para a teoria de códigos, em particular os códigos em reticulados. A terceira etapa foi a apresentação do algoritmo desenvolvido por Strapasson que utiliza o teste da injetividade e sobrejetividade na busca de códigos quase perfeitos, em particular trabalhamos com reticulados ambientes de dimensão dois, assim foram apresentados os resultados computacionais com registro de tabelas, das figuras e das observações realizadas e análise dos resultados computacionais.

Na etapa 4 apresentamos as considerações finais, ressaltando a relevância do algoritmo na busca de códigos quase perfeitos na segunda dimensão e a possibilidade de estudo em outras dimensões. O algoritmo de Strapasson que se encontra em (Strapasson, 2016), ancorado no teste de injetividade e no teste da sobrejetividade, pode ser aprimorado para eliminar as soluções equivalentes. Assim, teremos melhoramento das soluções por buscas de códigos quase perfeitos em diferentes ambientes L_a e cardinalidades diferenciadas.

[604] `vcslucia@gmail.com`
[605] strapass@unicamp.br

Definição 9.48 *Definimos o conjunto das distâncias em $\mathbb{Z}^n$, na métrica ℓ_p, com $L \subset \mathbb{Z}^n$ sendo*

$$D_{p,n} = \{d \in \mathbb{R} \quad \text{tal que, existe} \quad z \in \mathbb{Z}^n \quad \text{com} \quad d_p(z,n) = \|Z\|_p\}$$

Definição 9.49 *A distância entre dois elementos $x, y \in D_{p,n} \in L_a$ com $x \leq y$, é definida como sendo $d(x,y) = \#(D_{p,n}(L_a) \cap [x,y))$.*

Definiremos o grau de imperfeição, em que usaremos a notação t.

Definição 9.50 *Dizemos que um reticulado $L \subset L_a$ tem grau de imperfeição t se a distância entre o raio de empacotamento e de cobertura for igual a t, ou seja, $d(r_p, R_p) = t$.*

Observação 9.2 *Quando o raio de empacotamento e o raio de cobertura forem iguais temos que a distância é zero, isto é, $t = 0$ logo o reticulado é perfeito. Agora, o caso em que o reticulado é quase perfeito, os raios de empacotamento e cobertura são consecutivos, e a distância entre eles é 1.*

Teste de injetividade e sobrejetividade

O teste da injetividade é baseado no teorema proposto por Horak and Albdaiwi. Este teste é importante para o desenvolvimento do Algoritmo que será apresentado.

Teorema 9.48 *Seja $P \subset \mathbb{Z}^n$, tal que $\#P = m$. Existe um reticulado que ladrilha $\mathbb{Z}^n$ pelo translado de P, se somente se, existir um grupo abeliano G de ordem m e um homomorfismo $\Phi \colon \mathbb{Z}^n \to G$ tal que a restrição $\Phi|_p$ é uma bijeção.*

O Corolário a seguir é uma releitura do Teorema 1, proposto por Horak and Albdaiwi.

Corolário 9.4 *Seja $P \subset L_a$, tal que $\#P = m$. Existe um reticulado que ladrilha L_a, pelo translado de P, se somente se, existir um grupo abeliano G de ordem m e um homomorfismo $\Theta \colon L_a \to G$ tal que a restrição $\Phi|_p$ é uma bijeção.*

O Algoritmo de Strapasson, que busca encontrar uma lista de reticulados quase-perfeitos retangulares de dimensão $n = 2$, neste caso. O Algoritmo está baseado nos testes de injetividade e sobrejetividade apresentados no Corolário 9.4 e no Teorema 9.48. Em que, o teste de injetividade faz a associação de cada reticulado $L \subset L_a$.

Assim podemos encontrar os possíveis raios r, em que podemos achar quase perfeitos em L_a. Dessa forma, os raios serão determinados pelo reticulado ambiente L_a, isso acontecerá até um determinado valor que depende da densidade.

