O Grau de imperfeição em reticulados retangulares de dimensão dois

Santos, Veralucia Carvalho dos, vcslucia@gmail.com[1]
Strapasson, João Eloir, strapass@unicamp.br[2]

Resumo

O presente trabalho procura reticulados quase perfeitos segundo a métrica euclidiana em ambientes reticulados retangulares de dimensão dois. Iniciamos com a apresentação dos conceitos relacionados à teoria de reticulados e à teoria de códigos, em particular, aos códigos em reticulados. Discutimos também os limites, bem como as densidades de empacotamento e cobertura, e os raio de empacotamento e cobertura, considerando ambientes reticulados. Em seguida, apresentamos o grau de imperfeição de um reticulado e o algoritmo utilizado para encontrar códigos quase perfeitos em ambientes reticulados retangulares na dimensão dois. É possível encontrar códigos quase perfeitos em outros ambientes reticulados que não sejam apenas o Z^n.

Descrição

O estudo de reticulados possui diversas aplicações na tecnologia e comunicação, como no empacotamento de reticulados. Neste trabalho, busca-se classificar reticulados quase perfeitos em ambientes retangulares de dimensão 2, utilizando o algoritmo de STRAPASSON (SANTOS, 2024) para encontrar os raios que resultam em códigos quase perfeitos. O estudo apresentado diferencia-se de outros ao focar em reticulados quase perfeitos em reticulados ambientes retangulares de dimensão 2, em vez de considerar apenas o ambiente Zn. O trabalho envolveu o estudo da teoria de reticulados, teoria de códigos e resultados computacionais, ressaltando a importância do algoritmo na busca por códigos quase perfeitos. É possível aprimorar o algoritmo para melhorar as soluções em outras dimensões.

Definição 1. Definimos o conjunto das distâncias em Z^n, na métrica lp, com $L \subset Z_n$ sendo $D_{p,n} = \{ d \in R$ tal que, existe $z \in Z_n$ com $dp(z, n) = \|Z\|_p \}$.

Definição 2. A distância entre dois elementos $x, y \in D_{p,n} \in L_a$ com $x \leqslant y$, é definida como sendo $d(x, y) = \#(D_{p,n}(L_a) \cap [x, y))$.

Definição 3. Dizemos que um reticulado $L \subset La$ tem grau de imperfeição t se a distância entre o raio de empacotamento e de cobertura for igual a t, ou seja, $d(r_p, R_p) = t$.

Observação 4. Quando o raio de empacotamento e o raio de cobertura forem iguais temos que a distância é zero, isto é, t=0 logo o reticulado é perfeito. Agora, o caso em que o reticulado é quase perfeito, os raios de empacotamento e cobertura são consecutivos, e a distância entre eles é 1.

Teste de injetividade e sobrejetividade

O teste da injetividade é baseado no teorema proposto por Horak and Albdaiwi. Este teste é importante para o desenvolvimento do Algoritmo que será apresentado.

Teorema 1. Seja $P \subset Z^n$, tal que #P=m. Existe um reticulado que ladrilha Z^n pelo translado de P, se somente se, existir um grupo abeliano G de ordem m e um homomorfismo $\Phi : Z^n \rightarrow G$ tal que a restrição $\Phi|_P$ é uma bijeção.

O Corolário a seguir é uma releitura do Teorema 1, proposto por Horak and Albdaiwi.

Corolário 1. Seja $P \subset L_a$, tal que #P=m. Existe um reticulado que ladrilha L_a, pelo translado de P, se somente se, existir um grupo abeliano G de ordem m e um homomorfismo $\Theta : L_a \rightarrow G$ tal que a restrição $\Theta|_P$ é uma bijeção.

