XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Corpo Teórico de Storto: Novos Métodos de pensar sobre as possibilidades restritivas

Storto, Paolo Garcia[1]

Resumo: *Este estudo examina e deduz, a partir de fórmulas da análise combinatória, novas formas de calcular possibilidades que contenham pelo menos uma restrição, seja no número de elementos ou no número de posições. Serão trabalhados os principais tópicos da combinatória, como, por exemplo, a permutação com e sem repetição e as suas variações. O objetivo é apresentar novas formas de pensar sobre o cálculo de possibilidades com as restrições e sua utilidade no campo.*

Palavras-chave: *Análise combinatória, Probabilidades, Teoria dos números.*

1. Introdução

A Análise Combinatória é um ramo da matemática que permite a manipulação, arrumação e a contagem de elementos que satisfazem critérios específicos.

A Combinatória passou por diversos intelectuais desde sua primeira aparição como Teoria Combinatória. Surgiu por volta do século XVII, e pouco tempo depois alguns livros foram publicados, dentre eles *Dissertatio de arte combinatória* (1666), de Leibniz (polímata alemão e principal figura na concepção das ideias do cálculo diferencial e integral), e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669), de Athanasius Kircher. A notação n! (produto dos n primeiros números naturais) foi usada por Cristian Kramp (Colônia, 1808).

Dentre os problemas estudados na Análise Combinatória, destaca-se o cálculo de possibilidades com restrições, que é um subtópico deste ramo não muito explorado em livros e artigos didáticos. Este subtópico apresenta resultados importantes e úteis, aplicáveis em estudos probabilísticos, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, entre outros.

2. Ideia fundamental da restrição

Para compreendermos as séries possíveis dentro do estudo proposto, é de grande importância abordar conhecimentos prévios sobre a inserção da restrição no cálculo de possibilidades.

Iniciamos com as Permutações, Arranjos e Combinações no campo da Análise Combinatória, definindo assim x possibilidades para um evento quando pelo menos um dos n elementos está restrito. Essa restrição limita a capacidade de um elemento qualquer de permutar nas posições dadas. A fórmula da ideia fundamental é dada na forma:

$$P_{n,l,q} = (n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right) \tag{2.1}$$

onde l é o número de elementos restritos e q o número de posições que l está restrito em $\mathbb{N}$.

Qualquer resultado maior ou igual a zero é dito como solução do problema na fórmula (2.1).

Vamos analisar o caso quando $n \geq p$. Segue a fórmula da condição estabelecida:

$$A_{n,p,l,q} = \frac{(n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)}{(n-p)!} \tag{2.2}$$

onde o denominador da fórmula (2.2) exclui as posições não exigidas. Qualquer resultado tem como solução um número inteiro maior ou igual a zero.

Supondo que a ordem dos elementos não altera o resultado final e que se atenda ao mesmo caso da fórmula (2.2), podemos alterá-la da seguinte forma:

$$C^{n,l}_{p,q} = \frac{\frac{(n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)}{(n-p)!}}{p!} = \frac{(n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)}{p!\,(n-p)!} \tag{2.3}$$

As fórmulas demonstradas acima são chamadas de restrição característica dentro do estudo. Essas ocorrências são importantes para a análise dos métodos restritivos possíveis.

3. Séries possíveis

Em problemas que envolvem métodos restritivos, é comum estabelecer que para toda posição p haja ao menos uma restrição inserida. Nos problemas abaixo, introduziremos fórmulas para cada condição.

Os problemas em que todas as posições de um conjunto estão restritas a um valor constante linear, ou seja, toda posição terá o mesmo valor l, chamados de concordância restritiva, se apresentam da seguinte forma em dois casos:

