X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

As Origens da Teoria dos Feixes e seu Desenvolvimento

Silva, Lucas (lucasnovo@estudante.ufscar.br) [1] e
Ruffino, Fabio (ferrariruffino@ufscar.br)[2].

Resumo: *O objetivo desse trabalho é apresentar um pouco da história da Teoria dos Feixes, introduzida por Jean Leray no campo de prisioneiros de guerra Oflag XVII-A, na Áustria. Trata-se de uma teoria que tem um papel central na matemática moderna, principalmente na geometria (analítica, complexa, diferenciável, algébrica, etc.). Após a formulação de uma teoria cohomológica com coeficientes em feixes, dada por Cartan, ficou clara sua importância e naturalidade para resolver problemas com a passagem de propriedades locais para propriedades globais. Portanto, nesse trabalho pretendemos expor o contexto (tanto dentro da matemática, quanto dentro da história) em que essa teoria nasceu; além de exibir o básico da teoria, para que os leitores também entendam como foi desenvolvida e sua importância na matemática.*

Palavras-chave: *história da matemática, teoria dos feixes, topologia.*

1. História

Jean Leray (7/11/1906 - 10/11/1998) foi detido no campo de prisioneiros para oficiais Oflag XVII-A, na Áustria, por toda Segunda Guerra Mundial. Lá ajudou a criar uma universidade, na qual se tornou o diretor. Originalmente, seus interesses matemáticos tinham origem em aplicações de problemas de mecânica e dinâmica de fluídos, mesmo sendo trabalhos teóricos. Porém, com medo que seus conhecimentos em matemática aplicada pudesse ser usado pelos alemães nos esforços de guerra, optou por focar em Topologia Algébrica, uma área que até então tinha usado apenas em aplicações na Análise.

Durante esse período, Leray tinha o objetivo de generalizar para espaços topológicos mais gerais alguns teoremas importante da Topologia Algébrica, em especial da teoria de formas diferencias de Élie Cartan. Nesses esforços, foi desenvolvida a ferramenta que mais tarde chamaria de feixe (*faisceau*), além do desenvolvimento de sequências espectrais e teoria de cohomologia. Porém, foi apenas por volta de 1950 que essas noções começaram a tomar a forma que conhecemos hoje. Um pouco depois, após um desenvolvimento da Teoria de Categorias, se viu necessária uma reformulação categorial dessas ideias para uma forma mais simples e elegante.

2. Pré-feixes e Feixes

Acreditamos que um conhecimento prévio da linguagem das categorias é importante, mas não essencial.

Definição 3.1 *Um* ***pré-feixe*** *em X é um funtor contravariante* $\mathcal{P} : Top_X^{\mathrm{op}} \to$ R-Mod.

De forma concreta, essa definição nos diz que para todo aberto $U \subset X$, temos definido um R-módulo $\mathcal{P}(U)$. Se $V \subset U$, temos o morfismo $\mathcal{P}_{U,V} : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$, dito morfismo restrição, de modo que:

(i) $\mathcal{P}_{U,U}$ é a identidade de $\mathcal{P}(U)$.

(ii) $W \subset V \subset U$, então $\mathcal{P}_{U,W} = \mathcal{P}_{V,W} \circ \mathcal{P}_{U,V}$.

Definição 3.2 *Um pré-feixe $\mathcal{F}$ em um espaço topológico X é dito* ***feixe*** *em X se valem as seguintes condições para qualquer conjunto aberto U de X e qualquer cobertura aberta $\{U_i\}$ de U:*

(i) Se existem duas seções $s, \overline{s} \in \mathcal{F}(U)$ tais que $s|_{U_i} = \overline{s}|_{U_i}$ para todo U_i, então $s = \overline{s}$;

(ii) Dadas seções $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, tais que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo i, j, existe uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo i.