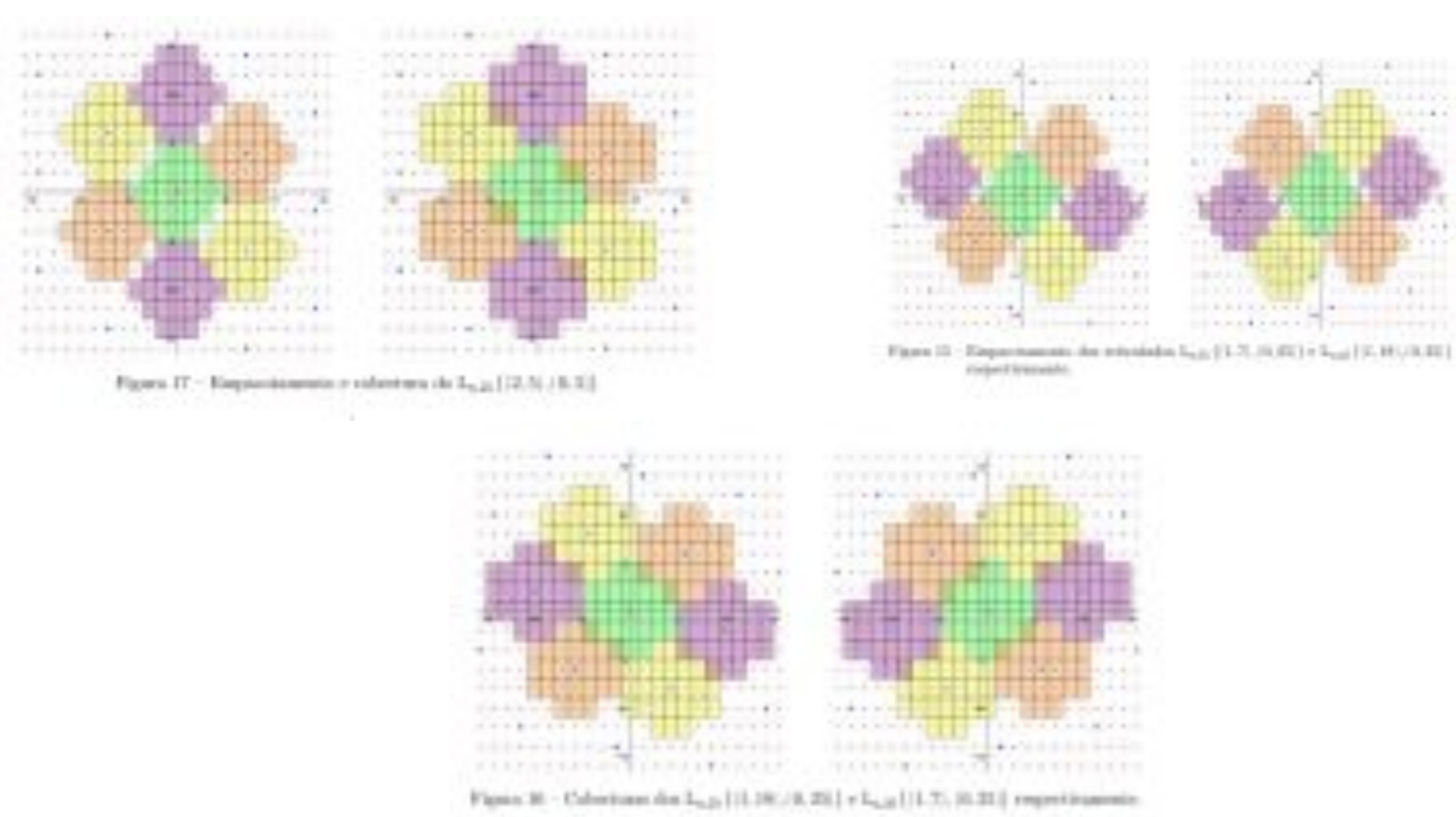
O Algoritmo está baseado nos testes de injetividade e sobrejetividade apresentados no Corolário 1 e no Teorema 1. Em que, o teste de injetividade faz a associação de cada reticulado $L \subset L_a$. Assim podemos encontrar os possíveis raios r, em que podemos achar quase perfeitos em L_a.

Dessa forma, os raios serão determinados pelo reticulado ambiente L_a, isso acontecerá até um determinado valor que depende da densidade.

Algoritmo - Buscar códigos perfeitos e quase-perfeitos

Códigos quase-perfeitos em reticulados retangulares de dimensão n=2

Temos que os reticulados com grau de imperfeição t = 1 são dois a dois equivalentes, por exemplo, {{1,7},{0, 25}} e {{1,18},{0, 25}} são equivalentes e ambos não são equivalentes ao reticulado {{5,2},{0, 5}}, como podemos observar nas figuras abaixo.



Referências

S. I. R. Costa, F. Oggier, et al. Lattices Applied to Coding for Realiable and Secure Communications. Springer, 2017.

J. E. Strapasson, G. C. Jorge, A. Campello, and S. I. R. Costa, Quasi-perfect codes in the lp metric, Computational and Applied Mathematics, vol. 37, pp. 852–866, 2018.

J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer Verlag, 3 ed., 1998.

N. M. L. B. G. Morais, O grau de imperfeição em sub-reticulados inteiro . Campinas, SP. s.n 2015.