XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Teorema Multinomial para Quatérnions

Vasconcellos, Lucas[1]; Kuznetsova, Zhanna[2]

Resumo: *Neste trabalho, enuncia-se o Teorema Multinomial para Quatérnions em todos os seus casos, e apresentam-se as principais ideias envolvidas na demonstração do teorema: em essência, essa demonstração faz uso de conceitos combinatórios próprios de estruturas algébricas que anticomutam. Além disso, mostra-se uma aplicação do teorema ao cálculo de potenciais de um espaço de funções quaterniônicas*

Palavras-chave: *Quatérnions, Potencial, Combinatória anticomutativa.*

1. Enunciado do Teorema

Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra comutativa sobre o corpo $\mathbb{R}$. Para $a, b, c, d \in \mathbf{A}$, a expansão $(a+b+c+d)^n$ é

$$(a+b+c+d)^n = \sum_{k_0+k_1+k_2+k_3=n}^{n} \binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} a^{k_0} b^{k_1} c^{k_2} d^{k_3}. \quad (1)$$

Onde $k_1 = 0, ..., n$. O coeficiente multinomial é definido como

$$\binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} = \frac{n!}{k_0! k_1! k_2! k_3!}. \quad (2)$$

A identidade acima pode ser escrita também como

$$\binom{n}{k_0, k_1, k_2, k_3} = \binom{n}{k_0} \binom{n-k_0}{k_1, k_2, k_3}. \quad (3)$$

Através de (3), o teorema multinomial pode ser escrito como

$$(a+b+c+d)^n = \sum_{k_0=0}^{n} \binom{n}{k_0} a^{k_0} (b+c+d)^{n-k_0}. \quad (4)$$

Seja $\mathbb{H}$ o espaço vetorial dos quatérnions e seja $x \in \mathbb{H}$ um elemento quaterniônico escrito de forma

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad (5)$$

onde e_1, e_2, e_3 são os elementos quaterniônicos e e_0 é o elemento real da base de $\mathbb{H}$. O teorema abaixo foi inicialmente enunciado em [1].

Teorema. A expansão x^n pode ser expressa como

$$x^n = \sum_{k_0=0}^{n} \binom{n}{k_0} x_0^{k_0} c(k_0, k_1, k_2, k_3) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3},$$

onde

$$c(k_0,k_1,k_2,k_3) \begin{cases} = \sum_{k_1/2+k_2/2+k_3/2=(n-k_0)/2} \binom{\frac{1}{2}(n-k_0)}{\frac{1}{2}(k_1,k_2,k_3)} (-1)^{(n-k_0)/2}, \\ \text{ para } k_1, k_2, k_3 \text{ pares;} \\ = 0, \text{para ao menos dois } k_1, k_2, k_3 \text{ impares;} \\ = \sum_{\omega} \binom{\frac{1}{2}(n-k_0-1)}{\frac{1}{2}(k_1,k_i-1,k_3)} (-1)^{(n-k_0-1)/2} x_i e_i, \\ \text{ para um único } k_i (i=1,2,3) \text{ impar,} \\ \omega = (k_1-1)/2 + k_2/2 + k_3/2 = (n-k_0-1)/2 \end{cases}$$

(observação: $\frac{1}{2}(k_1,k_2,k_3) = (\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}, \frac{k_3}{2})$).

2. Demonstração

Primeiro Caso

O primeiro caso foi demonstrado em [1]. Os outros dois casos tiveram uma demonstração original pelo autor deste trabalho em sua dissertação de mestrado. Vamos começar com o primeiro caso. Para $x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, então

$$\begin{aligned} (x - x_0 e_0)^2 &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3)^2 \\ &= (-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_1 x_2 (e_1 e_2) + x_2 x_1 (e_2 e_1) + ...) \\ &= (-1)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$(x - x_0 e_0)^{2p} = (-1)^p (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^p, \ \forall p \in \mathbb{N}$$

E consequentemente

$$(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)^s = \begin{cases} (-1)^{s/2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{s/2}, \text{se s=2p;} \\ (-1)^{(s-1)/2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{(s-1)/2}(\sum_{i=1}^n x_i e_i), \\ \qquad \text{se s=2p+1.} \end{cases}$$

