

Aplicando a Teoria Espectral em Subclasses de Grafos Tripartido Completo

Gama, Simone¹;

Resumo: A teoria espectral de grafos é uma ferramenta poderosa para analisar as propriedades do grafo. Os polinômios característicos, os autovalores, que são as raízes do polinômio característico, fornecem informações sobre a conectividade, estabilidade e outras características estruturais importantes de um grafo. Este trabalho apresenta a determinação espectral do grafo tripartido completo, mais especificamente as subclasses $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$ para $i \geq 1$. Os polinômios característicos e os autovalores para $i = 1, 2, \dots, 8$ dessas subclasses são analisadas e definidas.

Palavras-chave: Teoria espectral de grafos, grafos tripartido completo, polinômio característico, autovalores.

1. Introdução

A teoria espectral em grafos tripartidos completos pode ser uma ferramenta matemática essencial para explorar e entender as propriedades estruturais desses grafos. Analisando o polinômio característico e seus autovalores, podemos obter informações estruturais valiosas sobre a conectividade, estabilidade e outras características importantes dos grafos tripartidos, o que tem ampla aplicação em diversas áreas da ciência e engenharia.

Definição 1 Um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto finito não-vazio onde $V(G)$ é um conjunto de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas. Cada elemento e no conjunto E é um par (i, j) que indica que o vértice i é adjacente ao vértice j (ou seja, são adjacentes, e a aresta e incide em i e j).

O grafo é dito não-direcionado quando os pares que representam as arestas são não-ordenados, isto é, $(i, j) = (j, i)$. A representação gráfica de um grafo consiste em pontos distintos do plano associados a cada vértice e, para cada aresta (i, j) , um segmento de reta conectando os pontos correspondentes aos vértices i e j .

Um grafo k -partido é um grafo cujos vértices podem ser particionados em k partes, onde quaisquer vértices em uma mesma parte são não-adjacentes entre si. Um grafo é k -partido completo se existe aresta entre todos os pares de vértices que estão em partes diferentes. No caso do grafo bipartido completo, o $k = 2$. No caso em que $k = 3$ de um grafo k -partido completo, o grafo é conhecido como **tripartido completo**.

