Métrica de Sasaki e a energia de Dirichlet de campos vetoriais

Autor: Garcia, Vítor M.[1]

Orientadores: Gonçalves, Ícaro[2]; Gozzi, Francisco J.[3]

Resumo: *Este trabalho dedica-se à apresentar os conceitos básicos e definições relacionados aos subespaços vertical e horizontal do duplo espaço tangente de uma variedade Riemanniana, i.e., o espaço tangente ao espaço tangente da variedade. Com isso podemos definir a métrica de Sasaki, pertencente ao conjunto das métricas naturais. Finalmente, definimos a energia de Dirichlet no contexto de campos vetoriais suaves gerais e unitários em uma variedade Riemanniana fechada e sem bordo.*

Palavras-chave: *Subespaço horizontal, subespaço vertical, métrica de Sasaki, energia de Dirichlet, campos vetoriais unitários.*

1. Conceitos Preliminares

Durante todo o trabalho consideramos (M, g) uma variedade Riemanniana m-dimensional orientada e fechada, i.e., compacta e sem bordo. A métrica g ficará subentendida na notação M. Denotaremos por $\pi_M : TM \to M$ e $\pi_{TM} : TTM \to TM$ as projeções associadas aos seus respectivos espaços tangentes.

Proposição 1 *Uma carta $(\tilde{U} \coloneqq \pi_M^{-1}(U), \psi)$ de TM induzida por uma carta (U, x_i) de M é, em coordenadas, dada por*

$$\psi(p,u) = (x^1(p), \ldots, x^m(p), \xi^1, \ldots, \xi^m),$$

onde $u = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in T_pM$, $\xi^j \in \mathbb{R}$ e $p = \pi_M(p,u) \in U$.

Proposição 2 *Uma carta $(\pi_{TM}^{-1}(\tilde{U}), \Psi)$ de TTM induzida por uma carta $(\tilde{U}, \psi)$ de TM é, em coordenadas, dada por*

$$\Psi(p,u,\eta) = (x^1(p), \ldots, x^m(p), \xi^1, \ldots, \xi^n, X^1, \ldots, X^m, \eta^1, \ldots, \eta^m),$$

onde $\eta = (X^i, \eta^i) \in T_{(p,u)}TM$, $u \in T_pM$, $X^i, \eta^i \in \mathbb{R}$.

Corolário 1 *Nas coordenadas acima, temos que as aplicações de projeção são dadas por*

$$\begin{array}{ll} \pi_M : TM \longrightarrow M \\ (x^i, \xi^i) \longmapsto (x^i) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ll} \pi_{TM} : TTM \longrightarrow TM \\ (x^i, \xi^i, X^i, \eta^i) \longmapsto (x^i, \xi^i). \end{array}$$

Proposição 3 *A aplicação tangente $T_{(p,u)}\pi_M : T_{(p,u)}TM \to T_pM$ de π_M no ponto $(p,u) \in TM$ é, em coordenadas, dada por*

$$T_{(p,u)}\pi_M \cdot (x^i, \xi^i, X^i, \eta^i) = (x^i, X^i).$$

Definição 1 *O **laplaciano de conexão**, ou **rough laplacian**, de M é o operador $\Delta_g : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por*

$$\Delta_g = -\textstyle\sum_i \nabla_{E_i}\nabla_{E_i}X - \nabla_{\nabla_{E_i}E_i}X$$

onde $\{E_1, \cdots, E_m\}$ é um referencial local ortonormal de M.

2. Métrica de Sasaki

Definição 2 *O subespaço linear $\mathcal{V}_{(p,u)} \coloneqq \ker(T_{(p,u)}\pi_M)$, onde*

$$\ker(T_{(p,u)}\pi_M) = \{(x^i, \xi^i, 0, \eta^i) \,|\, (p,u) = (x^i, \xi^i),\ (\eta^i) \in \mathbb{R}^m\},$$

*é chamado **subespaço vertical** de $T_{(p,u)}TM$.*

Considere $X \in T_pM$ e tome uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma(0) = p$ and $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0} = X$. Considere o campo vetorial $u(t)$ ao longo de γ dado pelo transporte paralelo do vetor $u \in T_pM$ ao longo de γ e note que também podemos considerar $u(t)$ como uma curva em TM passando por u. Fixando

$$X = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad u(t) = \xi^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\gamma(t)} \quad e \quad \xi^j(0) = \xi^j$$

temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} u(t) \\ &= \frac{d\xi^j(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^j} + \xi^j(t)\frac{d\gamma^i}{dt}\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