1º Caso: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ estão contidos em todas as posições p e podem ser repetidos, então a fórmula geral se dá na forma:

$$(n-l)^p \tag{3.1}$$

onde a_i representa o elemento em que i está definido em $1 \leq i \leq n$

2º Caso: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ estão contidos em todas as posições p e não podem ser repetidos, a fórmula é dada com as seguintes condições:

$$q = n \text{ e } q - 1 = p - 1$$

Logo, temos que:

$$q = n,\ q - 1 = p - 1 \text{ e } q = p$$

Essa relação nos garante que:

$$n = p$$

Substituindo os dados na fórmula (2.2):

$$A_{n,p,l,q} = \frac{(n-q)!\left(\prod_{k=0}^{q-1}(n-k-l)\right)}{(n-p)!} \Rightarrow A_{n,p,l,q} = \frac{(n-n)!\left(\prod_{k=0}^{p-1}(n-k-l)\right)}{(n-n)!}$$

Resolvendo, a fórmula geral será:

$$\prod_{k=0}^{p-1}(n-k-l) \tag{3.2}$$

Considere que todas as posições de um conjunto estão restritas, mas a colocação dos elementos restritos não segue a forma de uma constante linear, como na concordância restritiva. Chamados de Aleatoriedade Restritiva, eles se apresentam em dois casos:

1º Caso: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ estão contidos em todas as posições p e podem ser repetidos, a fórmula é expressa em duas formas:

$$n^p - \left(\sum_{k=1}^{p} l_k\right)\cdot n^{p-1} + ... + \left(l_p \cdot l_{p-1} ...\right)\cdot n \pm \prod_{k=1}^{p} l_k \text{ e}$$

(3.3.1)

$$\prod_{k=1}^{p}\left(n - l_k\right) \tag{3.3.2}$$

onde (3.3.1) é representada na forma polinomial, e (3.3.2) na forma reduzida.

A notação $\left(\prod_{k=1}^{p} l_k\right)$ da forma (3.3.1) será positiva quando p for par, e negativa quando p for ímpar. Os coeficientes que acompanham n terão sinal intercalado, iniciando sempre com o termo n^p positivo.

2º Caso: Se $a_1, a_2, ..., a_n$ estão contidos em todas as posições p e não podem ser repetidos, a fórmula é apresentada da seguinte maneira:

$$\prod_{k=0}^{p-1}\left(n - k - l_{k+1}\right) \tag{3.4}$$

4. Aplicações

Os cálculos de possibilidades com restrições apresentam resultados úteis para diversas áreas de estudo, dentre eles a probabilidade, a estatística, a pesquisa operacional, a ciência da computação, a engenharia, e a economia, permitindo a modelagem e análise de problemas complexos em diferentes contextos.

Considere $P(l)$ como a probabilidade de um evento qualquer ocorrer quando um elemento restrito é ainda mais limitado. O problema é escrito na forma:

$$P(l) = \prod_{k=q}^{q_e - 1}\left(\frac{n-k-l}{n-k}\right)$$

onde q_e representa o número de posições que l está restrito no evento do espaço amostral. Em outro contexto, q_e representa a soma das posições restritas do evento e do espaço amostral.

Exemplo: Uma pessoa deseja empacotar 4 computadores de modo que o computador A não ocupe a primeira caixa. Qual a probabilidade do computador A não ocupar a terceira e a quarta caixa?

*Imagem de autoria própria. Meramente ilustrativo.

Substituindo os valores do problema na fórmula:

$$P(Comp.A) = \frac{\prod_{k=1}^{3-1}(4-k-1)}{\prod_{k=1}^{3-1}(4-k)} = \frac{(4-1-1)(4-2-1)}{(4-1)(4-2)} = \frac{1}{3}$$

5. Considerações finais

Concluindo, este estudo mostrou distintas formas de solucionar e obter resultados a partir de problemas matemáticos que contenham algum tipo de restrição quanto aos elementos ativos na proposta do problema. É facilmente aplicável em áreas que envolvam não só possibilidades, mas também em setores como os estudos probabilísticos.

Além disso, destaco a importância de compreender o campo de forma dissemelhante, assim como disse o matemático húngaro George Polya:

"A matemática consiste em provar a coisa mais óbvia da maneira menos óbvia".

Referências

[1] Vazquez, Cristiane Maria Roque. Noguti, Fabiane Cristina Höpner; **A ANÁLISE COMBINATÓRIA**. 2004.

Apoios:

[1] Trabalho autônomo, sem vinculação com instituições acadêmicas. paolo.cdpp@gmail.com