XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Automorfismos Irredutíveis de Grupos Livres:

Aplicações de Trilhos de Trem Estáveis e o Rank do subgrupo dos Fixos

Santos, Vinícius[1]; Bertolini, Marcel[2].

Resumo: *Este trabalho é conseguinte a produção de minha dissertação sob orientação do Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini. Neste trabalho estudamos automorfismos irredutíveis de grupos livres finitamente gerados à luz de M. Bestvina e M. Handel (1992) e V. Santos (2024). Mais especificamente, estuda-se um algoritmo capaz de produzir para cada automorfismo (exterior) de* F_n *um representante topológico chamado aplicação de trilho de trem. Desse modo, uma vez conhecido o algoritmo de Bestvina-Handel, este trabalho discute os próximos passos na compreensão das aplicações de trilhos de trem: caminhos de Nielsen e estabilidade destas aplicações. Cujo principal objetivo é obter resultados acerca do conjunto de pontos fixos* $Fix(\Phi)$ *de automorfismos* $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ *irredutíveis.*

Palavras-chave: *Automorfismos Irredutíveis de Grupos Livres. Algoritmo de Bestvina-Handel. Aplicacões de Trilhos de Trem. Caminhos de Nielsen. Subgrupo dos fixos.*

1. Noções Essenciais

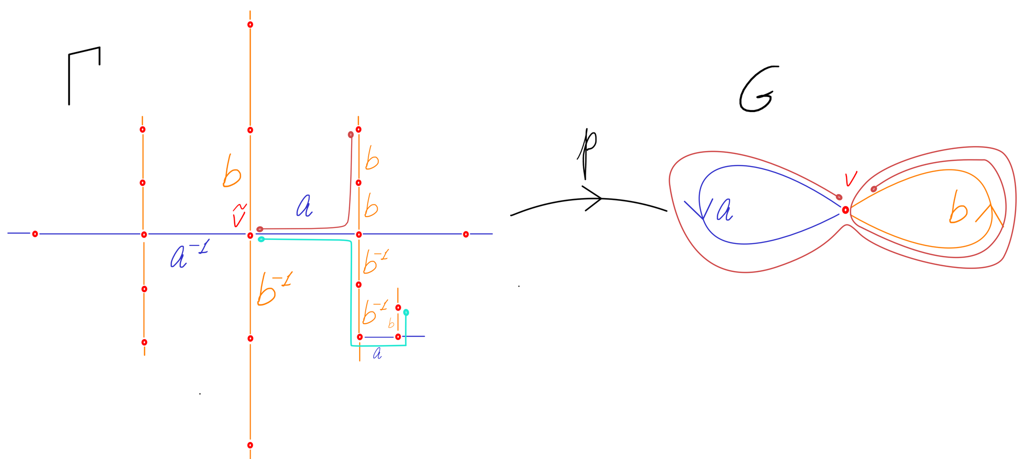
Definição 2.1 ***(Automorfismo exterior irredutível)*** *Um automorfismo exterior* $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(X)$ *é irredutível se toda representação topológica* $f : G \to G$ *é irredutível, com* $\mathcal{V}_{val1} = \emptyset$ *e* $\nexists \mathcal{F} \supset f(\mathcal{F})$ *floresta.*

Definição 2.2 ***(Aplicação de trilho de trem)*** *Uma representação topológica* $f : G \to G$ *é uma aplicação de trilho de trem se* $\forall k > 0, f^k|_{G \setminus \mathcal{V}}$ *é localmente injetiva.*

Teorema 2.1 (do trilho de trem) *Todo* $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$ *irredutível é topologicamente representado por uma aplicação de trilho de trem.*

2. Levantamentos e Conjugações

Exemplo 3.1 *Considere* $f : G \to G$ *representante trivial*[3] *de* Φ *dado por* $a \mapsto ab^2$ *e* $b \mapsto ab^{-2}ab$ *e a marcação* $\tau = id_{R_2}$*. Assim, existe* $(f_v)_* = (f)_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(R_2, v))$ *determinado por* $(f)_*(\langle\alpha\rangle) = \langle f(\alpha)\rangle$*,* $v \in G$ *caminho trivial. Seja* $p : \Gamma \to G$ *o recobrimento universal e* $T = \langle ab^2, ab^{-2}ab\rangle$ *o grupo de transformações de recobrimento de* Γ*.*