Exemplo 3.1 *Para cada aberto U de um espaço topológico X definimos $\mathbb{R}(U) := C^0(U, \mathbb{R})$, que é o grupo abeliano das funções contínuas de U a $\mathbb{R}$. Além disso, definimos $\mathbb{R}_{U,V} : \mathbb{R}(U) \longrightarrow \mathbb{R}(V)$, $\varphi \longmapsto \varphi|_V$, sendo $\varphi \in \mathbb{R}(U)$ e $V \subset U$. Estas associações definem um feixe (portanto também um pré-feixe), dito feixe de funções reais contínuas no espaço X. Utilizamos a notação $\underline{G}$ para um grupo abeliano qualquer (ou R-módulo em geral) para definir o feixe de funções contínuas de um espaço X para G definido de maneira similar.*

Definição 3.3 *Sejam $\mathcal{P}, \mathcal{Q} : Top_X^{\mathrm{op}} \to$ R-Mod dois pré-feixes. Um* ***morfismo de pré-feixes*** *de $\mathcal{P}$ ao $\mathcal{Q}$ é um morfismo de funtores $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$. Se $\mathcal{F}, \mathcal{G} : Top_X^{\mathrm{op}} \to$ R-Mod são feixes, dizemos que $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ é um* ***morfismo de feixes*** *se é um morfismo de pré-feixes.*

De forma concreta, um morfismo de pré-feixes $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ é definido da seguinte maneira: para todo $U \subset X$ aberto, é dado um homomorfismo de R-módulos $\rho(U) : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{Q}(U)$, de modo que, se $V \subset U$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\rho(U)} & \mathcal{Q}(U) \\ {\scriptstyle \mathcal{P}_{U,V}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{Q}_{U,V}} \\ \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & \mathcal{Q}(V) \end{array} .$$

Exemplo 3.2 *Seja $\varphi : G \to H$ um homomorfismo de grupos. Com a notação já estabelecida, fica definido o morfismo de pré-feixes $\rho_\varphi : \underline{G} \to \underline{H}$, tal que*

$$\begin{aligned} (\rho_\varphi)_U : \underline{G}(U) &\longrightarrow \underline{H}(U) \\ f &\longmapsto (\rho_\varphi)_U(f) := \varphi \circ f. \end{aligned}$$

Definição 3.4 *É importante notar que dado dois pré-feixes $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ e um morfismo $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$, podemos definir:*

- $(\ker^P \rho) := \ker(\rho_U)$;
- $(\mathrm{Im}^P \rho) := \mathrm{Im}(\rho_U)$;

Dizemos que ρ é um morfismo de pré-feixes ***injetor*** *se $\ker^P(\rho) = 0$; dizemos que é* ***sobrejetor*** *se $\mathrm{Im}^P \rho = \mathcal{Q}$; dizemos que é* ***bijetor*** *se for injetor e sobrejetor.*

Exemplo 3.3 *Seja X um espaço localmente contrátil. Defina $\mathrm{Exp} : \underline{\mathbb{R}} \to \underline{U(1)}$ (entendendo $U(1)$ como o grupo multiplicativo dos elementos de $\mathbb{C}$ de módulo 1), tal que $\mathrm{Exp}_U : \mathbb{R}(V) \longrightarrow \underline{U(1)}(V)$, $\varphi \longmapsto \exp \circ \varphi$, para todo $V \subset X$ aberto, onde $\exp(x) = e^{2\pi i x}$. A imagem de Exp_V é formada por funções de V a $U(1)$ que admitem logaritmo em V. Observamos que, se tomarmos um aberto $V \subset X$ não simplesmente conexo e $\{V_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de V formada por abertos contráteis; se $\varphi : V \to U(1)$ é uma função que não admite um logaritmo em V. Toda restrição φ_{V_i} admite logaritmo e, portanto, pertence a imagem de Exp. Todavia, a única colagem possível é φ mesma, que não pertence à imagem. Ou seja, a imagem de Exp não é um feixe.*

Tomando cuidado com o fenômeno do exemplo anterior, da mesma forma que os pré-feixes, podemos definir:

Definição 3.5 *Dados dois feixes $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ e um morfismo $\rho : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, definimos:*

- $(\ker^F \rho) := \ker^P \rho$;
- $(\mathrm{Im}^F \rho) := (\mathrm{Im}^P \rho)^\natural$;

Onde o superscrito $\natural$ denota a feixificação (que pode ser entendida como a maneira "mais eficiente" de transformar um pré-feixe em um feixe). Dizemos que ρ é um morfismo de feixes ***injetor*** *se $\ker^F(\rho) = 0$; dizemos que é* ***sobrejetor*** *se $\mathrm{Im}^F \rho = \mathcal{Q}$; dizemos que é* ***bijetor*** *se for injetor e sobrejetor.*

Observamos que, direto das definições, a injetividade de feixes e pré-feixes são equivalentes, porém apenas a sobrejetiviade de pré-feixes implica na sobrejetividade de feixes. O fato de um morfismo de feixes sobrejetor não ser um morfismo de pré-feixes sobrejetor é essencial para entendermos a cohomologia de feixes; de modo simples, o problema está na "colagem" das seções na imagem (cf. Exemplo 3.3). O papel da cohomologia de feixes é "medir" o quão longe um morfismo de feixes sobrejetor está de ser sobrejetor no sentido de pré-feixes, isso é, de toda seção do contradomínio ser imagem de uma seção do domínio pelo morfismo. Esse é um modelo típico para problemas locais-globais que aparecem na geometria.

3. Álgebra Homológica e Cohomologia de Feixes

Vamos, de forma resumida, exibir como a cohomologia de feixes faz esse trabalho descrito no parágrafo anterior. Para isso, vamos introduzir conceitos básicos da Álgebra Homológica.

Definição 4.1 *Uma sequência de morfismos de (pré-)feixes da forma*

$$\cdots \xrightarrow{\varphi^{i-2}} A^{i-1} \xrightarrow{\varphi^{i-1}} A^i \xrightarrow{\varphi^i} A^{i+1} \xrightarrow{\varphi^{i+1}} \cdots \tag{1}$$

é dita ***exata*** *se $\ker(\varphi^i) = \mathrm{Im}(\varphi^{i-1})$ para todo i. Caso a família de índices for $\mathbb{Z}$, uma sequência exata é dita também* ***sequência exata longa****; caso tenhamos apenas três (pré-)feixes não triviais, a sequência exata é dita* ***sequência exata curta****.*

Para definir a cohomologia, olhamos para uma sequência exata curta de feixes $0 \to F \to G \to H \to 0$, ela, em geral, não é mais exata quando a vemos como uma sequência de pré-feixes (pois o morfismo que era antes sobrejetor pode não mais ser). Isso é equivalente a afirmar que, considerando a sequência das seções globais (ou seja, dos grupos abelianos associados ao espaço topológico X todo), apenas a sequência

$$0 \longrightarrow F(X) \longrightarrow G(X) \longrightarrow H(X) \tag{2}$$

é exata (em outras palavras, o funtor das seções globais é exato à esquerda).

Gostaríamos então de "medir" o quão longe essa sequência está de ser uma sequência exata. Para isso, a ideia é completar a sequência (2) para torná-la uma sequência exata longa; ou seja, obter uma sequência

$$0 \to H^0(X, F) \to H^0(X, G) \to H^0(X, H) \to H^1(X, F) \to \cdots,$$

onde os primeiros R-módulos coincidem com os da sequência (2). Existe um método para encontrar essa seqência exata longa de modo único; não vamos apresentá-lo nesse trabalho, já que requer um maquinário da Álgebra Homológica (resolução injetiva) que foge do nosso objetivo.

Referências

[1] BRUZZO, U. **Introduction to Algebraic Topology and Algebraic Geometry**. Trieste. International School for Advanced Studies, 2004.

[2] BREDON, G. **Sheaf Theory**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1997. Graduate Texts in Mathematics volume 170.

[3] GODEMENT, R. **Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux**, Publications de L'Institut de Mathématique de L'Université de Strasbourg XIII, Hermann, Paris, 1998.

[4] FOURMAN, M.P et al. **Applications of sheaves**: Proceedings of the Research Symposium on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra and Analysis, Durham, July 9-21, 1977. Springer, 1979. Lect. notes in math., 753.

[5] MILLER, H. **Leray in Oflag XVIIA**: The origins of sheaf theory, sheaf cohomology, and spectral sequences. 2000.

Apoios:
CAPES CNPq FAPESP

[1] UFSCar, discente. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com processo nº 2023/08173-3.
[2] UFSCar, docente. Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) com processo nº 2023/08173-3.