Logo, tomando $\beta = l_1 + l_2 + l_3 = (n-k_0)/2$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)^{n-k_0} = (-1)^{(n-k_0)/2} \sum_{\beta} \binom{(n-k_0)/2}{l_1, l_2, l_3} x_1^{2l_1} x_2^{2l_2} x_3^{2l_3}$$

quando $n - k_0$ é um número par, e quando $n - k_0$ for um número ímpar, temos

$$(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)^{n-k_0} = \alpha \cdot (-1)^{(n-k_0-1)/2} (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$$

onde

$$\alpha = \sum_{l_1+l_2+l_3=(n-k_0)/2} \binom{(n-k_0-1)/2}{l_1, l_2, l_3} x_1^{2l_1} x_2^{2l_2} x_3^{2l_3}.$$

Isso termina o primeiro caso.

Segundo Caso

Sem perda de generalidade, sejam k_1, k_2 números ímpares e seja $k_0 = 0$ (pois e_0 comuta com todos os elementos). Um coeficiente multinomial de 3 elementos pode ser escrito como

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{k_1}{k_1} \binom{k_1 + k_2}{k_2} \binom{n}{k_3},$$

Se k_1, k_2 são números impares, então $k_1 + k_2 = 2k$ é um número par estritamente maior que k_1 e k_2. Logo, $\binom{2k}{k_2}$ é um número par, e consequentemente $\binom{n}{k_1,k_2,k_3}$ é um número par também.

Se $\binom{n}{k_1,k_2,k_3} = 2m$ é um número par, temos um conjunto de $2m$ combinações onde x_1e_1 aparece k_1 vezes, x_2e_2 aparece k_2 vezes e x_3e_3 aparece k_3 vezes.

Seja S uma string de n caracteres de forma

$$S = s_1 s_2 s_3 ... s_n,$$

então existem $2m$ formas de escrever esta string, quando x_1e_1 aparece k_1 vezes, x_2e_2 aparece k_2 vezes e x_3e_3 aparece k_3 vezes.

Qualquer possível combinação da string $S = s_1s_2s_3...s_n$ pode ser gerada por uma única permutação de dois caracteres adjacentes.

Podemos arranjar o conjunto de $2m$ combinações da string S através de m relações de igualdade. Fixamos uma string S_1, e por essa string, geramos todas as outras strings por uma única permutação de dois caracteres adjacentes. Se existe dois caracteres diferentes entre si nas posições $i, i+1$ da string S_1, então a string S_2 é diferenciada por única permutação de dois caracteres nas posições $i, i+1$. Isto é, se

$$S_1 = s_1 s_2 ... s_i s_{i+1} ... s_n, \quad (6)$$

então

$$S_2 = s_1 s_2 ... s_{i+1} s_i ... s_n. \quad (7)$$

Se $s_i \neq s_{i+1}$, então por anti-comutatividade, temos $S_1 = -S_2$ (se $s_i = s_{i+1}$, a string é a mesma e não geramos nenhuma combinação nova do conjunto de $2m$ elementos).

Temos agora $2m - 2$ strings restantes. Repetimos este processo entre as strings restantes em ordem de obter m relações de igualdade de forma

$$\begin{aligned} &S_1 = s_1 s_2 s_3 ... s_n = -S_2 = -s_{\rho_1(1)} s_{\rho_1(2)} s_{\rho_1(3)} ... s_{\rho_1(n)} \\ &... \\ &S_{2m-1} = s_{\rho_{2m-2}(1)} s_{\rho_{2m-2}(2)} s_{\rho_{2m-2}(3)} ... s_{\rho_{2m-2}(n)} \\ &\ = -S_{2m} = -s_{\rho_{2m-1}(1)} s_{\rho_{2m-1}(2)} s_{\rho_{2m-1}(3)} ... s_{\rho_{2m-1}(n)}. \end{aligned}$$

Onde $s_{\rho_i(j)}$ denota uma permutação dos elementos da string S_1 onde as strings S_j e S_{j+1} diferem apenas por dois caracteres. Se somarmos todas as combinações de strings acima, o resultado dará 0. Este resultado pode ser generalizado para quaisquer dois coeficientes ímpares k_1, k_2, k_3. Isso finaliza o segundo caso.