Algoritmo - Buscar códigos perfeitos e quase-perfeitos

```
Entrada: L_a e p;
início
  D ⟵ D_{p,n}
  enquanto r < limite faça
    R = min {x ∈ D| (c, d(R, r) = 1}
    enquanto #B_p^n(r) ≤ M ≤ #B_p^n(R) faça
      Lattices ⟵ {L ⊂ L_a; vol(L) = Mvol(L_a)};
      C ⟵ 1;
      DenseLattices ⟵ {}
      enquanto C ≤ #Lattices faça
        "Teste de injetividade no C-ésimo elemento de Lattices for positivo "
         então Dense Latticeis ⟵ Dense Latticeis ∪ {C-ésimo elemento};
        C ⟵ C + 1;
      fim
      C ⟵ 1;
      Quase perfeito ⟵ {}
      enquanto C ≤ #DenseLattices faça
        se "teste de sobrejetividade" no C − ésimo elemento de
         DenseLattices for positivo então Quasiperfect ⟵ Quasiperfect
         ∪ {C-ésimo elemento};
        fim
        C ⟵ C + 1
      fim
      M ⟵ M + 1;
    fim
    Atualize r
  fim
fim
Saída:Lista dos quase perfeitos em L_a
```

Códigos quase-perfeitos em reticulados retangulares de dimensão $n = 2$

Temos que os reticulados com grau de imperfeição $t = 1$ são dois a dois equivalentes, por exemplo, $\{\{1, 7\}, \{0, 25\}\}$ e $\{\{1, 18\}, \{0, 25\}\}$ são equivalentes e ambos não são equivalentes ao reticulado $\{\{5, 2\}, \{0, 5\}\}$, como podemos observar nas figuras abaixo.

Fig. 184: Empacotamento e cobertura do $\mathbb{L}_{a,25}\{(2, 5), (0, 5)\}$

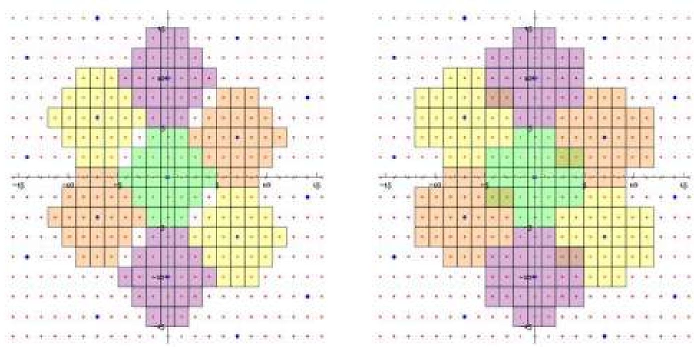


Fig. 185: Empacotamento dos reticulados $\mathbb{L}_{a,25}\{(1, 7), (0, 25)\}$ e $\mathbb{L}_{a,25}\{(1, 18), (0, 25)\}$, respectivamente

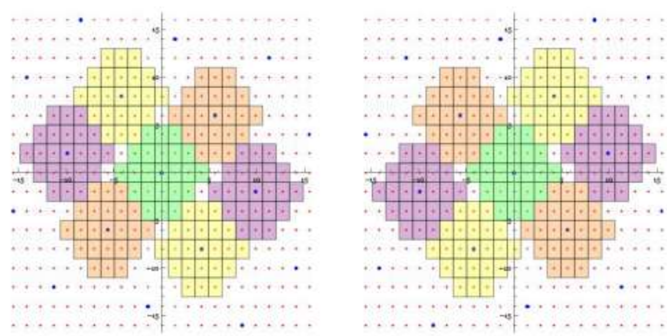
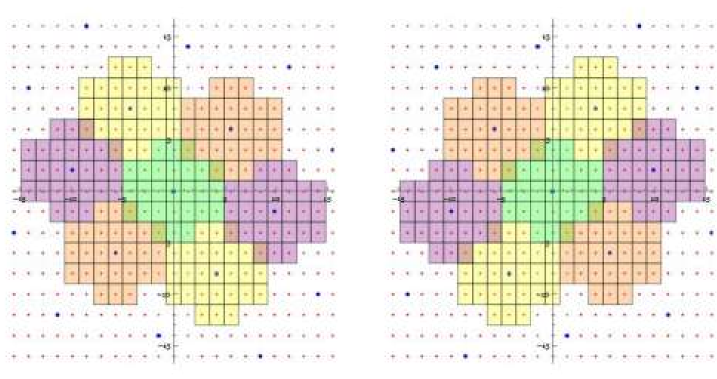