Neste contexto, $p(\tilde{v}) = v$*, ie,* $\tilde{v} \in \Gamma$ *é o levantamento de* v*. Assim, pode-se concluir a identificação de* $T \cong \pi_1(R_2, v)$*. Desse modo, para todo laço* $u : [0,1] \to G$ *em* v *existe* $\tilde{u} : [0,1] \to \Gamma$ *levantamento de* u *com* $\tilde{u}(0) = \tilde{v}$*. Seja* $\tilde{f}_u : \Gamma \to \Gamma$ *o levantamento de* $f : G \to G$ *tal que* $\tilde{f}_u(\tilde{v}) = \tilde{u}(1)$*. Assim,* $(f)_*$ *é identificado com* $(\tilde{f}_u)_* \in \mathrm{Aut}(T)$ *dado por* $(\tilde{f}_u)_*(t) = \tilde{f}_u t \tilde{f}_u^{-1}$*. Agora observe que de* $\tilde{f}_*(t)(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(t(\tilde{v}))$*, obtemos se a transformação for* $t \equiv a$ *e* $t \equiv b$*:* $ab^2(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(a(\tilde{v}))$ *e* $ab^{-2}ab(\tilde{f}(\tilde{v})) = \tilde{f}(b(\tilde{v}))$*, respectivamente. Mas o que podemos falar sobre* $Fix(\tilde{f}_*)$*? A menos que testemos concatenações, as conclusões dadas acima são o máximo.*

Proposição 3.1 *Se* $\tilde{f} : \Gamma \to \Gamma$ *é um levantamento de uma representação topológica* $f : G \to G$*, e* $Rank(Fix(\tilde{f}_*)) \geq 2$*, então* $Fix(\tilde{f}) \neq \emptyset$*.*

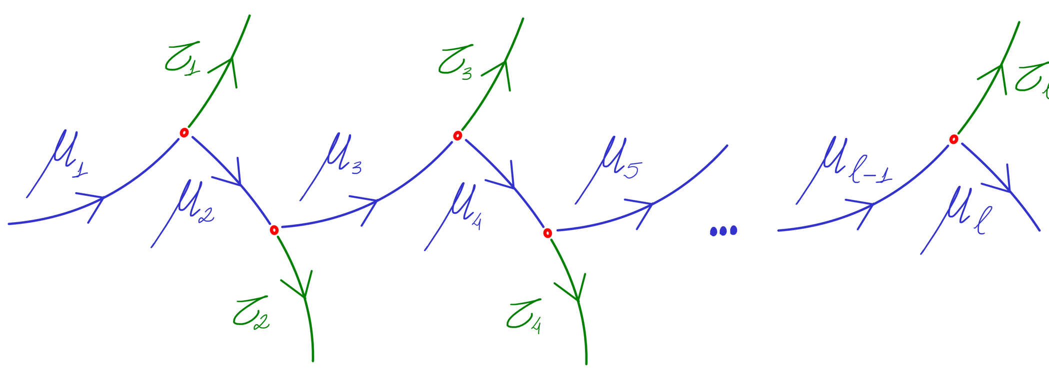
Corolário 3.1 *Seja* $f : G \to G$ *representação topológica de* $\mathcal{O} \in \mathrm{Out}(F_n)$ *determinada por* $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$*. Se* $Rank(Fix(\Phi)) \geq 2$*, então* Φ *é conjugado ao* $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$ *definido pelo caminho trivial* y*, para algum* $y \in Fix(f)$*.*

3. Caminhos de Nielsen e Estabilidade

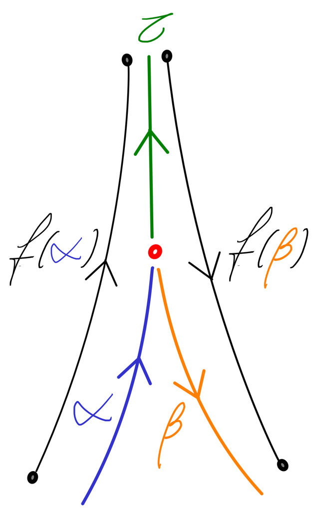
A partir daqui consideraremos sempre $f : G \to G$ representante de trilho de trem irredutível de $\mathcal{O}$ e normalizado da seguinte forma. Sejam M a matriz de transição de f e λ o autovalor (de Perron-Frobenius de M) associado a $\mathcal{O}$. Assim, G é um grafo com uma métrica a qual a i-ésima aresta é isométrica ao intervalo de comprimento v_i, onde v_i é a i-ésima coordenada do vetor positivo $\vec{v}$ com a propriedade $\vec{v}M = \lambda\vec{v}$.