Terceiro Caso

Vamos para o terceiro caso. Sem perda de generalidade, seja $k_0 = 0$ e k_1 um elemento ímpar e k_2, k_3 elementos pares. A regra de Pascal nos dá

$$\binom{n}{k_1, k_2, k_3} = \binom{n-1}{k_1-1, k_2, k_3} + \binom{n-1}{k_1, k_2-1, k_3} + \binom{n-1}{k_1, k_2, k_3-1}$$

Quando $n > 1$, k_1 número ímpar e k_2, k_3 números pares, então

$$\binom{n-1}{k_1-1, k_2, k_3} \Longrightarrow \text{corresponde a um conjunto de permutações onde todos os coeficiente são pares.}$$

$$\binom{n-1}{k_1, k_2-1, k_3} \Longrightarrow \text{corresponde a um conjunto de permutações onde dois coeficientes são números ímpares.}$$

O conjunto de permutação caracterizado por

$$\binom{n-1}{k_1-1, k_2, k_3}$$

cai no primeiro caso. E os conjuntos de permutações caracterizados por

$$\binom{n-1}{k_1, k_2-1, k_3}, \binom{n-1}{k_1, k_2, k_3-1}$$

caem no segundo caso. Estamos interessados no conjunto de permutações de strings de comprimento n, e o conjunto que denota o número de combinações $\binom{n-1}{k_1-1,k_2,k_3}$ é um conjunto de permutação de comprimento n quando um caractere é fixado numa posição (o caractere em questão é x_1e_1). Logo,

$$c(k_1, k_2, k_3) = \sum_{\omega} \binom{\frac{1}{2}(n-1)}{\frac{1}{2}(k_1-1, k_2, k_3)} (-1)^{(n-1)/2} x_1 e_1.$$

Isto finaliza o terceiro caso.

3. Aplicações

Considere um sistema físico onde a energia potencial é descrita como a exponencial de uma função $\phi^n(\mathbf{q})$, $\mathbf{q}$ é o conjunto das coordenadas generalizadas do sistema. Investigamos sistemas físicos simétricos sob uma álgebra de Lie Z2Z2 graduada descrita por campo quaterniônico $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Se $\phi(\mathbf{q})$ pertence a este espaço, então

$$\phi = \phi_0 e_0 + \phi_1 e_1 + \phi_2 e_2 + \phi_3 e_3.$$

Podemos usar o Teorema para calcular a Lagrangiana e as equações de Euler Lagrange para este sistema. Por exemplo, considere a Lagrangiana de ϕ

$$L = \dot{\phi}^2 + \phi_\rho^2 - V(\phi), \quad (8)$$

onde $\dot{\phi}^2 + \phi_\rho^2$ é a parte cinética e $V(\phi)$ a parte potencial. Se $V(\phi) = \phi^3$, então, aplicando o procedimento descrito no Teorema e extraindo a parte real, obtemos::

$$\phi^3 = \phi_0^3 - \phi_0 \sum_{i=1}^{3} \phi_i^2. \quad (9)$$

Se $V(\phi) = \phi^4$, então pelo procedimento descrito no Teorema e extraindo a parte real de ϕ^4, obtemos

$$\phi^4 = \phi_0^4 + \phi_1^4 + \phi_2^4 + \phi_3^4 - 2\phi_1^2\phi_2^2 - 2\phi_1^2\phi_3^2 - 2\phi_2^2\phi_3^2 - 6\phi_0^2 \sum_{i=1}^{3} \phi_i^2.$$

Referências

[1] Sirkka-Liisa Eriksson-Bique, *The Binomial Theorem for Hypercomplex Numbers*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica, vol. 24, pp. 225–229, 1999.

[2] Kuznetsova, Z. e Vasconcellos, L. *Z2Z2-graded Lie Algebras and Superalgebras and Related Physical Models*, Journal of Physics: Conference Series, vol. 2667, pp. 012017, 2023. DOI: 10.1088/1742-6596/2667/1/012017

Apoios:

[1] UFABC. Este autor foi apoiado pela CAPES
[2] UFABC