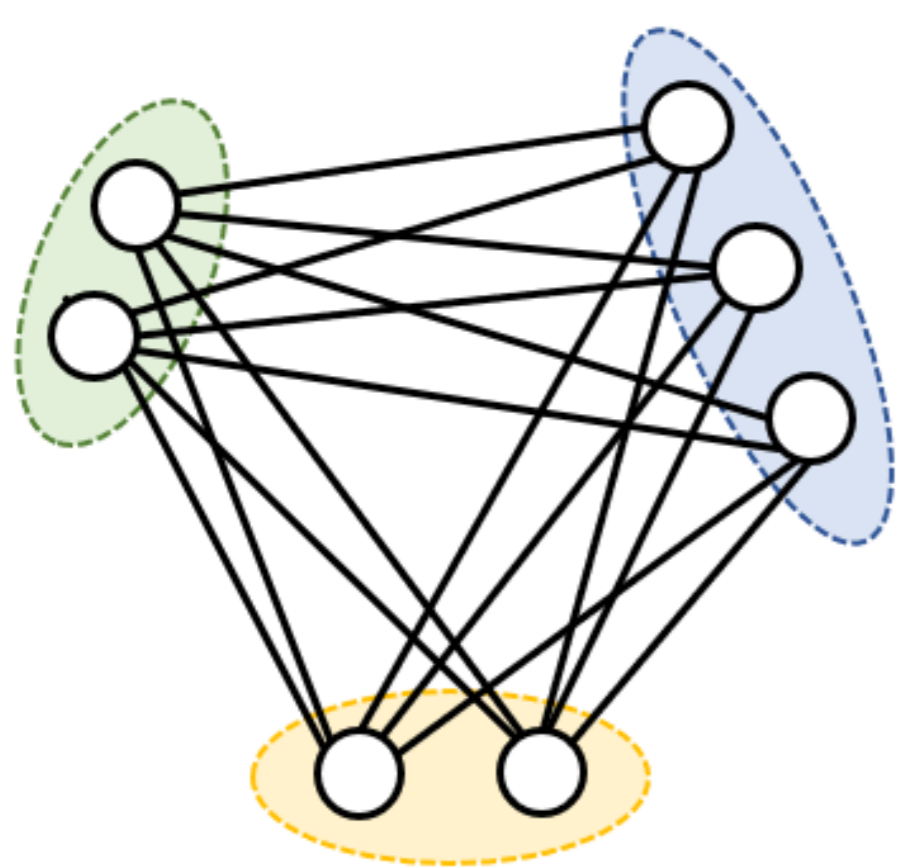


Figura 1. Grafo tripartido completo $K_{2,2,3}$.

Neste trabalho, iremos analisar o espectro dos grafos tripartido completo, mais especificamente as subclasses $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$, para $i \geq 1$, onde o polinômio característico e seus autovalores são definidos.

2. Teoria Espectral dos Grafos

Seja um grafo $G = (V, E)$ com n vértices. A matriz de adjacência $A(G)$ de G é a matriz quadrada de ordem n cujas as entradas são $a_{ij} = 1$ se os vértices v_i e v_j são adjacentes e $a_{ij} = 0$ caso contrário. O polinômio característico dessa matriz $p_G = \det(A - \lambda I_n)$ é conhecido como **polinômio característico do grafo** correspondente e nos apresenta informações importantes a respeito das propriedades do grafo. Trata-se de um polinômio de grau igual à ordem da matriz (que equivale a ordem do grafo) que o define. Suas raízes são os autovalores de A . Dizemos que λ é um **autovalor** do grafo G , se λ é um autovalor da sua matriz de adjacência $A(G)$, e que o polinômio característico de $A(G)$, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é o polinômio característico de G , notado $p_G(\lambda)$. Essas definições são baseados de [5].

Se a matriz $A(G)$ possui autovalores distintos de $\lambda_1 > \dots > \lambda_s$ com multiplicidade iguais a $m(\lambda_1), \dots, m(\lambda_s)$, respectivamente, então o espectro do grafo é denotado $spect$, é definido como a matriz $2 \times s$, onde onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda linha, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas.

Caracterizações em grafos tripartido completo sob o olhar da álgebra linear são vistos em alguns trabalhos, como o trabalho de [1], que apresenta uma caracterização do grafo tripartido completo $K_{i,i,n-2i}$ para $n \geq 4$. O trabalho [3] apresenta uma caracterização em grafos tripartidos completos que são regulares e possuem estrela como complemento. Caracterizações em outras classes de grafos sob o aspecto da álgebra linear podem ser vistos em [5].

3. Resultados obtidos

Seja n a quantidade de vértices e m a quantidade de arestas para os grafos tripartido completo $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$, para $i \geq 1$. O polinômio característico da matriz $A(G)$ de ordem n possui grau n , isto é,

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1)$$

A Tabela 1 apresenta os polinômios característicos dos tripartidos completos $K_{1,1,i}$ e do $K_{1,2,i}$ para $i = 1, 2, \dots, 8$:

i	$K_{1,1,i}$	$K_{1,2,i}$
1	$-\lambda^3 + 3\lambda + 2$	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$
2	$\lambda^4 - 5\lambda^2 - 4\lambda$	$-\lambda^5 + 8\lambda^3 + 8\lambda^2$
3	$-\lambda^5 + 7\lambda^3 + 6\lambda^2$	$\lambda^6 - 11\lambda^4 - 12\lambda^3$
4	$\lambda^6 - 9\lambda^4 - 8\lambda^3$	$-\lambda^7 + 14\lambda^5 + 16\lambda^4$
5	$-\lambda^7 + 11\lambda^5 + 10\lambda^4$	$\lambda^8 - 17\lambda^6 - 20\lambda^5$
6	$\lambda^8 - 13\lambda^6 - 12\lambda^5$	$-\lambda^9 + 20\lambda^7 + 24\lambda^6$
7	$-\lambda^9 + 15\lambda^7 + 14\lambda^6$	$\lambda^{10} - 23\lambda^8 - 28\lambda^7$
8	$\lambda^{10} - 17\lambda^8 - 16\lambda^7$	$-\lambda^{11} + 26\lambda^9 + 32\lambda^8$

Tabela 1. Polinômios característicos do $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$.

