Álgebra de Virasoro e suas representações

Costa 1, Othávio 1[1]; Ramirez 2, Luis Enrique 2[2] e

Resumo: *Nos últimos anos, a teoria de representações da álgebra de Virasoro tem sido desenvolvida intensamente, principalmente levando em consideração sua forte relação com teoria das cordas e campos conformes bidimensionais. Nosso principal objetivo é explorar as representações de peso máximo, e em particular, representações de tipo Verma. Iniciaremos este trabalho com os conceitos introdutórios de álgebras de Lie e derivações. Daí, apresentaremos a única extensão central não trivial da álgebra de Witt, chamada álgebra de Virasoro. A álgebra de Witt, por sua vez, se caracteriza como a álgebra de Lie complexa das derivações da álgebra complexa dos polinômios de Laurent. Ainda, explicitaremos uma base para essas álgebras e exibiremos como o comutador se comporta nessa base. Na sequência, definiremos representações de peso máximo e mostraremos algumas das suas principais propriedades. Neste seguimento, falaremos sobre representações do tipo Verma, que são definidas como uma representação de peso máximo que satisfaz determinada propriedade universal. Finalmente, mostraremos que o módulo de Verma é unicamente determinado por dois parâmetros, é indecomponível e possui uma única subrepresentação própria maximal.*

Palavras-chave: *representações de álgebras de lie, peso máximo, Verma.*

1. Conceitos preliminares

A álgebra complexa de Witt foi definida pela primeira vez por Élie Cartan (1869-1951) em 1909 e seus análogos sobre corpos finitos vieram a ser estudados por Ernst Witt (1911-1991) na década de 1930. A única extensão central não trivial a menos de isomorfismo da álgebra de Witt, nomeada de álgebra de Virasoro e denotada por Vir em homenagem ao físico argentino Miguel Ángel Virasoro (1940-2021), é uma álgebra de Lie de dimensão infinita que apareceu em diversos contextos tendo sido encontrada pela primeira vez em 1966 pelo matemático estadunidense Richard Earl Block (1931-tbd) na característica positiva e redescoberta independentemente em 1968 na característica zero pelos matemáticos Israel Gelfand (1913-2009) e Dmitry Fuchs (1939-tbd). Mais tarde, em 1970, Virasoro escreveu alguns operadores que geram Vir em seu trabalho sobre teoria das cordas. Na década de 1980, a teoria da representação da álgebra de Virasoro foi intensamente estudada. Em particular, a estrutura dos seus módulos de Verma foram amplamente exploradas por Dmitry Fuchs (1939-tbd) e Boris Lvovich Feigin (1953-tbd).

Definição 2.1 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$ munida do produto, denominado colchete ou comutador,*

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}.$$

$\mathfrak{g}$ é dita uma álgebra de Lie se

(i) $[x, x] = 0,\ \forall x \in \mathfrak{g}$

(ii) $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0,\ \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

Definição 2.2 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo de álgebras de Lie*

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

V é chamado de espaço da representação e a dimensão da representação é definida como a dimensão de V.

Observação 2.3 *Existe uma correspondência biunívoca entre representações de uma álgebra de lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}$-módulos. Por isso, será muitas vezes conveniente utilizar a linguagem de módulos em vez da linguagem de representações.*

Definição 2.4 *Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $D : A \longrightarrow A$ é uma derivação de A se*

$$D(a \cdot b) = D(a)b + aD(b),\ \forall a, b \in A.$$

Proposição 2.5 *Seja A uma $\mathbb{K}$-álgebra. Então $DerA$ é subálgebra de $\mathfrak{gl}(A)$.*

Definição 2.6 *Seja $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ a álgebra complexa dos polinômios de Laurent. Chamaremos $W = Der(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ da álgebra de Witt.*

Proposição 2.7 *Considere os elementos d_n de W definidos por*

$$d_n = -t^{n+1}\frac{d}{dt},\ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Então

$$W = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}d_n$$

e

$$[d_m, d_n] = (m - n)d_{m+n},\ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.8 *A álgebra de Witt possui uma única extensão central unidimensional não trivial $\tilde{W} = W \oplus \mathbb{C}c$, a menos de isomorfismo de álgebras de Lie. Tal extensão tem uma base $\{c\} \cup \{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, com $c \in \mathbb{C}c$ de tal maneira que o comutador $[\ ,\ ]_{Vir}$ satisfaz as seguintes relações*

$$[c, d_n]_{Vir} = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$[d_m, d_n]_{Vir} = [d_m, d_n]_W + \delta_{m,-n}\frac{m^3 - m}{12}c,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

onde $[\ ,\ ]_W$ é o comutador em W.

