Baralhos e Passeios Aleatórios[1]

Alves, Raphael[2]; Estácio, Sabrina[3]; Frómeta, Susana[4]; Jara, Milton[5]; Marinho, Rodrigo[6]; Marques, Luiz[7] e Pimenta, João[8];

Resumo: *Desejamos utilizar um baralho com quantidade par de cartas para simular algo semelhante a um jogo de cara ou coroa. As cartas são retiradas sem reposição e, com algum critério, representam um movimento para a esquerda ou para a direita. É intuitivo pensar que se temos cartas o bastante no baralho e revelamos apenas uma pequena quantidade, a probabilidade de cada movimento ocorrer será próxima de* $\frac{1}{2}$. *Como a intuição humana quase sempre é traída pelos estudos em Probabilidade, o objetivo deste trabalho é apresentar uma relação entre a quantidade de cartas de um baralho arbitrário e a quantidade sorteada para que a probabilidade de cada movimento seja, de fato, próxima de* $\frac{1}{2}$, *a menos de um pequeno erro estimado.*

Palavras-chave: *baralho, passeio aleatório, simulação, medida de probabilidade, distância de variação total.*

1. Introdução

Imagine que você, leitor, deseje realizar uma simulação do passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$. Isto é, em instantes discretos, pode-se realizar um movimento para o inteiro à direita ou para o inteiro à esquerda com igual probabilidade.

Uma forma de fazer essa simulação é utilizando uma moeda honesta: lança-se a moeda e, se o resultado for cara, dá-se um passo à direita. Se for coroa, dá-se um passo à esquerda.

Figure 1: *Anverso e reverso da moeda brasileira de 1 real.*

Porém, o ato de lançar a moeda é trabalhoso e repetitivo. Tornando bem cansativo realizar esse experimento repetidas vezes. Uma alternativa muito interessante é utilizar um baralho de cartas: atribuindo ações às cartas, podemos fazer simulações apenas revelando-as uma-a-uma, sem reposição, o que é bem mais prático.

Dentre as diversas formas de se atribuir ações às cartas, uma simples maneira é atribuir às cartas vermelhas a ação de dar um passo à esquerda, e às cartas pretas a ação de dar um passo à direita. Este procedimento foi denominado como *simulação tradicional*.

Tipo (cor)	Movimento atribuído
♣ ♠	→
♥ ♦	←

Figure 2: *Ação atribuída às cartas na simulação tradicional.*

Numa tentativa de elaborar outra simulação, podemos utilizar os naipes. Enquanto as cores dividem o baralho em dois grupos distintos, os naipes o dividem em quatro, permitindo atribuir dois passos a cada carta retirada, como ilustra a tabela abaixo.

Naipe	Movimento atribuído
♣	→→
♥	→←
♠	←→
♦	←←

Figure 3: *Uma simulação que dá 2 passos por carta.*

Há, porém, um detalhe a ser observado. Se a primeira carta sorteada for preta, por exemplo, antes da retirada da segunda carta, o baralho tem uma carta vermelha a mais do que pretas. Isso faz com que a probabilidade de ser retirada uma carta vermelha seja ligeiramente maior nessa segunda retirada, o que não deveria ocorrer em um passeio aleatório simples simétrico. Esta situação pode se agravar se mais cartas pretas forem retiradas seguidamente. Nessa simulação, os passos apresentam dependência com os anteriores, fato que não ocorre com a moeda.

Será que, ainda assim, este procedimento é adequado para simular o passeio aleatório que desejamos? Caso sim, quantas cartas precisa ter o baralho para que uma simulação de comprimento T fixo seja considerada boa?

2. O Teorema

Antes de começar a resolver qualquer problema, é necessário definir as bases que sustentam as nossas ideias e colocar em jogo as ferramentas que temos à disposição para atacar o problema.

O parâmetro utilizado para avaliar se a simulação é boa ou não se chama ***distância de variação total***, que é uma medida que determina o quão próximas estão duas distribuições de probabilidade μ e ν.

$$d_{\mathrm{VT}}(\mu,\nu) := \frac{1}{2}\sum_{\omega\in\Omega} \mu(\omega) - \nu(\omega). \tag{1}$$

Durante o desenvolvimento dos nossos cálculos, surgiram duas distribuições de probabilidade conhecidas: a ***binomial*** e a ***hipergeométrica***.

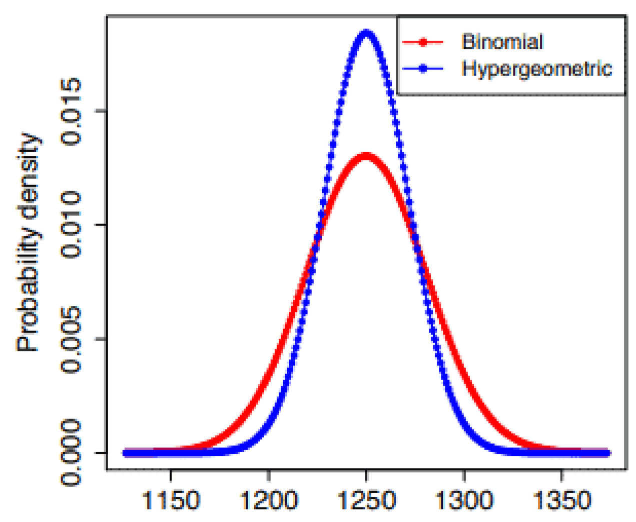

Figure 4: *Distribuições Binomial e Hipergeométrica.*

Utilizando esses conceitos, é possível enunciar o resutlado que relaciona a quantidade de cartas à probabilidade desejada. A demonstração segue, inicialmente, de argumentos de contagem. Posteriormente, de uma série de manipulações e estimativas para se obter uma expressão que determine a distância de variação total entre a distribuição induzida pela ***simulação tradicional*** e a distribuição induzida pela simulação com a moeda, que é uma distribuição normal.