Para os nossos objetivos, a preocupação se $\lambda = 1$ será considerada apenas no Teorema 5.2. Então, a partir de agora também consideraremos $\lambda > 1$.

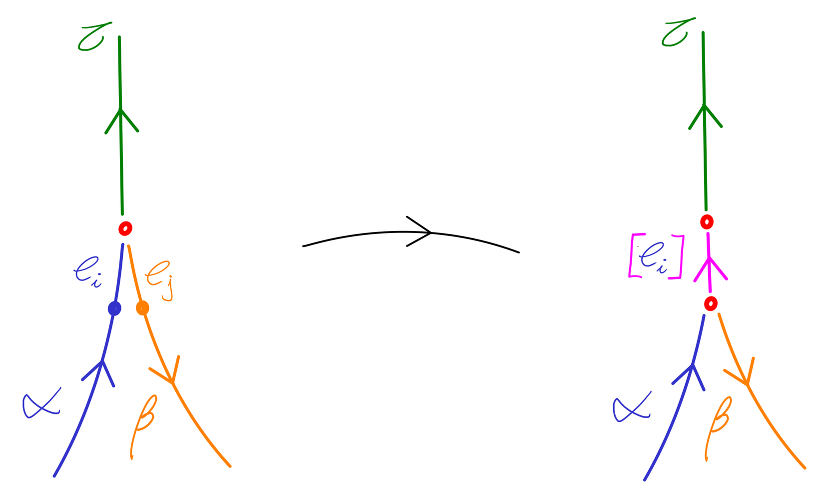
Definição 4.1 *Um caminho* ρ *entre* $x, y \in Fix(f)$ *é um caminho de Nielsen se* $f(\rho) \simeq \rho$ *rel.*$\{0,1\}$*. Se o caminho* $\rho \neq \rho_1\rho_2$*,* ρ_i *subcaminhos de Nielsen, então* ρ *é dito indivisível. Notação:* N_G^i *é o conjunto dos caminhos de Nielsen indivisíveis em* G*.*



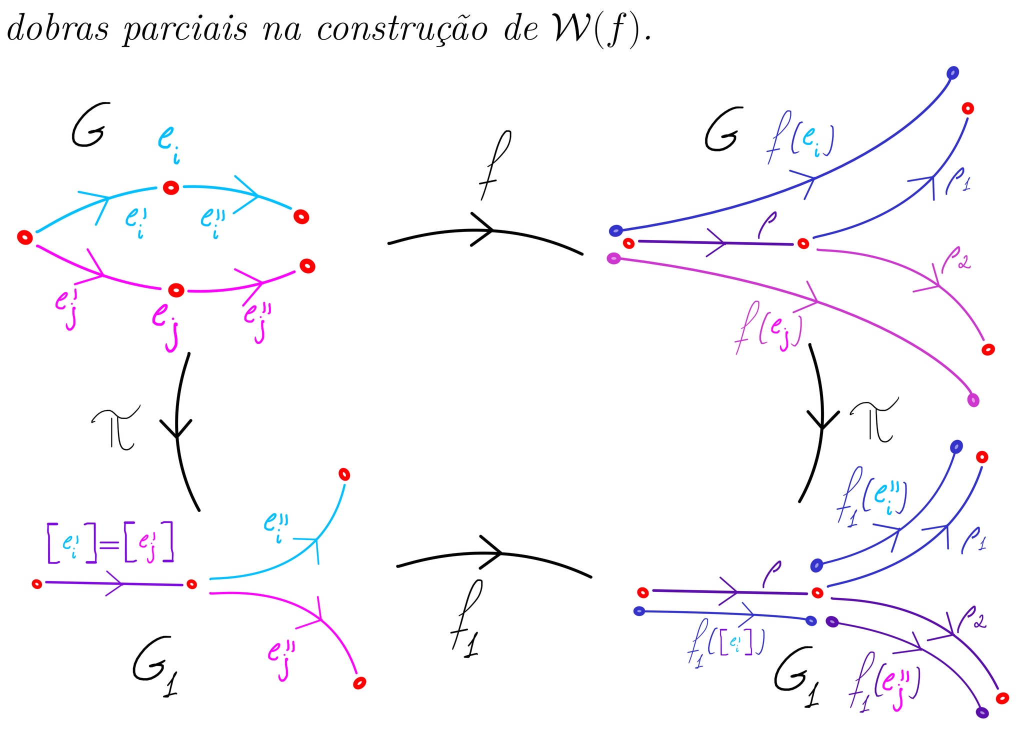
Proposição 4.1 *Um* $\rho \in N_G^i$ *contém exatamente uma volta ilegal. Em particular, existem únicos caminhos legais não triviais* α*,* β *e* τ *tais que* $\rho = \alpha\beta$*,* $f(\alpha) = \alpha\tau$*,* $f(\beta) = \tau\beta$ *e tal que* $\{\alpha, \beta\}$ *é uma volta não degenerada.*



