Equações diofantinas com soluções na sequência de Fibonacci

Alvarenga, Roberto [1]; Chaves, Ana [2]; Lima, Matheus [3]; Ramos, Maria [4] e Sosa, Marcos [5];

Resumo: *Nosso objetivo é determinar soluções para equações diofantinas sobre os números de Fibonacci k-generalizados. Em particular, nós generalizamos em diversas direções a equação clássica* $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$.

Palavras-chave: *Fibonacci, equação diofantima, forma linear em logaritmo.*

1. Introdução

Seja $(F_n)_n$ a sequência de Fibonacci definida como $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \geq 0$ com condições iniciais $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. Os números de Fibonacci são famosos por suas propriedades fascinantes e pelas notáveis conexões com áreas como biologia, arquitetura, computação e muitas outras. Uma das características mais interessantes dos números de Fibonacci é que a soma de quadrados consecutivos sempre permanece na sequência:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \tag{1}$$

Isso implica que a equação diofantina $x^2 + y^2 = z$ possui infinitas soluções na sequência de Fibonacci e motiva o estudo das soluções de outras equações diofantinas na sequência de Fibonacci e também em suas generalizações. Dentre as diversas generalizações da sequência de Fibonacci, temos a sequêcia de Fibonacci k-generalizada $(F_n^{(k)})_{n \geq -(k-2)}$ para $k \geq 2$, definida como $F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + \cdots + F_n^{(k)}$, com as condições iniciais $F_{-k+2} = F_{-k+1} = \cdots = F_0 = 0$ e $F_1 = 1$. A sequência tem nomes especiais quando $k = 3$ e $k = 4$ sendo chamada, respectivamente, de Tribonacci e Tetranacci. Os números de Tribonacci e Tetranacci são muito importantes e aparecem em alguns algoritmos na área de probabilidade.

2. Resultados anteriores

Ao observar a equação (1), é natural se perguntar o que ocorre quando somamos quadrados de dois números da sequência de Fibonacci k-generalizada não necessariamente consecutivos ou diferentes. Essa questão foi parcialmente respondida por Chaves e Marques [1].

Teorema 3.1 (Chaves-Marques, 2014) *Sejam m e k inteiros não negativos, a equação diofantina*

$$(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n$$

não possui solução quando $m > 1$ e $k \geq 3$.

Outra questão que advém prontamente da análise da equação (1) é o que acontece quando somamos potências, não necessariamente quadrados, de uma quantidade arbitrária de números de Fibonacci, não necessariamente consecutivos. Essa pergunta também veio a ser respondida parcialmente, dessa vez por Luca e Oyono [2].

Teorema 3.2 (Luca-Oyono, 2011) *Sejam m e s inteiros não negativos, a equação diofantina*

$$F_m^s + F_{m+1}^s = F_n$$

não possui solução quando $m \geq 2$ e $s \geq 3$.

3. Resultados obtidos

Nosso primeiro resultado é uma versão generalizada do Teorema de Chaves e Marques, onde não pedimos que os números de Fibonacci sejam consecutivos, tampouco diferentes.

Teorema 4.1 (Alvarenga-Chaves-Lima-Ramos-Sosa, 2024) *Sejam $n, k, d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $n \geq 1$ e $k \geq 2$, as soluções da equação diofantina*

$$(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+d}^{(k)})^2 = F_m^{(k)} \tag{2}$$

são $(n, d, m) = (a, 0, 2a-1)$ para $1 \leq a \leq \lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor$, $(n, d, m) \in \{(1, 2, 5), (1, 0, 3), (2, 0, 3), (3, 0, 6), (n, 1, 2n+1)\}$ para $k = 2$ ou $n = d = 1$.

Também abordamos generalizações do teorema de Luca e Oyono. Primeiro consideramos somas de potências de números de Fibonacci não consecutivos. Seja $s > 2$ e $x \neq y$, resolvemos completamente a equação diofantina $x^s + y^s = z$ nos números de Fibonacci.

Teorema 4.2 (Alvarenga-Chaves-Lima-Ramos-Sosa, 2024) *Sejam $m, d, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ com $d \geq 1$, a equação diofantina*

$$F_m^s + F_{m+d}^s = F_n \tag{3}$$

não possui solução quando $m \geq 2$ e $s \geq 3$.

Outra generalização do teorema de Luca e Oyono surge quando consideramos uma quantidade arbitrária de potências de números de Fibonacci consecutivos sendo somada, como no teorema a seguir.

Teorema 4.3 (Alvarenga-Chaves-Lima-Ramos-Sosa, 2024) *Sejam $m \geq 3$, $s \geq 3$, $d \geq 2$ inteiros, se $d + 1 < m$ a equação diofantina*

$$F_m^s + F_{m+1}^s + \ldots + F_{m+d}^s = F_n \tag{4}$$

não possui solução.