Observação 2.9 *Vir tem a seguinte decomposição triangular de subálgebras de Lie:*

$$Vir = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{n}^+,$$

onde

$$\mathfrak{n}^- = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}d_{-i} \qquad \mathfrak{H} = \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d_0 \qquad \mathfrak{n}^+ = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{C}d_i$$

2. Representações de Vir

Definição 3.1 *Uma representação de Vir em uma espaço vetorial V é uma representação de peso máximo se existe $v \in V$ e dois elementos $C, h \in \mathbb{C}$ tais que*

$$c \cdot v = Cv, \qquad d_0 \cdot v = hv$$
$$V = U(Vir)v, \qquad \mathfrak{n}^+ \cdot v = 0.$$

O vetor v é dito vetor de peso máximo e V chamado de módulo de peso máximo com peso máximo (C, h).

Proposição 3.2 *Seja V uma representação de peso máximo cujo peso máximo é (C, h) e v é o vetor de peso máximo. Então*

$$V = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} V_{h+k}$$

onde V_{h+k} é o $(h+k)$-autoespaço de $\rho(d_0)$ gerado pelos vetores da forma

$$d_{-i_s}d_{-i_{s-1}} \cdots d_{-i_1}(v)$$

com $0 < i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_s$, e $i_1 + i_2 + \cdots + i_s = k$.

Observação 3.3 *Note que $dimV_{h+k} \leq p(k)$ onde $p(k)$ denota o número de partições (ordenadas) de k. A igualdade vale se e somente se os geradores do autoespaço são linearmente independentes.*

Exemplo 3.4 *Toda representação de energia positiva irredutível de Vir é uma representação de peso máximo.*

Exemplo 3.5 *Toda representação de peso máximo unitária V é irredutível.*

Definição 3.6 *Uma representação de peso máximo $M(C, h)$ de Vir com vetor de peso máximo u e peso máximo (C, h) é dita uma representação de Verma se satisfaz a seguinte propriedade universal:*

Dada uma representação de peso máximo V de Vir com vetor de peso máximo v e peso máximo (C, h), existe um único epimorfismo $\varphi : M(C, h) \longrightarrow V$ que leva $w \longmapsto v$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} Vir \arrow[r] \arrow[d] & M(C,h) \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\varphi"] \\ V & \end{tikzcd}$$

Proposição 3.7 *Para cada $C, h \in \mathbb{C}$, existe uma única representação de Verma $M(C, h)$ com peso máximo (C, h). Explicitamente, a representação de Verma será o Vir-módulo $M(C, h) = U(Vir)/I(C, h)$, onde $U(Vir)$ denota a álgebra envolvente universal de Vir, $I(C, h)$ é o ideal à esquerda de $U(Vir)$ gerado por $\{d_n : n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \cup \{C - 1_v \cdot c, d_0 - 1_v \cdot h\}$ e 1_v é a identidade de $U(Vir)$. Além disso, o mapa $U(\mathfrak{n}^-) \longrightarrow M(C, h)$ levando x para $x \cdot v$ é não somente sobrejetivo como também injetivo.*

Teorema 3.8 *Dados $C, h \in \mathbb{C}$, seja $M(C, h)$ a representação de Verma associada. Então:*

(i) $M(C, h)$ *é indecomponível, ou seja, não podemos encontrar subrepresentações não triviais W_1, W_2 de $M(C, h)$ tais que $M(C, h) = W_1 \oplus W_2$.*

(ii) $M(C, h)$ *tem uma única subrepresentação própria maximal $J(C, h)$; mais ainda, $V(C, h) := M(C, h)/J(C, h)$ é a única representação irredutível de peso máximo, cujo peso máximo é (C, h).*

Referências

[1] IOHARA, K.; KOGA, Y. **Representation theory of the Virasoro algebra.** Springer Monographs in Mathematics, London, 2011.

[2] HARTWING, J. T. **Generalized derivations on algebras and highest weight representations of the Virasoro algebra.** Master thesis-Lund University, Lund, 2002.

[3] LUNDHOLM, D. **The Virasoro algebra and its representations in physics.** KTH, Estolcomo, 2005.

[4] SAN MARTIN, L. A. B. **Álgebras de Lie**. [S.l.]: Editora da Unicamp, 2010.

Apoios:

CAPES

[1]Mestrando em Matemática na Universidade Federal do ABC. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

[2]Afiliação. Este autor foi apoiado ...