Teorema 3.1 *Para todo* $c \geq 2$,

$$d_T(cT) = \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2(c-1)/c}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_c}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right), \tag{2}$$

em que erf *acima é a função erro de Gauss definida por*

$$(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

e

$$\gamma_c = \sqrt{(c-1)\log\left(\frac{c}{c-1}\right)}. \tag{3}$$

O resultado acima nos permite calcular a proporção de cartas que o baralho deve ter em relação à quantidade de cartas retiradas para que a distância de variação total seja menor ou igual à algum valor desejado. Em outras palavras, calculamos quantas cartas precisamos ter à disposição para que a simulação seja aceitável, a menos de um pequeno erro que podemos controlar.

Alguns valores notáveis para $d_T(cT)$ em função de c podem ser observados na tabela a seguir.

$d_T(cT)$	c
0.160	2.00
0.100	2.94
0.050	5.35
0.010	24.70
0.005	48.89
0.001	242.47

Figure 5: *Relação de valores notáveis derivados a partir do Teorema 3.1.*

A informação que essa tabela carrega é que, se impusermos que a distribuição tenha $d_{\mathrm{VT}}(\mu_{X,T}) \leq 0.05$, por exemplo, devemos tomar um baralho no qual a quantidade de cartas seja $N = \lceil 5,35 \cdot T \rceil$, com T suficientemente grande. Os outros valores têm interpretação análoga e o comportamento completo da função pode ser melhor observado no gráfico abaixo.

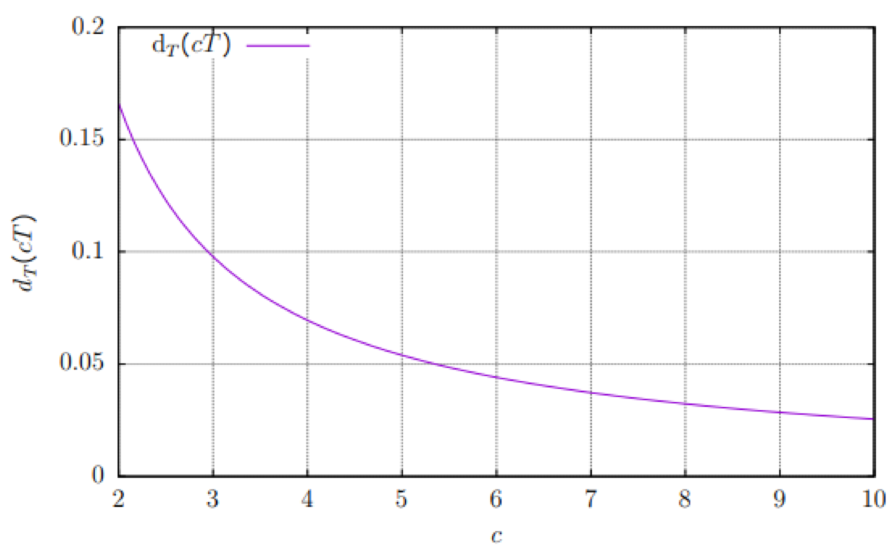

Figure 6: *Gráfico da função $d_T(cT)$ definida pelo Teorema 3.1.*

3. Conclusão

Quando o baralho é o menor múltiplo inteiro possível do passeio aleatório simulado, ou seja, temos à disposição o dobro de cartas do que queremos retirar, a função dista da distribuição normal apenas 0,16, e só tende a diminuir conforme a quantidade de cartas disponíveis cresce!

Surpreendentemente, dessa vez a Probabilidade não traiu a intuição humana. Isso quer dizer que, de fato, quando temos um baralho com muitas cartas, ele é uma excelente ferramenta para simular um passeio aleatório simples simétrico.

Referências

[1] BAYER, D.; DIACONIS, P. Trailing the dovetail shuffle to its lair. **The Annals of Applied Probability**, v. 2, n. 2, p. 294-313, 1992.

[2] FRANCO, T. **Princípios de Combinatória e Probabilidade**. IMPA. Coleção Matemática Universitária, 2020.

[3] LEVIN, D.A.; PERES, Y. **Markov Chains ans Mixing Times**, MBK. American Mathematical Society, 2017.

[4] SPENCER, J. **Asymptotia**, Student Mathematical Library. American Mathematical Society, 2014

Apoios:

[1] Este trabalho foi desenvolvido na Jornadas de Pesquisa em Matemática - 2024, no ICMC-USP, apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP

[2] FFCLRP-USP
[3] ICEx-UFMG
[4] IME-UFRGS
[5] IMPA
[6] UFSM-CS
[7] IME-USP
[8] IFSC-USP