Universidade Federal do ABC

XI Bienal de Matemática 2024

Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

29 de julho a 02 de agosto de 2024

Teorema Espectral para o Operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos

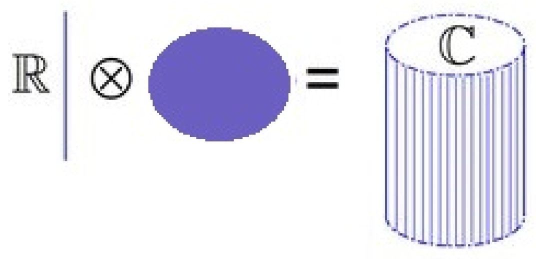
Garcia, Naísa Camila [1] e Marrocos, Marcus Antonio Mendonça [2].

Resumo:*No presente trabalho, abordaremos o problema de autovalores do Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Dirichlet e Neumann. Nosso objetivo é estudar o Teorema Espectral para o operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são domínios de $\mathbb{R}^k$ e N respectivamente.*

Palavras-chave:*Laplaciano Grushin, Autovalores, Teorema Espectral.*

1. Introdução

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade produto do tipo $\mathcal{M} := \mathbb{R}^k \times N$, onde (N, g_N) é uma variedade Riemanniana fechada e $\mathcal{M}$ é dotada com a métrica Riemanniana produto, por exemplo:



O operador Laplaciano Grushin age em $u \in C^\infty(\mathcal{M})$ por:

$$\Delta_G\, u = \Delta^{\mathbb{R}^k}\, u + \|x\|^{2s}_{\mathbb{R}^k}\, \Delta^N\, u$$

onde $s \in \mathbb{R}$, $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ e Δ^N denotam respectivamente o Laplaciano Beltrami em $\mathbb{R}^k$ e em N.

Para um domínio limitado (conjunto aberto e conexo) $\Omega \subset \mathcal{M}$ com fronteira C^2, consideramos os problemas de autovalores para o operador Laplaciano Grushin com condições de fronteira de Neumann ou Dirichlet agindo em $u \in C^\infty(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta_G\, u = \lambda u \quad em\ \Omega \\ \mathcal{B}_\alpha(u) \ \ = 0 \quad sobre\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

$\mathcal{B}_\alpha(u) = \alpha\langle\nabla_G u, \nu\rangle + (1-\alpha)u$, para $\alpha \in \{0, 1\}$, em outras palavras, quando $\alpha = 0$ estamos considerando a condição de fronteira de Dirichlet e quando $\alpha = 1$ estamos com condição de fronteira de Neumann, ν é o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ e $\nabla_G u$ é chamado gradiente Grushin de u e é dado por: $\nabla_G u = (\nabla_x u, \|x\|^s_{\mathbb{R}^k}\nabla_y u)$, onde ∇_x e ∇_y denotam os gradientes de $\mathbb{R}^k$ e N respectivamente.

O Laplaciano Grushin não é uniformemente elíptico, pois degenera para $\Delta^{\mathbb{R}^k}$ em pontos da fibra $\{0\} \times N$ no entanto, alguns resultados clássicos da teoria dos operadores elípticos permanecem válidos para o operador Laplaciano Grushin, tais como a desigualdade de Sobolev, a desigualdade de Poincaré e a existência de soluções fracas.

Nosso objetivo é estudar o Teorema Espectral para o operador Laplaciano Grushin em domínios cilíndricos $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são domínios de $\mathbb{R}^k$ e N respectivamente.

2. Preliminares

Definição 3.1 *Seja Ω um domínio de $\mathcal{M}$. Denotamos por $W^{1,2}_G(\Omega)$ o espaço das funções reais em $L^2(\Omega)$ tais que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$ para todo $i = 1, \cdots, k$ e $\|x\|^s \frac{\partial u}{\partial y_j} \in L^2(\Omega)$, munido da norma*

$$\|u\|_{W^{1,2}_G(\Omega)} := \left(\int_\Omega u^2 + \int_\Omega |\nabla_G\, u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

e, denotamos por $W^{1,2}_{G,0}(\Omega)$ o fecho de $C^\infty_c(\Omega)$ em $W^{1,2}_G(\Omega)$.

A partir deste momento, concentraremos nossa atenção exclusivamente na condição de fronteira de Dirichlet.