Fig. 186: Cobertura dos $\mathbb{L}_{a,25}\{(1, 18), (0, 25)\}$ e $\mathbb{L}_{a,25}\{(1, 7), (0, 25)\}$, respectivamente



BIBLIOGRAFIA

[1] Costa, S. I. R.; Oggier F.; et al.; **Lattices Applied to Coding for Realiable and Secure Communications.** Springer, 2017.

[2] Souza, J. G.; **O problema do empacotamento de esferas no espaço n-dimensional.** Dissertacao Mestrado, UNICAMP, 2019.

[3] Strapasson, J. E.; **Geometria Discreta e Códigos.** PhD thesis, UNICAMP, 2007.

[4] Strapasson, J. E.; Jorge, G. C.; Campello, A.; Costa, S. I. R.; **Quasi-perfect codes in the lp metric.** Computational and Applied Mathematics, vol. 37, pp. 852–866, 2018.

[5] Conway, J. H.; Sloane, N. J. A.; **Sphere Packings, Lattices and Groups.** New York: Springer Verlag, 3 ed., 1998.

[6] Morais, N. M. L. B. G.; **O grau de imperfeição em sub-reticulados inteiro.** Campinas, SP. s.n 2015.

[7] Strey, G. R. A. S.;**Códigos perfeitos e ladrilhamento em diversos reticulados ambientes.** Campinas, SP. s.n 2020.

[8] Strapasson, J. E.; Jorge, G. C.; Campello, A.; Costa, S. I. R.; **Quasi - perfect codes in the lp metric.** arXiv, 2015.

[9] Zang, T.; Tao; Ge. G.; **Perfect and Quasi - perfect codes Under the lp metric.** IEEE Transactions on Information Theory, VOL. 63, NO. 7, JULY 2017.

[10] Campello, A.; Jorge, G. C.; Strapasson, J. E.; Costa, S. I. R.; **"Perfect codes in the lp metric".** European Journal of Combinatorics, vol. 53, pp. 72–85, 2016.

[11] Marcia R.; Ruggiero, A. G.; Rocha, L. V. L. da.; **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais.** 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.

Primeiro exemplo de bases de Gröbner

A cúbica torcida

SANTOS, Victor[606]; TEIXEIRA, Thiago[607] e SOUZA, Jairo[608]

Resumo: *Este trabalho explora as propriedades fundamentais das Bases de Gröbner, destacando principalmente um algoritmo que facilita sua identificação. Serão também apresentados diversos tipos de ordens monomiais, elucidando como a escolha de uma ordem específica pode influenciar se um conjunto de polinômios constitui ou não uma Base de Gröbner de um ideal.*

Palavras-chave: *Bases de Gröbner, ordem monomial, cúbica torcida.*

INTRODUÇÃO

As Bases de Gröbner são uma ferramenta essencial na álgebra comutativa, amplamente reconhecida por suas robustas capacidades computacionais. Elas são utilizadas para resolver uma gama diversa de problemas matemáticos complexos, que incluem desde a determinação dos elementos de um ideal até a solução de sistemas de equações polinomiais e análise de problemas de parametrização. Essas bases são particularmente valiosas por simplificar e tornar computacionalmente acessíveis soluções que, de outra forma, seriam extremamente desafiadoras de se obter.

Neste trabalho, exploraremos duas variações da ordem lexicográfica, considerando o peso de cada variável. Investigaremos como a escolha da ordem monomial pode influenciar a determinação de se um conjunto de polinômios constitui ou não uma Base de Gröbner de um ideal.

DEFINIÇÕES E EXEMPLOS

Definição 9.51 *Uma ordem monomial $>$ em $k[x_1, \ldots, x_n]$ é uma relação em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, ou no conjunto de monômios x^α (com $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$), que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $>$ é uma ordem total (ou linear) em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

(ii) Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, então $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

(iii) $>$ é uma boa ordem em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, significando que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ possui um menor elemento com respeito a $>$.