que avaliado em $t = 0$ nos dá

$$\frac{d\xi^j(t)}{dt}\Big|_{t=0} = -\xi^k X^i \Gamma_{ik}^j(p).$$

Com isso, o vetor $\bar{X}_u$, chamado de ***levantamento horizontal*** de X em (p,u), tangente à $u(0)$ é escrito em coordenadas como

$$\bar{X}_u = (x^i, \xi^i, X^i, -\xi^k X^j \Gamma_{jk}^i).$$

Definição 3 *O subespaço $\mathcal{H}_{(p,u)}$ de todos os levantamentos horizontais de vetores de T_pM em u é dado por*

$$\mathcal{H}_{(p,u)} \coloneqq \{(x^i, \xi^i, X^i, -\xi^k X^j \Gamma_{jk}^i) \,|\, (p,u) = (x^i, \xi^i),\ (X^i) \in \mathbb{R}^m\}$$

*e é chamado de **subespaço horizontal** de $T_{(p,u)}TM$.*

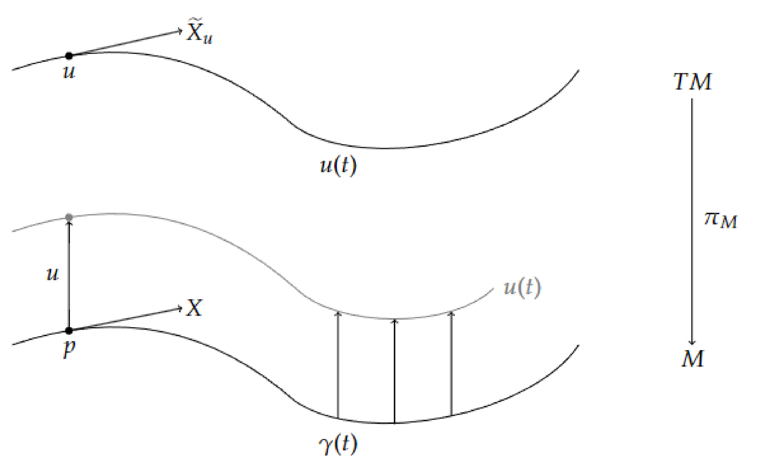

FIGURA 1: *Levantamento horizontal de um vetor $X \in T_pM$.*

Proposição 4 *As aplicações*

$$\begin{array}{l} \iota_{(p,u)} : \mathcal{V}_{(p,u)} \to T_pM \\ (x^i, \xi^i, 0, \eta^i) \mapsto (x^i, \eta^i) \end{array} \quad e \quad \begin{array}{l} T_{(p,u)}\pi_M|_{\mathcal{H}_{(p,u)}} : \mathcal{H}_{(p,u)} \longrightarrow T_pM \\ (x^i, \xi^i, X^i, -\xi^k X^j \Gamma_{jk}^i) \longmapsto (x^i, X^i) \end{array}$$

são isomorfismos e $T_{(p,u)}TM = \mathcal{V}_{(p,u)} \oplus \mathcal{H}_{(p,u)}$.

Definição 4 *Dado $\eta \in T_{(p,u)}TM$, sejam η^v, η^h suas partes vertical e horizontal respectivamente. Dado $(p,u) \in T_{(p,u)}TM$, definimos a aplicação linear*

$$\begin{aligned} K_{(p,u)} : T_{(p,u)}TM &\to T_pM \\ \eta &\mapsto \iota_{(p,u)}(\eta^v). \end{aligned}$$

