X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Aplicando Bases de Gröbner a Problemas de Otimização

TEIXEIRA, Thiago[1]; SANTOS, Victor[2] e SOUZA, Jairo [3]

Resumo:*Este trabalho mostra uma das diversas aplicações das bases de Gröbner em ideais de anéis de polinômios de múltiplas variáveis. Abordamos um problema de otimização utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Esse método foi aplicado para determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função polinomial, sujeita às restrições de uma variedade algébrica, resultando em um sistema de equações polinomiais cuja resolução pode ter um custo computacional muito grande. A utilização das bases de Gröbner, com uma ordem monomial adequada, transforma este sistema em um conjunto de equações equivalentes mais simples, onde as soluções podem ser eficientemente identificadas.*

Palavras-chave:*Álgebra, Bases de Gröbner, Polinômios, Multiplicadores de Lagrange.*

1. Introdução

As Bases de Gröbner são uma ferramenta poderosa na álgebra comutativa, conhecida por suas propriedades computacionais eficazes. Elas são capazes de resolver uma variedade de problemas matemáticos complexos, desde a determinação dos elementos de um ideal até a solução de sistemas de equações polinomiais e questões de parametrização. Essas bases são fundamentais para simplificar e computar soluções que, de outra forma, seriam inacessíveis devido à sua complexidade.

Neste trabalho, aplicamos as Bases de Gröbner a problemas de otimização nos quais tanto a função objetivo quanto as restrições são formuladas por polinômios. A utilização de Bases de Gröbner permite uma eficiente decomposição e resolução desses sistemas polinomiais, resultando em um sistema equivalente com complexidade computacional significativamente reduzida. Esta abordagem não apenas simplifica o processo de solução, mas também melhora a eficiência ao lidar com grandes sistemas de equações polinomiais.

2. Definições e Teoremas

Definição 3.1 *Uma ordem monomial $>$ em $k[x_1,\dots,x_n]$ é qualquer relação sobre $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, aplicável ao conjunto de monômios $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $>$ é uma ordem total em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

(ii) Se $\alpha > \beta$ e $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, então $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$.

(iii) $>$ é uma boa ordem em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, significando que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ possui um menor elemento sob $>$.

A ordem que iremos usar para resolver nosso problema de otimização será a ordem lexicográfica.

Definição 3.2 (Ordem lexicográfica) *Seja $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ e $\beta = (\beta,\dots,\beta) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. Dizemos que $\alpha >_{lex} \beta$, se no vetor diferença $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ o menor valor positivo à esquerda é diferente de zero. Escrevemos $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ se $\alpha >_{lex} \beta$.*

Alguns exemplos:

1. $(1,2,0) >_{lex} (0,3,4)$
2. $(3,2,4) >_{lex} (3,2,1)$
3. $(1,0,0) >_{lex} (0,1,0) >_{lex} (0,0,1)$

Como generalização do exemplo 3 temos que $x_1 >_{lex} x_2 >_{lex} \cdots >_{lex} x_r$ em $k[x_1,\dots,x_n]$.

Proposição 3.1 *A ordem lexicográfica em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ é uma ordem monomial.*

Estabelecida uma ordem monomial em $k[x_1,\dots,x_n]$, teremos um algorítimo de divisão de um polinômio $f(\bar{x})$ por um número finito de polinnômios $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}),\dots,f_l(\bar{x})$ retornando quocientes e um resto.

Teorema 3.1 (Teorema das bases de Hilbert) *Todos os ideais $I \subset k[x_1,\dots,x_n]$ tem um conjunto gerador finito. Isto é, $I = \langle g_1,\dots,g_t\rangle$ para qualquer $g_1,\dots,g_t \in I$.*

Definição 3.3 *Dada uma ordem monomial, um conjunto finito $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ de polinômios de um ideal I é uma base de Gröbner se $\langle \mathrm{LT}(g_1),\dots,\mathrm{LT}(g_t)\rangle = \langle \mathrm{LT}(I)\rangle$.*

A partir desta próxima definição, será estabelecida a ideia de como construir essa base de novos polinômios. Essa base consolidará todo o conjunto finito a ser construído, conforme estipulado pelo Teorema das Bases de Hilbert.

Definição 3.4 *Seja $f,g \in k[x_1,\dots,x_n]$ os polinômios diferentes de zero.*

*(i) Se o multigrau$(f) = \alpha$ e o multigrau$(g) = \beta$, então seja $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, onde $\gamma_i = \max(\alpha,\beta_i)$ para cada i. Chamamos x^γ de **menor multiplo comum** de $LM(f)$ e $LM(g)$, escrito $x^\gamma = MMC(LM(f), LM(g))$.*

(ii) O S-Polinômio de f e g é a combinação

$$S(f,g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)}\cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}\cdot g$$

.

A partir dessa definição, serão construídos todos os novos polinômios. Dessa forma, ao eliminar os termos líderes, será possível mudar a disposição dos polinômios e, eventualmente, reduzir a dimensão do polinômio de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^{n-i}$.