[606]aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).
[607]aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).
[608]Prof. Orientador IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).

Considere, por exemplo, o polinômio $f = 8xy^2z + 4z^2 - 8x^3 + 7x^2z^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Reordenando os termos de acordo com diferentes ordens, temos:

- Com respeito à ordem lexicográfica: $f = -8x^3 + 7x^2z^2 + 8xy^2z + 4z^2$.
- Com respeito à ordem lexicográfica graduada: $f = 7x^2z^2 + 8xy^2z - 8x^3 + 4z^2$.
- Com respeito à ordem lexicográfica graduada reversa: $f = 8xy^2z + 7x^2z^2 - 8x^3 + 4z^2$.

Lema 9.3 *Seja o ideal monomial $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A\rangle$. O monômio x^β está contido em I se, e somente se, x^β é divisível por x^α para algum $\alpha \in A$.*

Definição 9.52 *Dada uma ordem monomial, um subconjunto finito $G = [g_1, \dots, g_t]$ de um ideal é uma* ***base de Gröbner*** *(ou* ***base padrão****) se:*

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t)\rangle = \langle LT(I)\rangle.$$

Teorema 9.49 (Critério de Buchberger) *Seja I um ideal do anel de polinômios. Então, a base $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ é uma base de Gröbner para I se, e somente se, para todos os pares i, j (com $i \geq j$), o resto da divisão de $S(g_i, g_j)$ por G (listadas em alguma ordem) é zero.*

CÚBICA TORCIDA

A cúbica torcida é um exemplo de curva algébrica no espaço tridimensional, definida pela intersecção das superfícies $y = x^2$ e $z = x^3$, e representada pelas equações paramétricas (t, t^2, t^3) para $t \in \mathbb{R}$. Este exemplo serve como uma introdução ao estudo de singularidades e geometria algébrica.

O ideal $I = \langle y - x^2, z - x^3\rangle$ da cúbica torcida, na ordem lexicográfica onde $x > y > z$, não forma uma base de Gröbner. Para demonstrar isso, consideremos $f_1 = x^2 - y$ e $f_2 = x^3 - z$ e apliquemos o algoritmo de Buchberger para a base de $I = \langle f_1, f_2\rangle$. Através do polinômio S, é possível construir:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{\text{mmc}(x^2, x^3)}{x^2} f_1 - \frac{\text{mmc}(x^2, x^3)}{x^3} f_2 \\ &= x(x^2 - y) - (x^3 - z) \\ &= -xy + z \end{aligned}$$

O polinômio gerado, $-xy + z$, pertence a I, mas $xy \notin \langle \text{LT}(f_1), \text{LT}(f_2)\rangle$. Portanto, (f_1, f_2) não é uma base de Gröbner para I nesta ordem. Uma base de Gröbner válida para I na ordem lexicográfica incluiria:

$$\{x^2 - y, x^3 - z, xy - z, xz - y^2\}$$

Ao considerar a ordem lexicográfica com pesos $y > z > x$, e redefinindo $f_1 = y - x^2$ e $f_2 = z - x^3$:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= zy - zx^2 - yz + yx^3 \\ &= yx^3 - zx^2 \end{aligned}$$

O resto da divisão de $yx^3 - zx^2$ por (f_1, f_2) é zero, confirmando pelo critério de Buchberger que (f_1, f_2) é uma base de Gröbner para I nesta ordem monomial.

