XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

A Derivada de Carathéodory

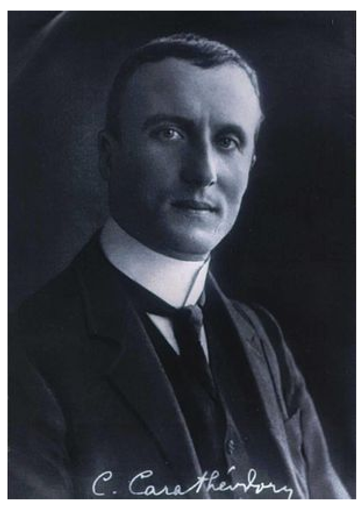
SANTOS, Lucas ROJAS, Lucas SOUZA, Osmar

Resumo: *Neste trabalho faremos uma breve revisão da noção de derivada e posteriormente apresentaremos a definição de Derivada de Carathéodory. Por fim, veremos alguns exemplos de aplicações desta nova forma de se calcular uma derivada.*

Palavras-chave: *Derivada; Carathéodory; Cálculo diferencial*

1. Introdução

Carathéodory foi um matemático alemão de origem grega que fez grandes contribuições para o cálculo, a teoria da medida e o estudo de funções de uma variável real.



Todos os anos, apresenta-se aos alunos do curso de cálculo a definição usual da derivada. Entretanto, há uma outra caracterização, menos conhecida, que aparece no livro Theory of Functions of a Complex Variable (vol.1), escrito por Constantin Carathéodory e publicado em 1954. Esta caracterização torna-se elegante e muito útil, tanto em termos teóricos quanto em termos pedagógicos. Muitos teoremas e aplicações tornam-se mais fáceis utilizando a formulação de Carathéodory. Esta caracterização deixa bem claro que de fato a continuidade é essencial para a diferenciabilidade, tão essencial que a própria definição contém a continuidade necessária.

2. A formulação da Derivada de Carathéodory

Suponhamos que queremos calcular a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(a, f(a))$, com f definida no intervalo aberto $U, a \in U$. Para isso, tomemos a função Φ das inclinações das retas secantes a f no ponto $(a, f(a))$:

$$\Phi(x) = \tfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, x \in U-(a)$$

A inclinação da reta tangente que queremos encontrar será o limite

$$\lim_{x \to a} \Phi(x) = f'(a)$$

se este existir. Nesse caso, denotamos-o por $f'(a)$.

Isto motivou Carathéodory a pensar na definição a seguir.

Definição 3.1 *Seja f uma função definida em um intervalo aberto U, e a um ponto em U. f é diferenciável em a, no sentido de Carathéodory, se existe uma função $\Phi_f(x,a)$, contínua em a, que satisfaz a relação*

$$f(x) - f(a) = \Phi_f(x,a)(x-a), \forall x \in U \tag{1}$$

É fácil ver que que esta definição é equivalente a que usualmente se dá para a derivada e que $\Phi_f(a,a) = f'(a)$. A consequência imediata dessa definição é que se f é diferenciável em a, então f também é contínua em a.

Em suma, o número $\Phi_f(a,a)$ é a derivada de Carathéodory de f em a.

2.1 Propriedades da Derivada de Carathéodory

Seja $D_a(U,\mathbb{R})$ a família das funções definidas do intervalo aberto U em $\mathbb{R}$ que são diferenciáveis no ponto $a \in U$ e $C_a(U,\mathbb{R})$ a família das funções definidas de U em $\mathbb{R}$ que são contínuas no ponto $a \in U$. Definimos $\Phi : D_a \to C_a$ por $\Phi(f) = \Phi_f$, onde Φ_f satisfaz (1). Daí, podemos prosseguir para o seguinte teorema que determina algumas propriedades de Φ.

Teorema 2.1 *(A álgebra de $\Phi(D_a)$). Se $f, g \in D_a(U,\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g \in D_a(U,\mathbb{R})$, $f/g \in D_a(U,\mathbb{R})$ (se $g \neq 0$) e*

1. $\Phi_{\alpha f+\beta g} = \alpha\Phi_f + \beta\Phi_g$;

2. $\Phi_{fg} = g\Phi_f + f(a)\Phi_g$;

3. $\Phi_{f/g} = \big(g(a)\Phi_f - f(a)\Phi_g\big)/g(a)g$.

Demonstração

1. Seja $h = \alpha f + \beta g$, daí temos que:

$$\begin{aligned} &h(x) - h(a) = (\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(a) + \beta g(a)) = \\ &= \alpha(f(x) - f(a)) + \beta(g(x) - g(a)) = \\ &= \alpha\Phi_f(x,a)(x-a) + \beta\Phi_g(x,a)(x-a) = \\ &= (\alpha\Phi_f(x,a) + \beta\Phi_g(x,a))(x-a) \end{aligned}$$

E sabemos que $h(x)-h(a) = \Phi_h(x,a)(x-a)$. Logo $\Phi_h(x,a)(x-a) = (\alpha\Phi_f(x,a) + \beta\Phi_g(x,a))(x-a)$ ou seja: $\Phi_{\alpha f+\beta g} = \alpha\Phi_f + \beta\Phi_g$.