*A aplicação K é chamada de **mapa de conexão** da conexão de Levi-Civita de M.*

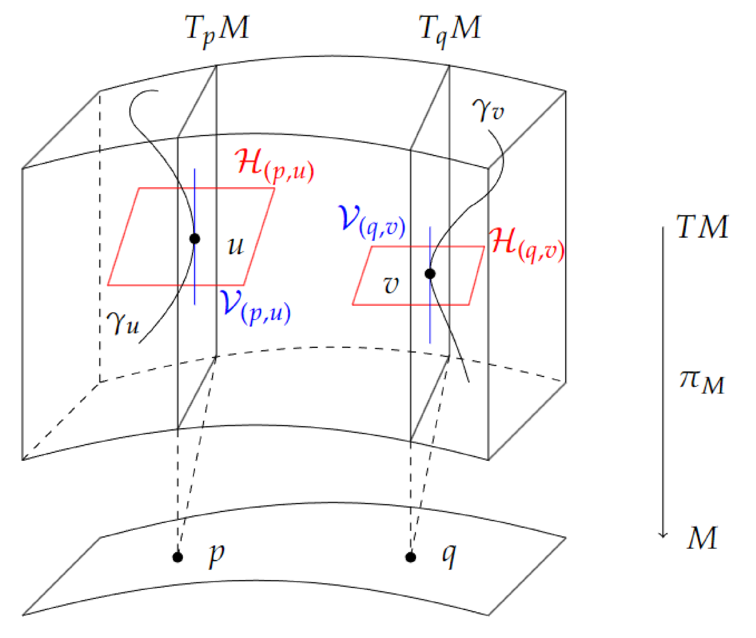

FIGURA 2: *Subespaços horizontal (vermelho) e vertical (azul).*

Definição 5 *A **métrica de Sasaki** g_s é uma métrica natural de TM dada por*

$$g_s(\eta, \xi) = g(K(\eta), K(\xi)) + g(T\pi_M(\eta), T\pi_M(\xi)),$$

onde $\eta, \xi \in TTM$.

3. Energia de Dirichlet

Trataremos a energia **apenas** no contexto de campos vetoriais, vistos como aplicações $X : (M, g) \to (TM, g_s)$.

Definição 6 *O **funcional energia**, também conhecido como a **energia de Dirichlet**, é o mapa $\mathcal{E} : \mathfrak{X}(M) \to [0, \infty)$ dado por*

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{2}\int_M ||TX||^2 \omega_g,$$

onde ω_g é a forma volume dada pela métrica g e $||TX||^2 = tr_g(X^*g_s)$ é a norma de Hilbert-Schmidt de TX.

Note que, considerando $Z_i = TX(E_i)$

$$\begin{aligned} tr_g(X^*g_s) &= \textstyle\sum_i g(T\pi(Z_i), T\pi(Z_i)) + g(K(Z_i), K(Z_i)) \\ &= m + \textstyle\sum_i g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X). \end{aligned}$$

Proposição 5 *Para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, a energia de Dirichlet é igual à*

$$\mathcal{E}(X) = \frac{m}{2} vol(M) + \frac{1}{2}\int_M ||\nabla X||^2 \omega_g,$$

onde $vol(M) = \int_M \omega_g$ e $||\nabla X||^2 = \sum_i g(\nabla_{E_i}X, \nabla_{E_i}X)$, para $\{E_1, \cdots, E_m\}$ referencial local ortonormal de M.

Lema 1 *Para todo campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, a energia de Dirichlet é igual à*

$$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{2}\int_M tr(L_X)\omega_g,$$

onde $L_X = Id + (\nabla X)^t \circ \nabla X$.

Teorema 1 *([3]) Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *X é uma aplicação harmônica de (M, g) para (TM, g_s);*
2. *X é um mínimo absoluto do funcional energia;*
3. *X é paralelo, i.e., $\nabla X = 0$.*

Teorema 2 *([5]) Dados $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ e $\{E_1, \cdots, E_m\}$ referencial local ortonormal de M, as afirmações abaixo são equivalentes:*

1. *X é uma aplicação harmônica de (M, g) para (T^1M, g_s);*
2. *X é um ponto crítico do funcional energia $\mathcal{E}|_{\mathfrak{X}^1(M)}$;*
3. *$\Delta_g(X) = ||\nabla X||^2 X$.*

Ou seja, encontrar um ponto crítico do funcional energia é o mesmo que encontrar um autovetor do laplaciano de conexão.

Exemplos:

i.) Campos de Hopf em $\mathbb{S}^{2n+1}$ são pontos críticos da energia para todo $n \geq 1$;

ii.) Campos vetoriais $X : (M, g) \to (TM, g_s)$ que são também imersões isométricas.

Referências

[1] Dragomir, S.; Perrone, D.; **Harmonic Vector Fields: Variational Principles and Differential Geometry**. Elsevier, 2011.

[2] Hélein, F.; Wood, J. C.; **Harmonic maps**. Handbook of Global Analysis, Elsevier, 417-491, 2008.

[3] Ishihara, T.; **Harmonic Sections of Tangent Bundles**. J. Math. tokushima Univ. 13, 23-27, 1979.

[4] Sakai, T.; **Riemannian Geometry**. American Mathematical Society, 1996.

[5] Wiegmink, G..; **Total Bending of Vector Fields on Riemannian Manifolds**. Math. Ann. 303, 325-344, 1995.

Apoios:

[1] Mestrando em Matemática na Universidade Federal do ABC. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Contato: g.vitor@ufabc.edu.br

[2] Universidade Federal do ABC. Contato: icaro.goncalves@ufabc.edu.br

[3] Universidade Federal do ABC. Contato: gozzi.f@ufabc.edu.br