

Introdução

O estudo de curvas geodésicas em superfícies é uma área importante na geometria diferencial e na matemática aplicada. Intuitivamente, geodésicas são curvas que minimizam a distância entre dois pontos em uma superfície.

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar uma abordagem computacional para o estudo de curvas geodésicas em superfícies de revolução utilizando softwares gratuitos de simulações geométricas.

Geodésicas em superfícies

Definição. Uma curva regular parametrizada não-constante $\gamma: I \rightarrow S$ é chamada *geodésica em $t_0 \in I$* se o seu campo de vetores tangentes $\omega(t) = \gamma'(t)$ é paralelo em t_0 ao longo da curva $\gamma(t)$. Em outras palavras, temos a derivada covariante:

$$\frac{D\gamma'}{dt}(t_0) = 0, \quad t_0 \in I,$$

assim, dizemos que $\gamma(t)$ é uma *curva geodésica parametrizada* se é geodésica para todo $t \in I$.

Intuitivamente, a curva $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$ é dita ser uma geodésica se sua *aceleração* $\gamma''(t)$ é *normal* à S em $(u(t), v(t))$ para todo $t \in I$, i.e.,

$$\langle \gamma''(t), X_u(t) \rangle = \langle \gamma''(t), X_v(t) \rangle = 0.$$

Ademais, note que uma geodésica pode ter auto-intersecções, mas é sempre uma curva regular.

Exemplo. Seja S o hiperboloide de uma folha dado pela parametrização $X: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(u, v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, \sinh v),$$

onde $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [-\pi, \pi]$. O equador parametrizado por $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ é uma curva geodésica em S .

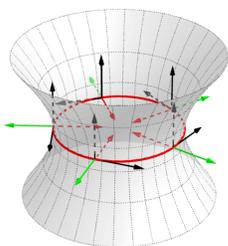


Figura 1: Geodésica no hiperboloide.

Exemplo. Seja S^2 a esfera unitária concedida pela parametrização regular $X: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(u, v) = (\sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v),$$

onde $u \in [0, 2\pi]$ e $v \in [0, \pi]$. Afirmamos que os círculos maximais são curvas geodésicas em S^2 .

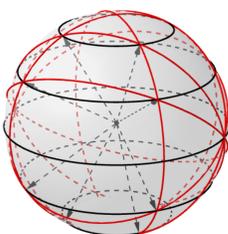


Figura 2: Geodésicas na esfera unitária.

Lema. Se $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ é uma isometria e $\gamma: I \rightarrow S_1$ é uma geodésica parametrizada de S_1 , então $\delta = \varphi \circ \gamma$ é uma geodésica parametrizada de S_2 .

Exemplo. Seja C o cilindro de raio unitário dado por:

$$X: (u_0 - \pi, u_0 + \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow C - \{\overline{\alpha(t)}\} \\ (u, v) \mapsto X(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

onde $\overline{\alpha(t)} = (\cos(u_0 - \pi), \sin(u_0 - \pi), v)$ é o meridiano dado por $u = u_0 - \pi$. Todo meridiano $\alpha(t)$, $t \in I$, é uma geodésica no cilindro C . Por outro lado, todo paralelo $\eta(t)$, $t \in I$, de C é uma geodésica.

Note que a aplicação X do cilindro C é isométrica ao plano $\tilde{\Pi} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $u_0 - \pi < u < u_0 + \pi$. Portanto, a curva $\alpha(s) \subset C$ é uma geodésica $\iff \beta(s) = (u(s), v(s))$ é uma geodésica de $\tilde{\Pi}$ tal que $\beta(s_0) = (u_0, v_0)$;

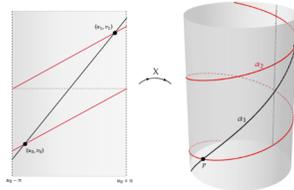


Figura 3: Geodésicas no cilindro.

De fato, a hélice $a_n: \mathbb{R} \rightarrow C$ é dada por:

$$\alpha_n(s) = (\cos(A_n s + u_0), \sin(A_n s + u_0), B_n s + v_0),$$

$$A_n = \frac{2\pi n + s_1 a}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}}, \quad B_n = \frac{b s_1}{\sqrt{(2\pi n + s_1 a)^2 + b^2 s_1^2}},$$

Sejam $J \subset I$ um intervalo aberto contendo t_0 tal que $\gamma(J) \subset V$, e $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in J$, a expressão de $\gamma: J \rightarrow S$ na parametrização X . Então, $\gamma(t)$ é uma geodésica se, e somente se, o sistema:

$$\begin{cases} u''(t) + \Gamma_{11}^1 (u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^1 (v'(t))^2 = 0, \\ v''(t) + \Gamma_{11}^2 (u'(t))^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'(t)v'(t) + \Gamma_{22}^2 (v'(t))^2 = 0, \end{cases}$$

é satisfeito para todo intervalo aberto $J \subset I$ tal que $\gamma(J) \subset V$.