2. Seja $h = f.g$, daí temos que:

$$\begin{aligned} &h(x) - h(a) = f(x).g(x) - g(a).f(a) = \\ &= f(x)g(x) - g(x)f(a) + g(x)f(a) - g(a)f(a) = \\ &= g(x)(f(x) - f(a)) + f(a)(g(x) - g(a)) = \\ &= g(x)\Phi_f(x,a)(x-a) + f(x)\Phi_g(x,a)(x-a) = \\ &= (g(x)\Phi_f(x,a) + f(x)\Phi_g(x,a))(x-a) \end{aligned}$$

E sabemos que $h(x)-h(a) = \Phi_h(x,a)(x-a)$. Logo $\Phi_h(x,a)(x-a) = (g(x)\Phi_f(x,a)+f(x)\Phi_g(x,a))(x-a)$. Ou seja: $\Phi_{fg} = g\Phi_f + f(a)\Phi_g$.

3. A demonstração do item 3 é similar à anterior.

Corolário 2.1 *A partir do teorema 2.1, pode-se concluir que*

1. $(af + bg)'(a) = af'(a) + bg'(a)$;

2. $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$;

3. $(f/g)'(a) = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$, *se* $g(a) \neq 0$.

Teorema 2.2 *Seja f definida no intervalo aberto U, $a \in U$, e g definida no intervalo aberto V, $f(U) \subset V$, com $f \in D_a(U,\mathbb{R})$ e $g \in D_a(V,\mathbb{R})$. Então $g \circ f \in D_a(U,\mathbb{R})$ e*

$$\Phi_{g \circ f} = (\Phi_g \circ f)\Phi_f\,.$$

Corolário 2.2 *(Regra da cadeia) Sob as hipóteses do teorema 2.2, tem-se*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)\,.$$

3. Aplicações

Vejamos agora algumas aplicações de como podemos calcular a derivada de Carathéodory.

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função constante definida como $f(x) = k$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$. Devemos encontrar $\Phi_f(x,a)$, contínua, tal que $f(x) - f(a) = \Phi_f(x,a).(x-a)$. Note que

$$f(x) - f(a) = 0 = 0 \cdot (x-a)\,.$$

Então $\Phi_f(x,a) = 0$ e, consequentemente, $f'(a) = \Phi_f(a,a) = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$. Queremos encontrar $\Phi_f(x,a)$, contínua, tal que $f(x)-f(a) = \Phi_f(x,a) \cdot (x-a)$. Mas observe que

$$f(x) - f(a) = x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}\,.$$

Portanto,

$$\Phi_f(x,a) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$$

e, em particular, $f'(a) = \Phi_f(a,a) = na^{n-1}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ definida por $f(x) = sen(x)$. Calculemos sua derivada no ponto a. Note que $f(x) - f(a)$, para $x \neq a$, pode ser escrito como

$$f(x) - f(a) = sen(x) - sen(a) = \frac{sen(x) - sen(a)}{x-a} \cdot (x-a)\,.$$

Note que $\Phi_f(x,a) = \dfrac{sen(x) - sen(a)}{x-a}$ tem uma descontinuidade removível em a, pois

$$\frac{sen(x) - sen(a)}{x-a} = \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \xrightarrow{x \to a} \cos(a)\,,$$

Logo, definimos $f'(a) = \Phi_f(a,a) = \cos(a)$, que é função contínua em a.

4. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right), & \textbf{se } x \neq 0 \\ 0, & \textbf{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua, mas não é diferenciável em 0. De fato,

$$f(x) - f(0) = xsen\left(\frac{1}{x}\right) - 0 = sen\left(\frac{1}{x}\right)(x-0)$$

Mas o fator resultante $\Phi_f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ não tem uma descontinuidade removível em $x = 0$.

4. Considerações finais

A derivada de Carathéodory oferece uma visão alternativa e enriquecedora da diferenciabilidade. Esta caracterização não apenas complementa a definição clássica, mas também simplifica a demonstração de diversos teoremas e aplicações.

Além disso, a abordagem de Carathéodory é pedagogicamente valiosa, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais robusta e intuitiva dos conceitos fundamentais do cálculo. Ao enfatizar a continuidade dentro da própria definição de derivada, essa formulação reforça a importância de um dos pilares do estudo de funções.

Referências

[1] ACOSTA, D.R.; **La derivada de Carathéodory**. 2014.

[2] KHUN, S.; **The Derivate á La Caratéodory**. The American Mathematical Monthly, 98(1), 40 - 44.

Apoios:

CAPES CNPq FAPESP