Os sinais positivos e negativos nos polinômios têm significados específicos e desempenham papéis importantes na determinação das propriedades da matriz e na estrutura dos grafos. Com os valores obtidos na Tabela 1, podemos observar algumas delas, como:

Proposição 1 Seja G um grafo com n vértices e m arestas e seja a Equação (1) o polinômio característico de G . Então os coeficientes de $p_G(\lambda)$ satisfazem as seguintes propriedades:

- $a_1 = 0$;
- $a_2 = -m$;
- $a_3 = -2s$, onde s é o número de triângulos no grafo.

Prova. As demonstrações dos itens 1, 2 e 3 podem ser vistos em [2].

Os expoentes no polinômio característico indicam as potências da variável λ e representa a **multiplicidade algébrica** daquele autovalor. A multiplicidade algébrica de um autovalor (λ) indica a maior potência de $(\lambda - I)$ que divide o polinômio característico completamente fatorado. Em outras palavras, representa quantas vezes $(\lambda - I)$ aparece como um fator na fatoração do polinômio.

No contexto dos grafos tripartidos completo, os expoentes do polinômio característico fornecem informações relevantes sobre as propriedades estruturais e topológicas desses grafos em questão. Observe a Figura 2:

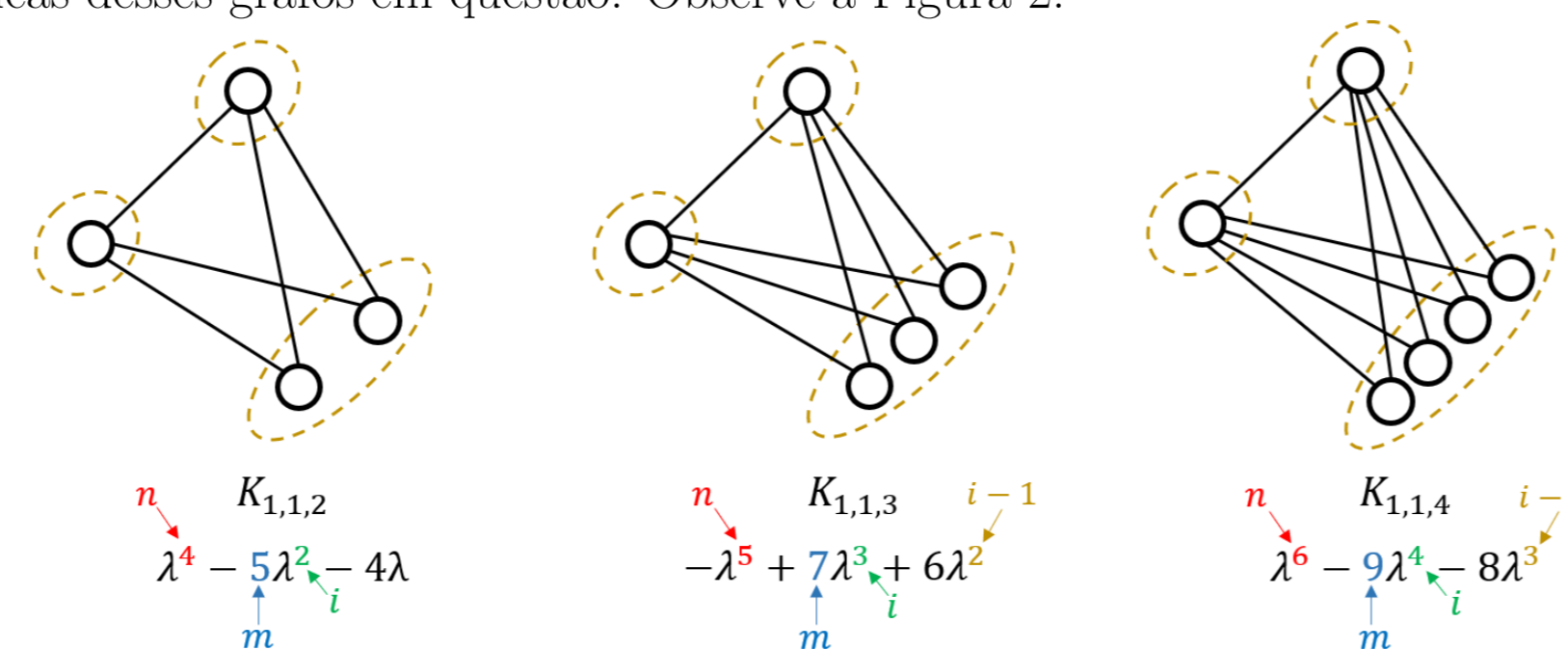


Figura 2. Caracterização estrutural do $K_{1,1,i}$, para $i = 2, 3, 4$.

