LOGO DA SUA INSTITUIÇÃO

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Primeiro exemplo de Bases de Gröbner

SANTOS, Victor[1]; TEIXEIRA, Thiago[2] e SOUZA, Jairo[3].

Resumo: *Este trabalho explora as propriedades fundamentais das Bases de Gröbner, destacando principalmente um algoritmo que facilita sua identificação. Serão também apresentados diversos tipos de ordens monomiais, elucidando como a escolha de uma ordem específica pode influenciar se um conjunto de polinômios constitui ou não uma Base de Gröbner de um ideal.*

Palavras-chave: *Bases de Gröbner, Ordem Monomial, Cúbica torcida.*

1. Introdução

As Bases de Gröbner são uma ferramenta essencial na álgebra comutativa, amplamente reconhecida por suas robustas capacidades computacionais. Elas são utilizadas para resolver uma gama diversa de problemas matemáticos complexos, que incluem desde a determinação dos elementos de um ideal até a solução de sistemas de equações polinomiais e análise de problemas de parametrização. Essas bases são particularmente valiosas por simplificar e tornar computacionalmente acessíveis soluções que, de outra forma, seriam extremamente desafiadoras de se obter.

Neste trabalho, exploraremos duas variações da ordem lexicográfica, considerando o peso de cada variável. Investigaremos como a escolha da ordem monomial pode influenciar a determinação de se um conjunto de polinômios constitui ou não uma Base de Gröbner de um ideal.

2. Resultados obtidos

Definição 3.1 *Uma ordem monomial $>$ em $k[x_1, \ldots, x_n]$ é uma relação em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, ou no conjunto de monômios x^α (com $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$), que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $>$ é uma ordem total (ou linear) em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

(ii) Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, então $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

(iii) $>$ é uma boa ordem em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, significando que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ possui um menor elemento com respeito a $>$.

Considere, por exemplo, o polinômio $f = 8xy^2z + 4z^2 - 8x^3 + 7x^2z^2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$. Reordenando os termos de acordo com diferentes ordens, temos:

- Com respeito à ordem lexicográfica: $f = -8x^3 + 7x^2z^2 + 8xy^2z + 4z^2$.
- Com respeito à ordem lexicográfica graduada: $f = 7x^2z^2 + 8xy^2z - 8x^3 + 4z^2$.
- Com respeito à ordem lexicográfica graduada reversa: $f = 8xy^2z + 7x^2z^2 - 8x^3 + 4z^2$.

Lema 3.1 *Seja o ideal monomial $I = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A \rangle$. O monômio x^β está contido em I se, e somente se, x^β é divisível por x^α para algum $\alpha \in A$.*

Definição 3.2 *Dada uma ordem monomial, um subconjunto finito $G = [g_1, \ldots, g_t]$ de um ideal é uma **base de Gröbner** (ou **base padrão**) se:*

$$\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Teorema 3.1 (Critério de Buchberger) *Seja I um ideal do anel de polinômios. Então, a base $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ é uma base de Gröbner para I se, e somente se, para todos os pares i, j (com $i \geq j$), o resto da divisão de $S(g_i, g_j)$ por G (listadas em alguma ordem) é zero.*

3. Conclusão

A cúbica torcida é um exemplo de curva algébrica no espaço tridimensional, definida pela intersecção das superfícies $y = x^2$ e $z = x^3$, e representada pelas equações paramétricas (t, t^2, t^3) para $t \in \mathbb{R}$. Este exemplo serve como uma introdução ao estudo de singularidades e geometria algébrica.

O ideal $I = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ da cúbica torcida, na ordem lexicográfica onde $x > y > z$, não forma uma base de Gröbner. Para demonstrar isso, consideremos $f_1 = x^2 - y$ e $f_2 = x^3 - z$ e apliquemos o algoritmo de Buchberger para a base de $I = \langle f_1, f_2 \rangle$. Através do polinômio S, é possível construir:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \frac{\mathrm{mmc}(x^2, x^3)}{x^2} f_1 - \frac{\mathrm{mmc}(x^2, x^3)}{x^3} f_2 \\ &= x(x^2 - y) - (x^3 - z) \\ &= -xy + z \end{aligned}$$

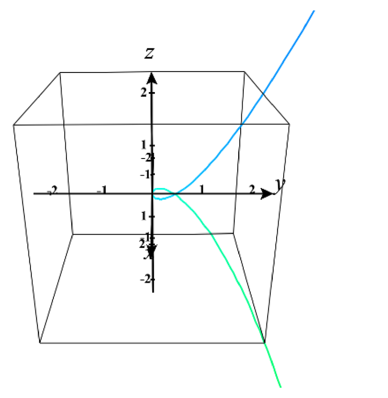
O polinômio gerado, $-xy + z$, pertence a I, mas $xy \notin \langle \mathrm{LT}(f_1), \mathrm{LT}(f_2) \rangle$. Portanto, (f_1, f_2) não é uma base de Gröbner para I nesta ordem. Uma base de Gröbner válida para I na ordem lexicográfica incluiria:

$$\{x^2 - y, x^3 - z, xy - z, xz - y^2\}$$

Ao considerar a ordem lexicográfica com pesos $y > z > x$, e redefinindo $f_1 = y - x^2$ e $f_2 = z - x^3$:

$$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= zy - zx^2 - yz + yx^3 \\ &= yx^3 - zx^2 \end{aligned}$$

O resto da divisão de $yx^3 - zx^2$ por (f_1, f_2) é zero, confirmando pelo critério de Buchberger que (f_1, f_2) é uma base de Gröbner para I nesta ordem monomial.



Referências

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., **Ideals, Varieties, and Algorithms**, 3nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2007.

Apoios:

CAPES CNPq FAPESP

[1]aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).
[2]aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).
[3]Prof. Orientador IMTec - Universidade Federal de Catalão(UFCAT).