4. Métodos

A estratégia para demonstrar o teorema 4.1 foi mostrar que, exceto por casos triviais, a soma $(F_n^{(k)})^2 + (F_{n+d}^{(k)})^2$ sempre se encontra entre dois números de Fibonacci consecutivos. Para isso, utilizamos os seguintes lemas

Lema 5.1 (Alvarenga-Chaves-Lima-Ramos-Sossa-2024) *Seja $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $m \geq 3$ um número inteiro, então*

$$\alpha^{m-\frac{7}{4}} < F_m < \alpha^{m-\frac{3}{2}}$$

Lema 5.2 (Alvarenga-Chaves-Lima-Ramos-Sossa-2024) *Dados $m \geq 1$ um número inteiro, o m-ésimo termo da sequência de Fibonacci k-generalizada pode ser escrito como:*

$$F_m^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} F_{A-j}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^{k-1-j} F_{m-A-i}^{(k)} \right)$$

para todo A, com $1 \leq A \leq m-1$ sempre que $k \geq 2$.

Para provar os teoremas 4.2 e 4.3., aplicamos os lemas a seguir

Lema 5.3 (Matveev[3]-2000) *Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ números reais positivos em um corpo algébrico $\mathbb{K}$ de grau D, e $b_1, b_2, \ldots, b_k$ inteiros tais que $\Lambda := \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \cdots \alpha_k^{b_k} - 1 \neq 0$, então*

$$|\Lambda| > \exp\left(-C_{k,D}(1 + \log(B)) A_1 A_2 \cdots A_k\right)$$

onde

$$C_{k,D} := 1.4 \cdot 30^{k+3} \cdot k^{4.5} \cdot D^2(1 + \log(D))$$

$$B \geq \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_k|\}$$

$$A_i \geq \max\{Dh(\alpha_i), |\log(\alpha_i)|, 0.16\}$$

com $h(\alpha_i)$ sendo a altura logarítimica do algébrico α_i.

Lema 5.4 (Dujella-Pethő[4]-1998) *Considere a norma de um número real com sendo a distância deste número ao inteiro mais próximo. Seja M um inteiro positivo e $\frac{p}{q}$ um convergente da fração contínua do irracional γ tal que $q > 6M$. Seja μ um número real e defina-se $\epsilon := ||\mu q|| - M||\gamma q||$. Se $\epsilon > 0$, então não existe solução para a inequação*

$$0 < n\gamma - s + \mu < AB^{-n}$$

em inteiros positivos n e s, com

$$\frac{\log(Aq/\epsilon)}{\log(B)} \leq n \leq M.$$

Lema 5.5 (Legendre[5]) *Seja x um irracional e p e q inteiros não nulos. Se*

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de x.

Para demonstrar os dois últimos teoremas utilizamos propriedades dos números de Fibonacci para conseguir uma cota para s em função de m, n e d, em seguida observamos que F_m^s é menor que F_{m+1}^s por um fator exponencial, com o método de Matveev conseguimos cotar o s apenas em função de m e d. O lema de Dujella e Pethő juntamente com o teorema de Legendre nos possibilitou diminuir consideravelmente a cota do s. Por fim, um programa computacional foi criado para calcular as soluções nos casos finitos que restaram.

5. Conclusão

Sabemos que a equação $F_m^2 + F_{m+1}^2 = F_n$ sempre possui solução, basta considerar $n = 2m+1$ e teremos a clássica equação (1). Apesar disso, ao fim desse trabalho, concluímos que o mesmo não ocorre para as generalizações $F_m^s + F_{m+d}^s = F_n$, $(F_m^{(k)})^2 + (F_{m+1}^{(k)})^2 = F_n$ e $F_m^s + F_{m+1}^s + \ldots + F_{m+d}^s = F_n$. Além disso, os resultados obtidos nos dão informações sobre quais são as soluções destas generalizações.

Referências

[1] Chaves, A.; Marques, D.; **A Diophantine equation related to the sum of squares of consecutives k-generalized Fibonacci numbers**. The Fibonacci Quarterly, V. 52, No 1, 70-74, 2014.

[2] Luca, F.; Oyono, R.; **An exponential Diophantine equantion related to the powers of two consecutive Fibonacci numbers**. Colloquium Mathematicum, Vol. 137, No. 2, 2011.

[3] Matveev, E.M.; **An explict lower bound for a homogeneous rational linear form in logarithms of algebraic numbers**. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat., 2000.

[4] Dujella, A.; Pethő.; **A generalization of a theorem of Baker and Davenport**. Quart. J. Math. Oxford Ser., 1998.

[5] Martinez, F.B.; Moreira, C.G.; Saldanha, N.; Tengan, E.; **Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. SBM, 2024.

Apoios:

[1] ICMC-USP Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP
[2] IME-UFG. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP
[3] ICMC-USP. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP
[4] ICEx-UFMG. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP
[5] UNILA. Este autor foi apoiado pelo CeMEAI e pela FAPESP