X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Derivada Fracionária e o Problema da Tautócrona

de Oliveira Fontes, Luís Henrique

Resumo:
Apresentamos neste trabalho um estudo introdutório das integrais e derivadas de ordem fracionária, um conceito introduzido pelo marquês de L'Hospital e seu amigo Leibniz no século XVII e que contou com a contribuição de grandes matemáticos tais como, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville dentre outros. Deste modo, o cálculo de ordem não-inteira, conhecido hoje como Cálculo Fracionário tem se mostrado muito adequado para o estudo de fenômenos físicos. Neste trabalho, daremos as bases do Cálculo Fracionário e algumas de suas propriedades e como aplicação exibiremos a solução de Abel para o problema da Tautócrona, visto do ponto de vista do Cálculo Fracionário. Este trabalho foi desenvolvido no meu Trabalho de Conclusão de Curso tendo por base as seguintes referências, [1] e [2].

Palavras-chave: *Cálculo Fracionário, Transformada de Laplace, Função Gamma, Tautócrona*

1. Introdução

O Cálculo Fracionário permite uma descrição matemática mais precisa de certos fenômenos físicos. Neste trabalho, daremos a definição de Integral Fracionária e Derivada Fracionária no sentido de Riemann-Liouville, bem como apresentar algumas de suas propriedades.

Segundo [2] o conceito de Derivada Fracionária é tão antigo quanto o surgimento do Cálculo Clássico. Considera-se que seu nascimento se deu no ano de 1695, numa troca de correspondências entre o marquês de L'Hospital e seu amigo Leibniz. Nestas correspondências Leibniz indagou sobre a possibilidade de derivar $1/2$ vez uma função. A resposta de Leibniz permitiu estender a definição de derivada de ordem inteira para uma derivada de ordem arbitrária. Além da resposta afirmativa de Leibniz ao problema proposto, o desenvolvimento desta teoria contou com a contribuição de inúmeros matemáticos importantes tais como, Euler, Lagrange, Laplace, Fourier, Abel, Heaviside, Liouville entre outros, que levaram às primeiras definições de derivadas e integrais de ordens não-inteiras, que no final do século XIX, devido primordialmente as definições propostas por Riemann-Liouville e Grünwald-Letnikov, pareciam estar completas.

Com base nas definições de Caputo e Grünwald-Letnikov, diversos autores demonstraram nas últimas décadas que o cálculo fracionário oferece uma descrição mais precisa de fenômenos naturais em comparação com o cálculo tradicional, devido à sua capacidade de capturar efeitos de memória e propriedades hereditárias.

2. Conceitos Preliminares

Definição 3.1 (Função Gamma) *Para cada $z \in \mathbb{C}$ tal que $Re(z) > 0$ definimos a função gamma através da seguinte integral imprópria*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{1}$$

Definição 3.2 *A transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathcal{L}f(t)$ ou por $F(s)$ é definida pela integral*

$$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{2}$$

sempre que a integral imprópria convergir.

Note que a transformada de Laplace é um operador integral cujo núcleo é dado pela função integrável $K(s,t) = e^{-st}$. Além disso, a transformada de Laplace constitui-se numa importante ferramente para a resolução de equações diferenciais ordinárias.

Definição 3.3 (Função de Gel'fand-Shilov) *Sejam $\alpha > 0$, definimos a função de Gel'fand-Shilov como*

$$\phi_\alpha(t) := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t \leq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Definição 3.4 *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função $f(t)$ seccionalmente contínua no intervalo $(0,\infty)$ e integrável em qualquer subintervalo de $[0,\infty)$ é dada por*

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

com $Re(\alpha) > 0$, $t > 0$ e $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Observação 3.1 *Note que a integral fracionária de Riemann-Liouville pode ser representada pela seguinte convolução*

$$J^\alpha f(t) = (f * \phi_\alpha)(t), \tag{5}$$

sendo ϕ_α definida em (3).

Definição 3.5 *Sejam α um número complexo tal que $Re(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior que $Re(\alpha)$, assim $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função é dada por*

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\alpha-m+1}}\, d\xi. \tag{6}$$

3. Aplicação da Tautócrona

Como é feito na referência [2]. O problema da Tautócrona consiste em determinar uma curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem fricção, em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida.

A solução proposta por Abel baseia-se no princípio da conservação de energia, que afirma que a energia total em um sistema isolado permanece constante. Aplicando este princípio, chegamos à seguinte equação integral

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y_0 - \xi)^{-1/2} s'(\xi)\, d\xi \tag{7}$$

onde τ represente o tempo total da queda. No caso em que a curva é tautócrona temos que τ é uma constante. Notemos que a equação (7) pode ser vista como um produto convolução. Neste caso, aplicando transformada de Laplace em ambos os membros obtemos após algumas substituições a seguinte equação diferencial

$$\frac{ds}{dy} = 2C_0 \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{8}$$

sendo $C_0 = \frac{\tau}{\pi}\sqrt{2g}$ e g a aceleração da gravidade.

A seguir temos a explicação de como é feito, para determinar essa curva.

Pelo *Princípio da Conservação de Energia* temos que a quantidade total de energia em um sistema isolado permanece constante, além disso, a soma entre energia potencial gravitacional e energia cinética é constante.

E que a energia cinética em um ponto A somado a energia potencial no ponto A é igual a energia cinética em um ponto B somado a energia potencial no ponto B.

$$E_C^A + E_{P_G}^A = E_C^B + E_{P_G}^B \tag{9}$$

Assim, após alguns cálculos, obtemos

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2g}} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{ds}{dy}\right) dy \tag{10}$$

Sabemos que se integrarmos a derivada de função $f(t)$ com relação a t obteremos a primitiva T. Logo integrando ambos os lados da equação no intervalo de $[y_0, 0]$, temos

$$T(y_0) = \int_{y=y_0}^{y=0} dt = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{y=y_0}^{y=0} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{ds}{dy}\right) dy \tag{11}$$

Como queremos que $T(y_0)$ como sendo o tempo total de queda, então sejum τ tal que

$$\begin{aligned} \int_{y=y_0}^{y=0} 1 \cdot\ dt &= \int_0^\tau 1 \cdot\ dt = \tau \\ T(y_0) &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y_0} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{ds}{dy}\right) dy \end{aligned} \tag{12}$$

Agora devemos aplicar a transformada de Laplace em ambos os lados da equação (11), usando produto convolução e então aplicando a transformada de Laplace inversa obtemos

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}}. \tag{13}$$

4. Conclusão

A solução proposta por Abel se baseia na ideia de que a integral da equação (7) é igual a definição de integração fracionária de ordem $1/2$, com exceção do fator multiplicativo $1/\Gamma(1/2) = 1/\sqrt{\pi}$. Assim aplicando a derivada de Riemann-Liouville de ordem $1/2$ em ambos os lados da equação

$$\frac{d^{1/2}}{dy^{1/2}} \tau \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{d^{1/2}}{dy^{1/2}} \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^{y_0} (y - y_0)^{-1/2} \left(\frac{ds}{dy}\right) dy\right]. \tag{14}$$

Logo obtemos

$$\frac{\tau}{\sqrt{\pi y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}} \left(\frac{ds}{dy}\right), \tag{15}$$

E então

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} \tag{16}$$

Isolando o termo ds

$$ds = \frac{\tau\sqrt{2g}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \tag{17}$$

E portanto integrando os dois lados da equação, temos

$$s(y) = \frac{2\tau\sqrt{2g}}{\pi} y^{1/2}. \tag{18}$$

Referências

[1] CAMARGO, R.F., **Cálculo Fracionário e Aplicações**. 2009 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica., Campinas, 2009.

[2] RAMOS, P. F. P.; CAMARGO, R. F. Cálculo fracionário aplicado ao problema da tautócrona. C.Q.D. - **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. Bauru, v. 1, p. 15-22, dez. 2012.

Apoios: