XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Códigos Corretores de Erros

Balan, João Victor[1]; Peixoto, Rafael[2]

Resumo: *Os códigos corretores de erros têm sido uma área de estudo muito ativa nos últimos anos, tendo sua utilidade em diversos campos como computação, matemática e também na engenharia aeroespacial. Nesse texto iremos dar ênfase a algumas aplicações dos códigos.*

Palavras-chave: *Códigos, Corretores, Erros, Detectores, Mariner*

1. Introdução

Os códigos corretores de erros são uma ferramenta presente na vida de inúmeras pessoas, seja do mais simples como fazer compras no mercado ou até mesmo receber imagens de um planeta mandado por uma sonda a milhões de quilômetros de distância. Eles têm, por essência, a função de mandar informações codificadas e, através de redundâncias inseridas neste código, eles são capazes de detectar e corrigir eventuais erros causados.

O processo de enviar uma informação usando os códigos consiste em uma fonte emitindo a informação, que passa por um codificador de fonte que transforma os dados em um código, depois este passa por um codificador de canal responsável por adicionar redundância a esse código, e então ele é enviado via um canal (ondas de rádio, linha de telefone, fibra ótica, etc), onde pode sofrer alguma interferência que prejudica o código. Um decodificador de canal recebe esse código danificado, encontra o erro e o corrige mandando para o decodificador da fonte, que converte o código para informação novamente.

O processo acima descrito pode ser esquematizado como mostra a figura 1.

Esquema de um código

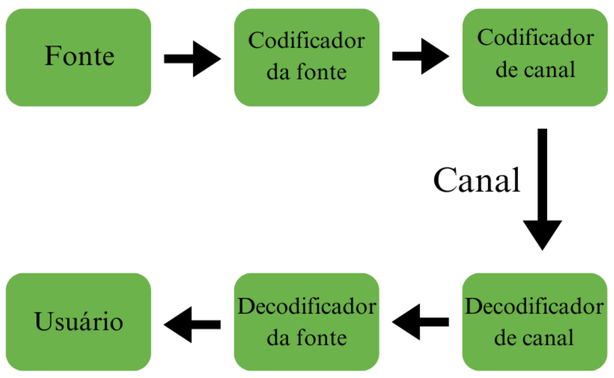

Fig 1: Autoria própria

A seguir mostraremos alguns exemplos de códigos.

2. Códigos Detectores de Erros

Os códigos detectores são ferramentas que, por meio de redundâncias presentes no código, conseguem encontrar erros causados por ruídos ao passar pelo canal transmissor. Entre eles está o código de barras (EAN-13), atualmente utilizado no Brasil para identificação de produtos à venda, que será enfatizado neste texto.

Exemplo de código EAN-13

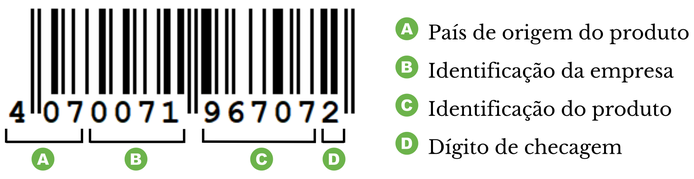

Fig 2: Autoria própria

O código EAN-13 consiste de 13 dígitos, onde os doze primeiros, $(v_1, v_2, ..., v_{12})$ indicam o país de origem, o fabricante e o produto em si , enquanto o ultimo (d) é o digito de checagem. O código em si é um vetor (v) 10-ário com comprimento 13 da seguinte forma: $v = (v_1, v_2, ..., v_{12}, d) \in \mathbb{Z}_{10}^{13}$.

A componente d é determinada de maneira que $c \cdot v = 0$, onde c é o vetor de checagem dado como: $c = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$.

Verificaremos agora o dígito de checagem no código $v = (4, 0, 7, 0, 0, 7, 1, 9, 6, 7, 0, 7, d)$, visto na figura 2:

$c \cdot v = 0$

$\rightarrow (4, 0, 7, 0, 0, 7, 1, 9, 6, 7, 0, 7, d) \cdot (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1) = 0$

$\rightarrow (4) + (0) + (7) + (0) + (0) + (7.3) + (1) + (9.3) + (6) + (7.3) + (0) + (7.3) + (d) = 0$

$\rightarrow 108 + d = 0$

Como estamos em $\mathbb{Z}_{10}$, $d = 2$, portanto o dígito de verificação esta correto. Caso houvesse algum erro de leitura, este último dígito não estaria compatível indicando a existência de um erro.

3. Códigos no Conexto Espacial

Dentro do contexto espacial, existem diversas aplicações dos códigos corretores de erros. Uma delas é a comunicação entre sondas e a base de comando na Terra, onde esta comunicação muitas vezes sofre de interferência por radiação solar, assim causando erros ao código. O programa Mariner se destacou no avanço da teoria de códigos.

Mariner 4

No ano de 1964 a sonda Mariner 4 foi enviada a marte, mas só em 1965 que a sonda mandou as primeiras fotos da superfície marciana. Ela transmitiu 22 fotos em preto e branco tendo cada uma 200×200 pixels. A cada um desse pixels foi atribuído um dos 64 tons de cinza pré-programados e então um codificador de fonte transforma esta informação em um elemento de $\mathbb{Z}_2^6$. Na época o transmissor era tão lento que estes vetores eram enviados sem uma codificação de canal.