Definição 3.2 *Uma função $u \in W^{1,2}_{G,0}(\Omega)$ é chamada solução fraca do problema (1) com condição de fronteira de Dirichlet, quando satisfaz*

$$\int_\Omega \nabla_G u \cdot \nabla_G\, \varphi = \lambda \int_\Omega u\varphi \quad \forall\ \varphi \in W^{1,2}_{G,0}(\Omega)$$

3. O problema de autovalor em domínios cilíndricos

Para resolver o problema de autovalores com condição de fronteira de Dirichlet em domínios cilíndricos, empregamos o método de separação de variáveis. Nesse contexto, as soluções u do problema (1) podem ser podem ser expressas como

$$u(x, y) = f(x)g(y) \qquad (x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$$

e o problema (1) torna-se:

$$\begin{cases} -\Delta^N g(y) = \mu g(y) \quad em \quad \Omega_2 \\ g(y) = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega_2 \\ -\Delta^{\mathbb{R}^k} f(x) + \mu\|x\|^{2s} f(x) = \lambda f(x) \quad em\ \Omega_1 \\ f(x) = 0 \quad sobre \quad \partial\Omega_1 \end{cases} \tag{2}$$

O problema de autovalores é então dividido em dois problemas de autovalores acoplados, um para o Laplaciano e outro para o operador Schrodinger com potencial $\mu\|x\|^{2s}$. Conforme amplamente conhecido, o primeiro problema admite uma sequência de autovalores

$$0 < \mu_1(\Omega_2) \leq \mu_2(\Omega_2) \leq \mu_j(\Omega_2) \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

com autofunções correspondentes $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormais em $L^2(\Omega_2)$.

Isto posto, para cada μ fixado, o problema de autovalor do operador de Schrodinger admite uma sequência de autovalores

$$0 \leq \lambda_1(\mu, \Omega_1) < \lambda_2(\mu, \Omega_1) \leq \lambda_j(\mu, \Omega_1) \leq \cdots \nearrow +\infty,$$

com autofunções $\{f^\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormais em $L^2(\Omega_1)$.

Consequentemente, uma família de autovalores é dada por $\{\lambda_j(\mu_k(\Omega_2), \Omega_1)\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ com autofunções associadas $\left\{g_k f^{\mu_k(\Omega_2)}_j\right\}_{j,k\in\mathbb{N}}$ que formam um sistema completo em $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, e então

$$\{\lambda_n(\Omega)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda_j(\mu_k(\Omega_2), \Omega_1)\}_{j,k\in\mathbb{N}}$$

Para obter estimativas dos autovalores, conforme é comumente praticado, empregamos uma abordagem baseada na caracterização variacional. Nesse contexto, o primeiro autovalor $\lambda_1(\mu_1, \Omega_1)$ do problema (1), é expresso por:

$$\lambda_1(\mu_1, \Omega_1) = \min_{f \in W^{1,2}_{G,0}(\Omega_1)} \frac{\int_{\Omega_1} |\nabla_x f|^2 + \mu_1\|x\|^{2s} f^2 dx_1}{\int_{\Omega_1} f^2 dx_1}$$

4. Condição de fronteira de Neumann

Ao consideramos o problema (1) com condição de fronteira de Neumann, em vez da condição de Dirichlet, o desenvolvimento é análogo. Além da diferença na condição de fronteira, a distinção entre os dois problemas reside no fato de que as funções teste agora pertencem ao espaço $W^{1,2}_G(\Omega)$ e devem satisfazer$\int_\Omega \varphi = 0$, uma vez que, no caso Neumann, o primeiro autovalor é igual a zero.

Referências

[1] Jost, J.: *Partial Differential Equations.* Springer-Verlag, New York. 2002.

[2] Lamberti,P.D., Luzzini, P., Musolino, P.: *Shape Perturbation of Grushin Eigenvalues.* The Journal of Geometric Analysis, 31, 10679-10717.2021.

[3] Luzzini, P., Provezano, L., Stubbe, J.: *The First Grushin Eigenvalue on Cartesian Product Domains.* Advances in Calculus of Variations. 2023.

5. Agradecimentos

Agradecemos à comissão organizadora da XI Bienal de Matemática pela oportunidade de divulgação deste trabalho e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Apoios:

CAPES CNPq FAPESP

[1]UFABC. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

[2]UFAM.