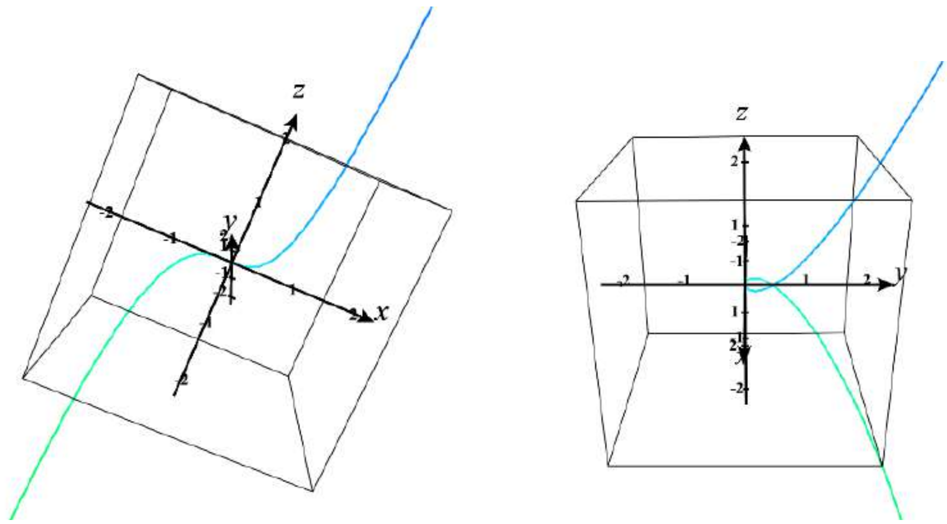


Fig. 187: Representação gráfica da cúbica torcida gerada pelo ideal $I = \langle y - x^2, z - x^3, xy - z, xz - y^2 \rangle$

BIBLIOGRAFIA

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., **Ideals, Varieties, and Algorithms**, 3nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2007.

Métrica de Sasaki e a energia de Dirichlet de campos vetoriais

Garcia, Vítor M.[609]

Resumo: *Este trabalho dedica-se à apresentar os conceitos básicos e definições relacionados aos subespaços vertical e horizontal do espaço tangente ao fibrado tangente de uma variedade Riemanniana. Com isso podemos definir as métricas naturais e, consequentemente, a métrica de Sasaki. Finalmente, definimos a energia de Dirichlet no contexto de campos vetoriais suaves em uma variedade Riemanniana fechada.*

Palavras-chave: *Métrica de Sasaki, energia de Dirichlet, campos vetoriais unitários.*

INTRODUÇÃO

Dada uma variedade Riemanniana (M, g), podemos definir o subespaço vertical de acordo com a projeção associada ao fibrado tangente $\pi : TM \to M$ por $\mathcal{V}_{(p,u)} = \ker\,(T_{(p,u)}\pi) \subset T_{(p,u)}TM$, onde $T_{(p,u)}\pi$ é a aplicação tangente à π no ponto $(p, u) \in TM$. O espaço horizontal $\mathcal{H}_{(p,u)} \subset T_{(p,u)}TM$ é dado pelo núcleo do *mapa de conexão* induzido pela conexão de Levi-Civita

$$K_{(p,u)} = T_{(p,u)}(exp_p \circ R_{-u} \circ \tau) : T_{(p,u)}TM \to T_pM,$$

onde $exp_p : T_pM \to M$ é a aplicação exponencial mapeando difeomorficamente uma vizinhança V' de 0_{T_pM} em $V \subset M$, $R_{-u} : T_pM \to T_pM$ é a translação pelo vetor $-u$ e $\tau : \pi^{-1}(V) \to T_pM$ é o transporte paralelo de $Y \in \pi^{-1}(V)$, do ponto $q = \pi(Y)$ até p pela único arco geodésico em V conectando ambos os pontos. Com isso podemos falar dos campos vetoriais horizontal e vertical associados a um campo X. Estes são os campos $X^h, X^v \in \mathfrak{X}(TM)$ unicamente determinados por

$$T_Z\pi \cdot X^h = X_{\pi(Z)},\ K(X^h_Z) = 0_{\pi(Z)}$$

e

$$T_Z\pi \cdot X^v = 0_{\pi(Z)},\ K(X^v_Z) = X_{\pi(Z)}$$

para todo $Z \in TM$

Daí partimos para as chamadas *métricas naturais* $\bar{g}$ com respeito à métrica g, que obedecem as propriedades

(i) $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_p(X, Y)$,

(ii) $\bar{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0$

para todos os campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e pontos $(p, u) \in TM$. Com isso, podemos definir a *métrica de Sasaki* g_s, introduzida por Shigeo Sasaki (1912-1987) em [3], pertencente à classe das métricas naturais em (M, g).

[609] Mestrando em Matemática na Universidade Federal do ABC. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

OBJETIVO PRINCIPAL

Temos como objetivo introduzir a *energia de Dirichlet* de um campo vetorial suave em uma variedade Riemanniana fechada orientada M. Entre variedades Riemannianas, a energia de Dirichlet de uma função suave $F : M \to N$ é definida por

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2}\int_M ||d\vec{F}||^2 dM,$$

onde dM é a densidade definida pela métrica g de M e $||dF||^2$ a norma de Hilbert-Schmidt do operador dF.

Olhando para os campos vetoriais como aplicações $X : (M^n, g) \to (TM, g_s)$, onde n é a dimensão de M e g_s é a métrica de Sasaki naturalmente associada à g em TM, a expressão da energia acima se torna

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{2}\int_M (n + ||\bullet X||^2) dM.$$

Nesse contexto, pontos críticos X de $\mathcal{E}$ são chamados *campos harmônicos* e são realizados se, e somente se, são paralelos, i.e., $\bullet X = 0$, onde $\bullet$ é a conexão de Levi-Civita associada à M. De particular interesse é o estudo dos limitantes inferiores desse funcional nas esferas de dimensão ímpar.

BIBLIOGRAFIA

[1] DRAGOMIR, S.; PERRONE, D. **Harmonic Vector Fields: Variational Principles and Differential Geometry**, Elsevier, 2011.

[2] GUDMUNDSSON, S.; KAPPOS, E. **On the geometry of tangent bundles.** Expositiones Mathematicae, v. 20, p. 1–41, 2002.

[3] SASAKI, S. **On the differential geometry of tangent bundles on Riemannian manifolds.** Tohoku Mathemathics Journal, v. 14, p. 407–417, 19588.

Automorfismos irredutíveis de grupos livres

Aplicações de Trilhos de Trem Estáveis e o Rank do subgrupo dos Fixos

Santos, Vinícius Lima dos[610] e Bertolini, Marcel Vinhas[611]

Resumo: *Este trabalho é conseguinte a produção de minha dissertação sob orientação do Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini. Neste trabalho objetiva-se estudar métodos geométricos e topológicos no contexto da teoria de automorfismos de grupos – com ênfase particular em teoria de homotopia, teoria de grafos e teoria de Perron-Frobenius. Disserta-se as aplicações ao estudo de automorfismos irredutíveis de grupos livres finitamente gerados. À luz de M. Bestvina e M. Handel (1992) e V. Santos (2024) estuda-se um algoritmo capaz de produzir para cada automorfismo (exterior) de* F_n *um representante topológico chamado aplicação de trilho de trem, favorecendo a compreensão da dinâmica de automorfismos. Desse modo, uma vez conhecida a capacidade do algoritmo de Bestvina-Handel, este trabalho discute os próximos passos na compreensão das aplicações de trilhos de trem: caminhos de Nielsen e estabilidade destas aplicações. Cujo principal objetivo é obter resultados acerca do conjunto de pontos fixos* $Fix(\Phi)$ *de automorfismos* $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ *irredutíveis. Este trabalho conclui-se com um caso particular, porém forte, da conjectura de Scott, obtido por Bestvina e Handel em 1992, a saber: se* $\Phi : F_n \to F_n$ *é automorfismo (exterior) irredutível, então* $Rank(Fix([\Phi])) \leq 1$.

Palavras-chave: *Automorfismos irredutíveis de grupos livres, algoritmo de Bestvina-Handel, aplicações de trilhos de trem, caminhos de Nielsen, subgrupo dos fixos.*

ESTABILIDADE DE APLICAÇÕES DE TRILHOS DE TREM

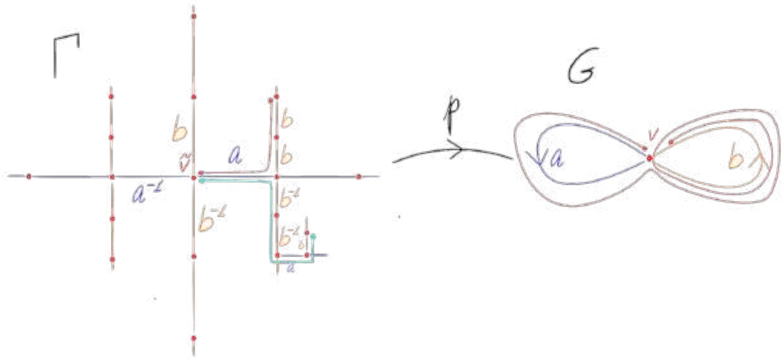
Levantamentos e Conjugações

Exemplo 9.7 *Considere* $f : G \to G$ *representante trivial*[612] *de* Φ *dado por* $a \mapsto ab^2$ *e* $b \mapsto ab^{-2}ab$ *e a marcação* $\tau = id_{R_2}$. *Assim, existe* $(f_v)_* = (f)_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(R_2, v))$ *determinado por* $(f)_*(\langle\alpha\rangle) = \langle f(\alpha)\rangle$, $v \in G$ *caminho trivial. Seja* $p : \Gamma \to G$ *o recobrimento universal de* G *sobre* G *e* $T = \langle ab^2, ab^{-2}ab\rangle$ *o grupo de transformações de recobrimento de* Γ.

[610] USP. Este autor foi apoiado por IME-USP e CAPES.

[611] UFPA. Este autor foi apoiado por UFPA.

[612] Retomar [6] para compreender representações topológicas (p.38), aplicação de trilho de trem (p.46) e operações que compõem o algoritmo pro caso irredutível (p.52).



Neste contexto, $p(\tilde{v}) = v$, ie, $\tilde{v} \in \Gamma$ é o levantamento de v. Assim, pode-se concluir a identificação de $T \cong \pi_1(R_2, v)$. Afinal, para todo $t \in \Gamma$, existe um único $\gamma_t \subset \Gamma$ conectando $\tilde{v}$ a $t\tilde{v}$ com a identificação dada por $t \mapsto \langle p(\gamma_t)\rangle$. Desse modo, para todo laço $u : [0,1] \to G$ em v existe $\tilde{u} : [0,1] \to \Gamma$ levantamento de u com $\tilde{u}(0) = \tilde{v}$. Seja $\tilde{f}_u : \Gamma \to \Gamma$ o levantamento de $f : G \to G$ tal que $\tilde{f}_u(\tilde{v}) = \tilde{u}(1)$. Assim, $(f)_*$ é identificado com $(\tilde{f}_u)_* \in \mathrm{Aut}(T)$ dado por $(\tilde{f}_u)_*(t) = \tilde{f}_u t \tilde{f}_u^{-1}$. Agora observe que de $\tilde{f}_*(t)(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(t(\tilde{v}))$, obtemos se a transformação for $t \equiv a$ e $t \equiv b$: $ab^2(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(a(\tilde{v}))$ e $ab^{-2}ab(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(b(\tilde{v}))$, respectivamente. Mas o que podemos falar sobre Fix$(\tilde{f}_*)$? A menos que testemos concatenações, as conclusões dadas acima são o máximo.

Proposição 9.16 *Se $\tilde{f} : \Gamma \to \Gamma$ é um levantamento de uma representação topológica $f : G \to G$, e Rank(Fix$(\tilde{f}_*)$) ≥ 2, então Fix$(\tilde{f}) \neq \varnothing$.*

Corolário 9.5 *Seja $f : G \to G$ representação topológica de $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$ determinada por $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$. Se Rank(Fix$(\Phi)$) ≥ 2, então Φ é conjugado ao $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$ definido pelo caminho trivial y, para algum $y \in$ Fix(f).*

Caminhos de Nielsen e Estabilidade

A partir daqui consideraremos sempre $f : G \to G$ representante de trilho de trem irredutível de $\mathcal{O}$ e normalizado da seguinte forma. Sejam M a matriz de transição de f e λ o autovalor (de Perron-Frobenius de M) associado a $\mathcal{O}$. Assim, G é um grafo com uma métrica a qual a i-ésima aresta é isométrica ao intervalo de comprimento v_i, onde v_i é a i-ésima coordenada do vetor positivo $\vec{v}$ com a propriedade $\vec{v}M = \lambda\vec{v}$.