Mariner 4

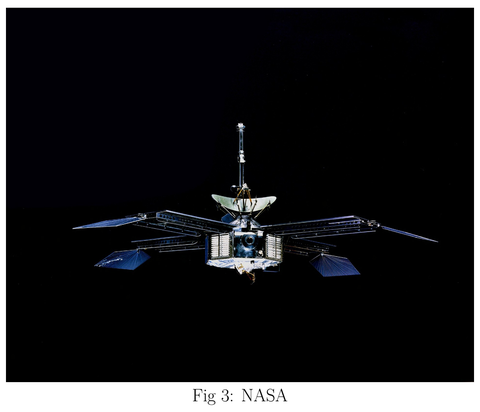

Fig 3: NASA

Superfície marciana capturada pela Mariner 4

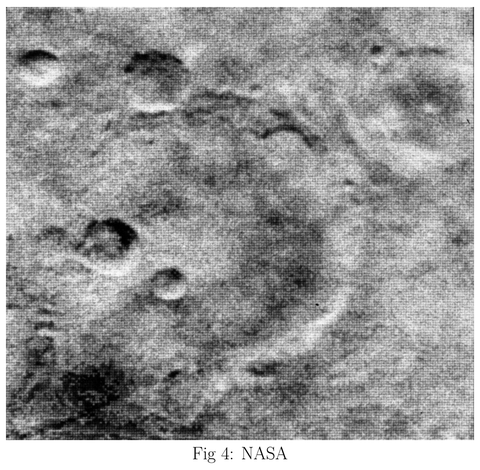

Fig 4: NASA

Mariner 9

Comparando com os sondas anteriores, a Mariner 9 em 1971 teve um avanço muito grande na teoria de códigos, além de um grande aumento na capacidade do transmissor. As imagens agora foram divididas em 700×832 pixels, o que melhorou muito a resolução. O código da fonte foi mantido ainda com as 64 palavras que são os tons de cinza dos pixels, onde o vetor (0,0,0,0,0,0) representa a cor branca e o (1,1,1,1,1,1) representa o preto, porém agora com a implementação do código de canal.

O código usado no canal é chamado de Código de Reed-Muller de Primeira Ordem R(1.m), onde no caso da sonda $m = 5$. A codificação feita leva cada vetor de 6 dígitos a um novo vetor agora com 32 dígitos através da multiplicação do código da fonte pela matriz geradora de R(1.5). Este código é capaz de detectar até 15 erros e corrigir até 7 erros.

Codificaremos agora o vetor $b = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$ que representa um dos tons de cinza. Multiplicando o vetor pela matriz que gera o código,

$$\begin{pmatrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\\
0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{pmatrix}$$

obtemos o vetor $c =$ (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0) que representa a mesma tonalidade de cinza, porem com 32 dígitos, possibilitando a detecção e correção dos erros

Mariner 9

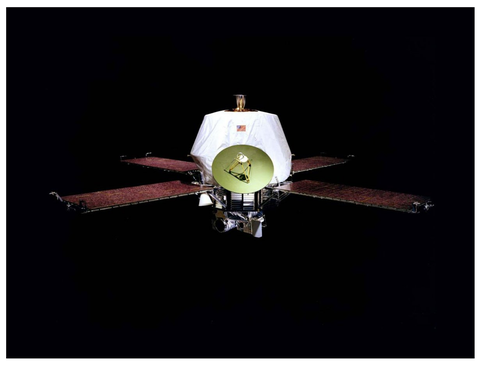

Fig 5: NASA

Imagem do Monte Olimpo feita pela Mariner 9

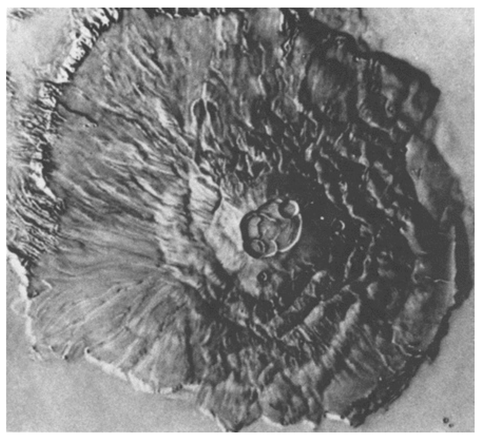

Fig 6: NASA

Referências

[1] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. Códigos Corretores de Erros. Segunda edição **Rio de Janeiro**, IMPA, 2017.

[2] MENEGHESSO, Carla. Códigos Corretores de Erros, Monografia, UFSCAR, **São Carlos**, p.61, 2012.Dez, 2017.

[3] DIAS, J. S.; CORNELISSEN, M. G. O Código da Nave Espacial Mariner 9 . Revista Ciências Exatas e Naturais, **São João Evangelista, MG**, Vol 19, 2, Jul/Dez, 2017.

[4] NASA; **Jet Propulsion Laboratory**; 2024; JPL is a federally funded research and development center managed for NASA by Caltech. Disponível em: https://www.jpl.nasa.gov . Acesso em: 10 jun. 2024.

Apoios:

[1]Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Apoio: PET Matemática
[2]Universidade Federal do Triângulo Mineiro