Tanto para $K_{1,1,i}$ quanto para $K_{1,2,i}$, o polinômio característico é composto dos coeficientes a_0, a_1 e a_2 . Podemos ver que o expoente do coeficiente $a_0 \lambda^n$ equivale ao número de vértices n , o coeficiente $a_1 \lambda^{n-1}$ equivale ao número de arestas m e seu expoente respectivo equivale a i . Note que o valor de i equivale também a quantidade de triângulos no grafo tripartido completo.

Agora, quando olhamos o polinômio característico do grafo tripartido completo $K_{1,2,i}$ (Figura 3), temos um cenário um pouco diferente quando se trata da quantidade de triângulos existente nesse grafo.

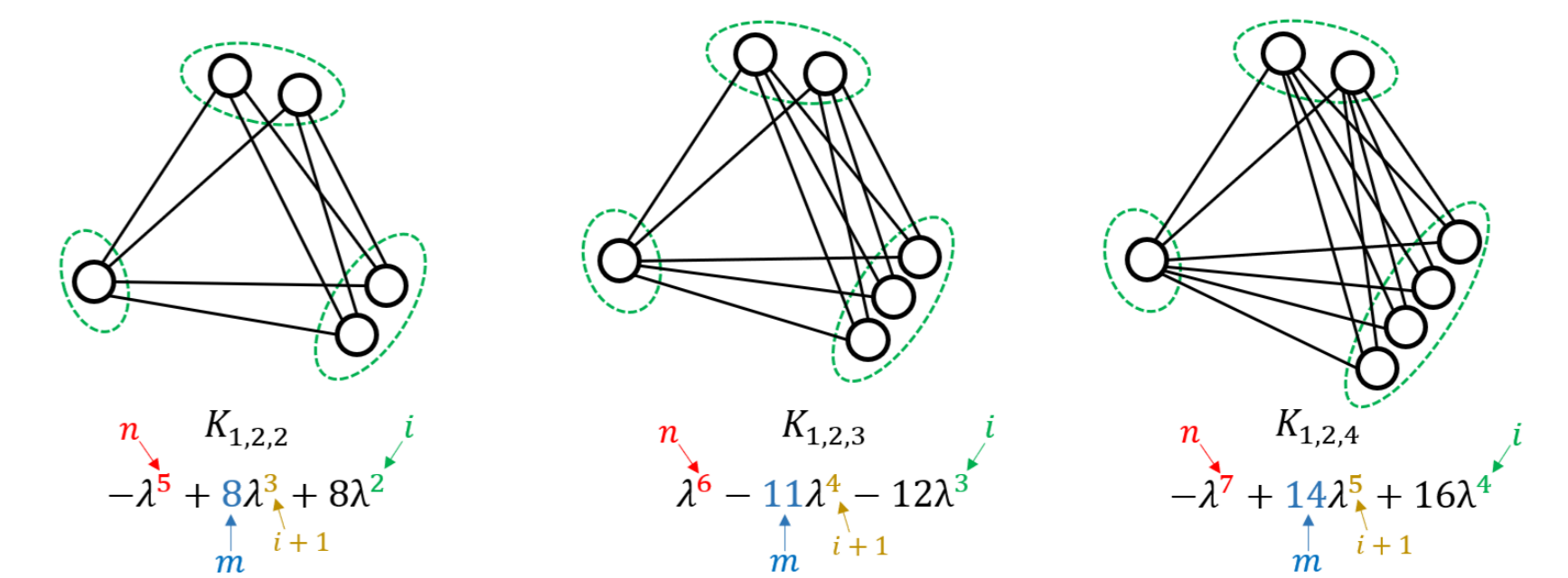


Figura 3. Caracterização estrutural do $K_{1,2,i}$, para $i = 2, 3, 4$.