Para os nossos objetivos, a preocupação se $\lambda = 1$ será considerada apenas no Teorema 9.51. Então, a partir de agora também consideraremos $\lambda > 1$.

Definição 9.53 *Um caminho ρ entre $x, y \in$ Fix(f) é um caminho de Nielsen se $f(\rho) \simeq \rho$ rel.$\{0,1\}$. Se o caminho $\rho \neq \rho_1\rho_2$, ρ_i subcaminhos de Nielsen, então ρ é dito indivisível. Notação: N_G^i é o conjunto dos caminhos de Nielsen indivisíveis em G.*

Proposição 9.17 *Um $\rho \in N_G^i$ contém exatamente uma volta ilegal. Em particular, existem únicos caminhos legais não triviais α, β e τ tais que $\rho = \alpha\beta$, $f(\alpha) = \alpha\tau$, $f(\beta) = \overline{\tau}\beta$ e tal que $\{\overline{\alpha}, \beta\}$ é uma volta não degenerada.*

Definição 9.54 *O conjunto $\mathcal{W}(f)$ é constituído pelos representantes irredutíveis de trilhos de trem os quais podem ser obtidos por uma sequência finita de dobras de caminhos de Nielsen indivisíveis. Dizemos que $f : G \to G$ é estável se não ocorrem dobras parciais na construção de $\mathcal{W}(f)$.*

O TEOREMA DO RANK DO SUBGRUPO DOS FIXOS

Teorema 9.50 *Existe $f : G \to G$ representante topológico trilho de trem irredutível de $\mathcal{O}$; $\#N_G^i \leq 1$, a menos de orientação reversa. Se $\rho(0) = \rho(1)$, $\rho \in N_G^i$, então ρ é um laço que atravessa cada aresta de G exatamente duas vezes.*

Teorema 9.51 *Se* $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ *é irredutível, então* $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$.

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade $n > 1$. Estudemos os casos para o autovalor de Perron-Frobenius λ associado à matriz de transição M do representante topológico $f : G \to G$. Se $\lambda = 1$, então M é matriz de permutação e f é homeomorfismo. Como M é irredutível, f não pode fixar arestas. Assim, para qualquer $y \in \mathrm{Fix}(f)$ o automorfismo $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$, determinado por f e o caminho trivial em y, tem subgrupo fixo trivial. Pelo Corolário 9.5 obtemos o que queríamos. Suponha $\lambda > 1$ e $f : G \to G$ representante de trilho de trem irredutível de $\mathcal{O}$, então pelo Teorema 9.50, $\#N_G^i \leq 1$. Seja $y \in Fix(f)$ e $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$ determinado por f e y caminho trivial. Desse modo, todo $\langle \alpha \rangle \in Fix(f_*)$ é representado por um caminho de Nielsen em y a si mesmo. Então se: Φ é conjugado ao f_*, segue que $Rank(Fix(f_*)) \leq 1$, logo $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$; Φ não é conjugado ao f_*, pela contrapositiva do Corolário 9.5, $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] BESTVINA, M.; HANDEL, M.. **Train tracks and automorphisms of free groups**. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 135, No. 1 (Jan., 1992), pp. 1-51.

[2] BREDON, G. E. **Topology and geometry**. Springer, 1a edição, GTM, 1993.

[3] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.

[4] LEE, J. M..**Introduction to topological manifolds**. Springer, 2a edição, volume 202 de GTM, 2011.

[5] STALLINGS, J.R.. **Topology of finite graphs**. Inventiones mathematicae, 71 (3): 551-565, 1984.

[6] SANTOS, V. L. dos.. **Automorfismos Irredutíveis de Grupos Livres: O algoritmo de Bestvina-Handel**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Pará. Belém, p.174. 2024.