UM PROBLEMA OLÍMPICO E MÚLTIPLAS POSSIBILIDADES

Thiago Vieira da Silva /thiagovs0101@gmail.com /Instituto Federal do Paraná
Andreia Araújo de Farias Aquino /andreia.aquino@ifpr.edu.br /Instituto Federal do Paraná
Luciana Yoshie Tsuchiya /luciana.tsuchiya@ifpr.edu.br /Instituto Federal do Paraná

Introdução

Este trabalho aborda um problema olímpico da Olimpíada de Matemática das Instituições Federais (OMIF) proposto em oficinas de resolução de problemas para alunos do Ensino Médio do IFPR, campus Paranavaí. Durante as oficinas, surgiram várias estratégias de resolução do problema. Apresentaremos as soluções propostas pelos seus participantes e alguns aspectos teóricos relacionados.

Apresentação do Problema

Existe um método bastante simples de gerar triplas pitagóricas. O processo é o seguinte: escolha dois números naturais distintos quaisquer a e b calcule o dobro do produto de a por b, calcule o valor absoluto da diferença entre os quadrados de a e b, calcule a soma dos quadrados de a e b. Pronto! Os três números calculados formam uma tripla pitagórica.
Qual é o valor absoluto da diferença entre os dois números naturais, a e b, que devem ser escolhidos para se gerarem os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 145 e um dos catetos medindo 17? (Adaptado).

Aspectos Teóricos

Triplas pitagóricas são conjuntos de três números inteiros positivos que satisfazem a relação matemática do Teorema de Pitágoras.
É fácil ver que triplas geradas pelo método apresenado são pitagóricas, mas dada uma tripla pitagórica qualquer, será que existem números inteiros positivos a e *b* tais que essa tripla pode ser gerada pelo método apresentado?

A resposta é nem sempre. Não existem, por exemplo, números inteiros positivos que gerem a tripla pitagórica *(15,12,9)* pelo método apresentado. No entanto, é possível mostrar os seguintes resultados [1]:

Teorema: *Seja (x,y,z) uma tripla pitágorica com* $z^2 = x^2 + y^2$ *, tal que mdc(x, y, z) = 1, então existem a e b inteiros positivos, tais que* $z = a^2 + b^2$, $x = a^2 - b^2$ e $y = 2ab$.

Triplas pitágóricas *(x, y, z)* tais que *mdc(x,y,z) = 1* são ditas *primitivas*.

Proposição: *Se (x, y,z) é uma tripla pitágorica tal que mdc(x, y, z) = d, com* $d \neq 1$, *então existem a e b, inteiros positivos, tais que* $z = d(a^2 + b^2)$, $x = d(a^2 - b^2)$ e $y = 2dab$.

Dessa forma, podemos concluir que ou uma tripla pitagórica é primitiva e logo é gerada pelo método apresentado, ou ela é um múltiplo de uma tripla pitagórica primitiva.

Soluções para o problema

A seguir apresentamos as soluções que foram propostas pelos participantes da oficina.
Quatro estratégias se desdobraram das seguintes conclusões comuns a todas as resoluções:

Pelo Teorema de Pitágoras as medidas do triângulo são (145, 144, 17).
(1) *Por paridade, a única possibilidade é que 2ab = 144, e portanto ab = 72.*
(2) *Temos que* $a^2 + b^2 \geq |a^2 - b^2|$, então $a^2 + b^2 = 145$.
(3) Logo $|a^2 - b^2| = 17$.

Resolução 1: *Por (1) e por (2) temos*

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 145 - 144 = 1$$

Donde concluímos que $|a - b| = 1$.

Resolução 2: *Sem perda de generalidade suponha a > b. Assim*

$$a^2 + b^2 = 145 \quad \text{e} \quad a^2 - b^2 = 17$$

Somando as duas equações temos $2a^2 = 162$ *, o que implica que a = 9.*
Por (1) obtemos que b = 8. Logo $|a - b| = 1$.

Resolução 3: *Substituindo a = 72/b em* $a^2 + b^2 = 145$ *e realizando manipulações algébricas obtemos* $b^4 - 145b^2 + 5184 = 0$.
Colocando $x = b^2$ *obtemos a equação*

$$x^2 - 145x + 5184 = 0$$

Usando Bháskara obtemos x = 81 ou x = 64, donde b = 9 ou b = 8.

Resolução 4: *Supondo a > b, temos*

$$|a^2 - b^2| = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 17.$$

Como 17 é um número primo, a única opção é (a + b) = 17 e (a - b) =1 de sorte que resolvendo o sistema obtemos a solução a= 9 e b = 8.
Portanto, |a - b| = 1.

Conclusões

Ao analisarmos as resoluções apresentadas percebemos a mobilização de diferentes conteúdos matemáticos em cada abordagem. Na Resolução 1, destaca-se o uso do produto notável e manipulações algébricas simples para encontrar a diferença entre os números naturais. Já na Resolução 2 é evidenciada a utilização de técnicas de álgebra para resolver um sistema de equações. A Resolução 3 demonstra o emprego de técnicas mais avançadas, como a resolução de uma equação biquadrática através da fórmula de Bhaskara, sendo necessário um domínio maior sobre conteúdos de álgebra e polinômios. Por fim, na Resolução 4, observa-se a aplicação de conceitos de fatoração e manipulação algébrica, culminando na resolução de um sistema de equações lineares. Portanto, as diversas abordagens utilizadas pelos alunos demonstram não apenas a diversidade de caminhos para a solução do problema, mas também a variedade de conteúdos matemáticos mobilizados, ressaltando a importância da flexibilidade e criatividade na resolução de problemas matemáticos e o potencial de se trabalhar com problemas olímpicos.

Referências Bibliográficas

[1] Silva, N. V. da., *Gerando Ternos Pitagóricos,* Dissertação (Mestrado Profissional em Matematica) - Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014.
[2] 2021. *Olimpíada de Matemática das Instituições Federais* (OMIF). Primeira Fase.

Apoio Financeiro: Programa de Apoio à Implementação de Projetos de Ensino (PAIPE) do Instituto Federal do Paraná.