Definição 4.2 *O conjunto* $\mathcal{W}(f)$ *é constituído pelos representantes irredutíveis de trilhos de trem os quais podem ser obtidos por uma sequência finita de dobras de caminhos de Nielsen indivisíveis.*



Definição 4.3 *Dizemos que* $f : G \to G$ *é estável se não ocorrem dobras parciais na construção de* $\mathcal{W}(f)$*.*



Proposição 4.2 ***(Propriedades Características da Dobra Parcial)*** *É aplicada sobre arestas originadas em vértice comum e identificadas pela representação topológica* $(f : G \to G)$*. Após uma dobra parcial o representante topológico resultante* $(f_1 : G_1 \to G_1)$ *é irredutível e seu autovalor de Perron-Frobenius é tal que* $\lambda_1 = \lambda$*.*

4. Rank do subgrupo dos fixos

Teorema 5.1 *Existe* $f : G \to G$ *representante topológico trilho de trem irredutível de* $\mathcal{O}$*;* $\#N_G^i \leq 1$*, a menos de orientação reversa. Se* $\rho(0) = \rho(1)$*,* $\rho \in N_G^i$*, então* ρ *é um laço que atravessa cada aresta de* G *exatamente duas vezes.*

Teorema 5.2 (do Rank dos fixos) *Se* $\Phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$ *é irredutível, então* $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$*.*

Dem.: Suponha spg $n > 1$. Estudemos os casos para o autovalor de Perron-Frobenius λ associado à matriz de transição M do representante topológico $f : G \to G$. Se $\lambda = 1$, então M é matriz de permutação e f é homeomorfismo. Como M é irredutível, f não pode fixar arestas. Assim, para qualquer $y \in \mathrm{Fix}(f)$ o automorfismo $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$, determinado por f e o caminho trivial em y, tem subgrupo fixo trivial. Pelo Corolário 3.1 obtemos o que queríamos. Suponha $\lambda > 1$ e $f : G \to G$ representante de trilho de trem irredutível de $\mathcal{O}$, então pelo Teorema 5.1, $\#N_G^i \leq 1$. Seja $y \in Fix(f)$ e $f_* \in \mathrm{Aut}(\pi_1(G, y))$ determinado por f e y caminho trivial. Desse modo, todo $\langle\alpha\rangle \in Fix(f_*)$ é representado por um caminho de Nielsen em y a si mesmo. Então se: Φ é conjugado ao f_*, segue que $Rank(Fix(f_*)) \leq 1$, logo $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$; Φ não é conjugado ao f_*, pela contrapositiva do Corolário 3.1, $Rank(Fix(\Phi)) \leq 1$.

■

Agradecimentos: A Deus, à minha família, aos meus amigos, aos meus professores e ao IME-USP. À XI Bienal de Matemática pela oportunidade. E, em especial, ao meu ex-orientador, Prof. Dr. Marcel Vinhas Bertolini, por excelência e paciência. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

[1] BESTVINA, M.; HANDEL, M.. **Train tracks and automorphisms of free groups**. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 135, No. 1 (Jan., 1992), pp. 1-51.

[2] HATCHER, A. **Algebraic Topology**. Cambridge University Press, 2002.

[3] STALLINGS, J.R.. **Topology of finite graphs**. Inventiones mathematicae, 71 (3): 551-565, 1984.

[4] SANTOS, V. L. dos.. **Automorfismos Irredutíveis de Grupos Livres: O algoritmo de Bestvina-Handel**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Pará. Belém, p.174. 2024.

Apoios:

[1]Programa de Matemática Aplicada, IME-USP
[2]Faculdade de Matemática, ICEN-UFPA

[3]Retomar [4] para compreender representações topológicas (p.38), aplicação de trilho de trem (p.46) e operações que compõem o algoritmo pro caso irredutível (p.52).