UFMS UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Um Breve passeio ao Continuum de Cantor

SANTOS, Pettrick[1]; ARRUDA, Kevelyn Desiree e SOUZA, Osmar

Resumo: *A hipótese do contínuo, formulada por Georg Cantor, é um problema fundamental na teoria dos conjuntos que questiona a existência de um conjunto infinito cujo tamanho está estritamente entre o dos números naturais e o dos números reais. Cantor conjecturou inicialmente que tal conjunto não existiria. Em 1938, Kurt Gödel demonstrou que a negação da hipótese do continuum não poderia ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel, em 1963, e Paul Cohen demonstrou que a hipótese do continuum também não poderia ser provada a partir dos mesmos axiomas. Isso significa que sua veracidade não pode ser provada nem refutada a partir desses axiomas. A questão continua sendo um dos grandes desafios matemáticos não resolvidos, inclusive é um dos prblemas propostos por Hilbert em 1900, destacando a complexidade e a profundidade dos conceitos fundamentais da matemática.*

Palavras-chave: *Continuum, Georg Cantor, conjuntos, Hilbert e conjectura.*

1. Introdução

"Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor nos abriu".

- David Hilbert

Como haviam muitos infinitos, cada vez maiores:

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0 < \#\mathrm{P}(\mathbb{N}) = \mathrm{c} < \#\mathrm{P}(\mathrm{P}(\mathbb{N})) \ldots,$$

Cantor levantou a hipótese de haver uma sequência de alefs:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

apesar de não saber a colocação exata de cada um.

Portanto, a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior que $\aleph_0$.

Entretanto, Cantor não quiz dizer que a cardinalidade dos reais é $\aleph_1$, pois não tinha certeza se poderia haver algum conjunto com cardinalidade intermediária entre a cardinalidade dos naturais e a cardinalidade dos reais.

$$\aleph_0, \aleph_1\text{“}(\mathbb{R})\text{”}, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

Chamou, então, a cardinalidade dos reais de C, significando "contínuo".

Esses resultados constituiram um primeiro avanço na compreenssão do infinito real, e mostraram que as descobertas eram dignas de interesse. Eles permitiram construir uma hierarquia de totalidades infinitas.

2. Quem sucederá Cantor?

Todo sistema de infinitos números reais, i.e., todo agregado de números (ou pontos) é ou equivalente ao agregado dos números naturais,(1, 2, 3, ...), ou ao agregado de todos os números reais e, portanto, ao continuum, isto é, aos pontos de uma reta; com respeito á equivalência, há, portanto, somente dois agregados de números, o agregado enumerável e o continuum.

Desse teorema seguiria, imediatamente, que o continuun tem o número cardinal seguinte àquele do agregado enumerável; a demonstração desse teorema formaria, portanto, uma nova ponte entre o agregado enumerável e o continuum."

É interessante notar que, na continuação do comentário a esse problema, Hilbert define, ainda na linha de Cantor, o conceito de boa ordem e propõe a questão, também devida a Cantor, de bem ordenar o conjunto dos números reais.

Portanto, como primeiro item por ele arrolado, Hilbert insta com a comunidade a que resolva, de fato, dois problemas. A última proposição foi demonstrada por Zermelo, em 1904, com o uso do Axioma da Escolha. Aliás, como sabemos, o teorema da boa ordem é equivalente ao Axioma da Escolha.

3. A Hipótese do Continuum

A posterior introdução, nos trabalhos sobre os números transfinitos, dos dois princípios geradores de ordinais, a saber:

(I) Dado qualquer ordinal α, existe um menor ordinal maior do que α em questão, o chamado $(\alpha + 1)$

(II) Dada qualquer seqüência crescente α_n de ordinais, existe um menor ordinal maior do que todos os α_n, o chamado $\lim\ \alpha_n$

Para prosseguir na busca de resultados melhores, Cantor sentiu ser necessário formular, com mais precisão, sua hipótese restritiva sobre os pontos de exceção. Para isso, intuiu haver mister de uma teoria mais acurada dos números reais.

Cantor descobriria uma chave útil para entender a natureza da continuidade. Em 1874, publicou o seguinte teorema no Journal de Crelle: "O conjunto,R , dos números reais não pode ser posto em correspondência um-a-um com o conjunto, N, dos número naturais".

Assim, em algum sentido, há mais números reais do que números naturais, ou seja, de algum modo, os números reais compõem uma infinidade de ordem superior àquela constituída pelos números naturais.

Cantor escreve: "E agora que provamos, para um rico e extenso campo de agregados, a propriedade de ser capaz de correspondência com os pontos de uma reta contínua ou com uma parte dela (um agregado de pontos contidos nela), segue a questão:

Em quantas e quais classes (se dissermos que agregados de mesma ou de diferente potência são agrupados, respectivamente, na mesma ou em diferentes classes) caem, de fato, os agregados lineares?

Por um processo de indução, somos levados ao teorema de que o número de classes é dois: uma contendo todos os agregados suscetíveis de serem postos na forma: v , em que v pode receber todos os valores inteiros positivos; e a outra contendo todos os agregados de forma: x, em que x pode tomar todos os valores reais no intervalo $(0, 1)$".

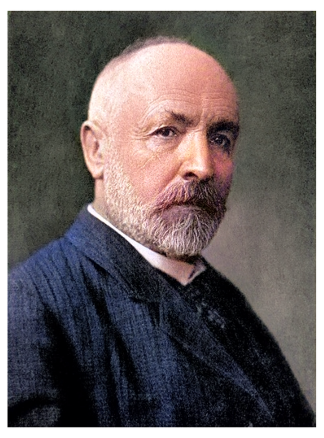

Figura 1:Matemático Georg Cantor

4. Conclusão

Depois de ter introduzido o menor número cardinal transfinito $\aleph_0$, e de ter derivado suas propriedades mais à mão, surge a questão quanto aos números cardinais mais elevados e de como eles procedem de $\aleph_0$. Mostraremos que os números cardinais transfinitos podem ser arranjados de acordo com sua magnitude, e que, nessa ordem, formam, como os números finitos, um "agregado bem ordenado", em um sentido estendido das palavras. A partir de $\aleph_0$ procede, por uma lei determinada, o próximo número cardinal maior, $\aleph_1$; a partir desse, pela mesma lei, o próximo maior, $\aleph_2$; e assim por diante. Mas, mesmo a seqüência ilimitada de números cardinais

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_n, \ldots$$

não exaure o conceito de número cardinal transfinito.

Referências

[1] Cantor, G. – Contributions to the Foundings of the Theory of Transfinite Numbers, Dover, 1955.

[2] Gödel, K. – What is Cantor's continuum problem?", in P. Banacerraf E H. Putnan – Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, 1983

[3] Hilbert, D. – On the infinite, in P. Benacerraf e H. Putnun– Philosophy of mathematics, Cambridge Univ. Press, 1983

[1] Este autor foi apoiado pela Dominus Energia Solar

Apoios:

CAPES CNPq FAPESP