Superfícies de revolução

Seja a parametrização $X: [0, 2\pi] \times (a, b) \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de uma superfície de revolução definida por:

$$X(u, v) = (f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v)), \quad f(v) > 0.$$

Isto posto, o sistema de equações diferenciais das geodésicas de S se reduz à:

$$\begin{cases} u''(t) + \frac{2f(v)f'(v)}{(f(v))^2} u'(t)v'(t) = 0, \\ v''(t) - \frac{f(v)f'(v)}{(f(v))^2 + (g'(v))^2} (u'(t))^2 + \frac{f'(v)f''(v) + g'(v)g''(v)}{(f(v))^2 + (g'(v))^2} (v'(t))^2 = 0. \end{cases}$$

Portanto, os meridianos $u = \text{const.}$ e $v = v(s)$ são curvas geodésicas. Os paralelos $u = u(s)$ e $v = \text{const.}$ são geodésicas $\iff f'(v) = 0$. Para $u = u(s)$ e $v = v(s)$, podemos reparametrizar por $\delta(v) = X(u(v), v)$ onde:

$$u(v) = \pm c \int \frac{1}{f(v)} \sqrt{\frac{(f'(v))^2 + (g'(v))^2}{(f(v))^2 - c^2}} dv + K,$$

Exemplo. Seja S o paraboloides de revolução dado pela parametrização regular $X: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v^2),$$

onde $v \in (0, +\infty)$ e $u \in [0, 2\pi]$. Utilizando do resultado anterior, conseguimos computar geodésicas em S .

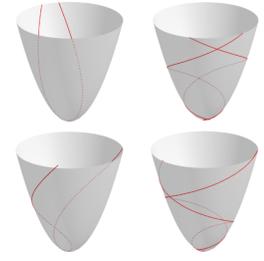


Figura 4: Exemplos de geodésicas no paraboloides.

Softwares de simulação

Todas as imagens até então foram simuladas no software gratuito de geometria: *GeoGebra*. Uma linguagem de programação gratuita para simulações mais complexas é *Júlia*, uma ferramenta que se inspira no software matemático *Matlab* utilizando-se do ambiente *Python*.



Método do ponto médio: Considere um caminho dado por um conjunto finito de pontos p_1, \dots, p_n , onde $p_i = (x_i, y_i)$. Após m iterações, o caminho é formado por pontos (x_i, y_i^m) onde,

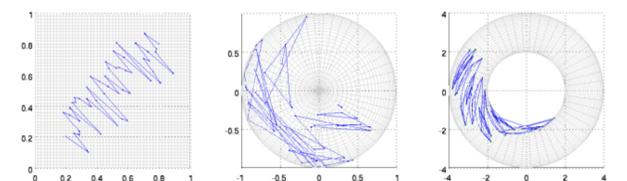
$$y_i^m = \frac{\sum_{j=0}^{\min(m, n-i)} y_{i+j} \binom{m}{j}}{2^m},$$

para superfícies em \mathbb{R}^3 , calculamos o ponto $m' \in S$ mais próximo de m e utilizamos ele para a iteração.

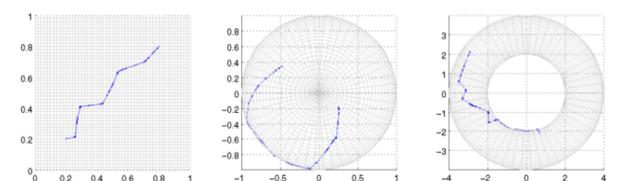
Gradiente descendente: Parecido com o método anterior, examinamos o ponto médio de cada sequência consecutiva de três pontos definidos pelo caminho γ . Neste caso, fixamos p_i e p_{i+2} e escolhemos um ponto médio u na vizinhança de p_{i+1} .

Newton-Raphson: Consiste em resolver o sistema de geodésicas pelo método das diferenças finitas. Defina $\varepsilon = \frac{1}{N}$, $N > 0$ inteiro, e divida I em N partes iguais. Seja $x^p = \gamma(p\varepsilon)$ e x_j^p a j -ésima coordenada de x^p , $1 \leq j \leq 2$ e $1 \leq p \leq 2$. Finalmente tal método se propõe a resolver o sistema:

$$x_k^p = \frac{x_k^{p+1} + x_k^{p-1}}{2} + \frac{1}{4} \sum_{k,j} \Gamma_{i,j}^k(x^p) \Delta x_i^p \Delta x_j^p.$$



(a) Initial Path on tt plane (b) Initial Path on tt sphere (c) Initial Path on tt torus



(d) Iteration 500 (e) Iteration 500 (f) Iteration 500

Figura 5: Iterações do método gradiente descendente.

Referências

- [1] DO CARMO, Manfredo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 2005.
- [2] BAEK, J.; DEOPURKAR, A.; REDFIELD, K. *Finding geodesics on surfaces*. Stanford. Disponível em: <https://cs.stanford.edu/people/jbaek/18.821.paper2.pdf>