Teorema 3.2 (Critério de Buchberger) *Seja I um ideal em um anel de polinômios. Um conjunto $G = \{g_1,\dots,g_t\}$ é uma base de Gröbner para I se, e somente se, para todos os pares i,j com $i \geq j$, o resto da divisão de $S(g_i,g_j)$ por G (listados em alguma ordem) é zero.*

3. Exemplo

Inicialmente, o método de Lagrange é utilizado para encontrar máximos e mínimos de uma função $f(x,y,z)$ sujeita à restrição $g(x,y,z)=0$, permitindo determinar todos os valores de (x,y,z) e λ a partir da seguinte equação:

Exemplo: Seja o polinômio $x^4+y^2+z^2-1$, use multiplicadores de Lagrange para encontrar o ponto mais próximo determinar os pontos na superfície do polinômio, mais próximos do ponto $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$

Para encontrar o ponto, seja um função $f(x)$, que tenha forma da esfera, de centro $(1,1,1)$, usando o método de lagrange, em $f(x) = (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$, e com a restrição no polinômio, dado, segue então que. O primeiro passo é calcular as derivadas parciais de x, y e z para f e g:

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$$

$$2x-2 = \lambda 4x^3 \quad (1)$$

$$2y-2 = \lambda 2y \quad (2)$$

$$2z-2 = \lambda 2z \quad (3)$$

Utilizando o Critério de Buchberger, identificamos que cada polinômio do sistema pertence ao ideal $I = \langle -\lambda 4x^3+2x-2, -\lambda 2y+2y-2, \lambda 2z+2z-2, x^4+y^2+z^2-1\rangle$. A partir disso, computando com uma ordem lexicográfica, outros novos polinômios são gerados, simplificando o sistema para incluir apenas uma única variável.

$$64z^{10}-256z^9+304z^8+96z^7-471z^6+232z^5+176z^4-172z^3+4z^2+32z-8=0 \quad (4)$$

$$y-z=0 \quad (5)$$

$$8x-192y^2z^7+448y^2z^6-48y^2z^5-624y^2z^4+425y^2z^3+163y^2z^2-172y^2z+192yz^7-448yz^6+48yz^5+600yz^4-393yz^3-140yz^2+136yz-192z^9+640z^8-304z^7-1216z^6+1545z^5+338z^4-1368z^3+368z^2+312z-136=0 \quad (6)$$

$$\lambda - x^2+x-2y^2+2y-2z^2+2z=0 \quad (7)$$

A partir do primeiro sistema, um polinômio de uma única variável z foi gerado, permitindo calcular as raízes de z. Este polinômio de grau 10 pode ter até 10 raízes possíveis. Das raízes obtidas pela biblioteca de solução de polinômios 'solve.lib', apenas duas eram reais e as demais complexas. Com as raízes de z, procedemos à resolução das demais equações para encontrar y, x e λ.

Primeira solução real:

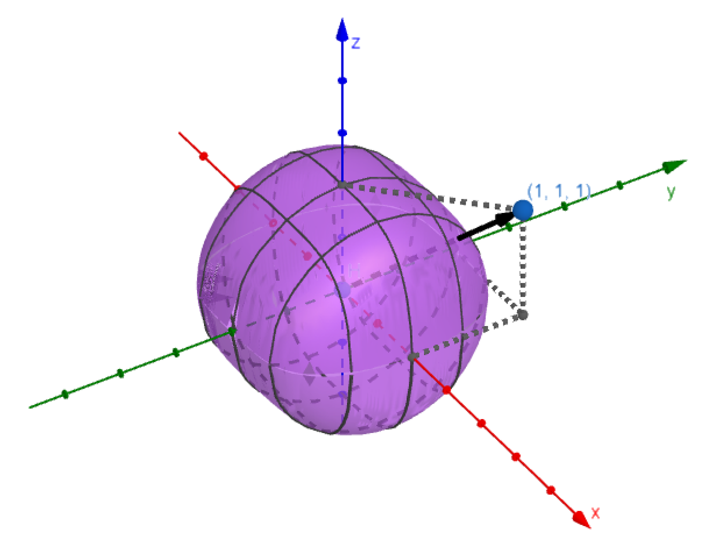
$$\lambda = 2.6038, \quad x = -0.686761, \quad y = -0.62352, \quad z = -0.62352$$

Segunda solução real:

$$\lambda = -0.575253, \quad x = 0.663676, \quad y = 0.634819, \quad z = 0.634819$$

$$f_1(-0.686761, -0.62352, -0.62352) = 8.116797,$$

$$f_2(0.663676, 0.634819, 0.634819) = 0.379828.$$



A partir dos resultados obtidos em f_1 e f_2, temos os candidatos a máximo e mínimo dentro de $f(x)$. Dessa maneira, ao avaliar os pontos, temos que $(0.663, 0.634, 0.634)$ é o ponto mais próximo de $(1,1,1)$ do polinômio $x^4+y^2+z^2-1=0$. E em contraste, o ponto $(-0.0686, -0.623, -0.623)$, é o ponto mais distante.

Referências

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D., **Ideals, Varieties, and Algorithms**, 3nd edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2007.

[2] STEWART, James. **Cálculo**: volume 2. 8ª 2 v. SÃO PAULO: Cengage Learning, 2016.

[3] GREUEL, G. M.; PFISTER, G.;SCHONEMANN, H.: **A Computer Algebra System for Polynomial Computations**. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2015).

Apoios:

[1]Aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão (UFCAT).
[2]Aluno de IC IMTec - Universidade Federal de Catalão (UFCAT).
[3]Prof. Orientador - IMTec Universidade Federal de Catalão (UFCAT).