A quantidade de triângulos em um $K_{1,2,i}$ pode ser determinado pelo expoente do coeficiente a_2 , onde seja, $2i$. Vemos então que o polinômio característico de um grafo tripartido completo determina o número de seus vértices, de suas arestas e de seus triângulos. No entanto, não é possível generalizar para todos os tripartidos completos, ou seja, nem sempre os ciclos de comprimento s ($s \geq 3$) são determinados em função dos expoentes dos polinômios.

Os **autovalores** de um polinômio característico têm um significado importante na álgebra linear e na teoria de matrizes. Os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de uma matriz A são as raízes do seu polinômio característico $p(\lambda)$, ou seja, são os valores que satisfazem $\det(A - \lambda I) = 0$.

Para os tripartidos completos $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$, temos as seguintes propriedades relacionadas aos seus autovalores:

Teorema 1 Seja $K_{1,1,i}$ o grafo tripartido completo não regular de ordem n e de tamanho m . O seu autovalor $\lambda_1 = 0$ para $i > 4$ e $\lambda_1 < n$.

Prova. A prova é trivial e pode ser adaptada de [1].

Teorema 2 Seja $K_{1,2,i}$ o grafo tripartido completo não regular de ordem n e de tamanho m . O seu autovalor $\lambda_1 = 0$ para $i > 0$.

A Tabela 2 apresenta os autovalores de $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$ (para $i = 1, 2, \dots, 8$), que são raízes dos polinômios característicos definidos anteriormente:

i	$K_{1,1,i}$	$K_{1,2,i}$
1	$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, 562, \lambda_4 = 2, 562$
2	$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1, 2, \lambda_4 = 3, 2$
3	$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, 484, \lambda_3 = -1, 288, \lambda_4 = 3, 7$
4	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, 372, \lambda_4 = 3, 372$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, 919, \lambda_3 = -1, 3, \lambda_4 = 4, 218$
5	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2, 702, \lambda_4 = 3, 702$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2, 919, \lambda_3 = -1, 3, \lambda_4 = 4, 218$
6	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = 4$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, 3, \lambda_3 = -1, 308, \lambda_4 = 4, 616$
7	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3, 275, \lambda_4 = 4, 275$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -3, 668, \lambda_3 = -1, 313, \lambda_4 = 4, 98$
8	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -3, 531, \lambda_4 = 4, 531$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -1, 317, \lambda_4 = 5, 317$

Tabela 2. Autovalores do $K_{1,1,i}$ e $K_{1,2,i}$.

4. Conclusão

Como trabalhos futuros (em continuidade), deseja-se determinar a fórmula geral do polinômio característico e dos autovalores e autovetores dos tripartidos completos $K_{1,1,3}$ e $K_{1,2,3}$, além dos autovalores mínimos e máximos, bem como outras classes de grafos tripartidos completos.

Referências

- [1] ALAWN, Nawras A.; AL-SAUDI, Nadia MG; RASHEED, Rashed T. Tripartite graphs with energy aggregation. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, v. 38, n. 7, p. 149-167, 2020.
- [2] ABREU, Nair Maria Maia de and Del-Vecchio, RR and Vinagre, CTM and Stevanovic, D. Introdução à teoria espectral de grafos com aplicações. Notas em Matemática Aplicada. 25. v. 27. 2007.
- [3] ASGHARSHARGHI, L. and Kiana, D., 2015. On Regular Graphs with Complete Tripartite Star Complements. Ars Comb., 122, pp.431-437.
- [4] BARBOSA, Lucas Pereira; DO NASCIMENTO MARTINS, Victor. Aplicações de Álgebra Linear na Teoria dos grafos. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.
- [5] CVETKOVIĆ, Dragos M.; ROWLINSON, Peter; SIMIC, Slobodan. Eigenspaces of graphs. Cambridge University Press, 1997.
- [6] SZWARCFITER, J. L. Grafos e algoritmos computacionais (Graphs and Computational Algorithms). Editora Campus. Brazil. 1986.

Apoios: