

A COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE SISTEMAS POLINOMIAIS PLANARES

 Bacelar, Leandro¹

Resumo: Neste trabalho introduzimos a compactificação de Poincaré, ferramenta importante da teoria qualitativa de equações diferenciais e, a aplicamos no estudo global de um sistema polinomial planar.

Palavras-chave: Sistemas diferenciais planares, compactificação de Poincaré, retratos de fase.

1. Compactificação de Poincaré

Para estudar o comportamento global das soluções de um sistema diferencial polinomial planar, ou seja, o comportamento das órbitas do sistema em todo o plano, Henri Poincaré introduziu a ferramenta conhecida atualmente como **Compactificação de Poincaré**. A seguir faremos uma introdução desta.

Dado o sistema

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y). \quad (1)$$

em que P e Q são polinômios de grau m e n , respectivamente, e $d = \max\{m, n\}$ é o grau do sistema. Ao sistema (1) associamos o campo de vetores

$$X = (P, Q).$$

Seja

$$\{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}^2,$$

note que este plano é tangente a esfera 2-dimensional $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ pelo polo norte $N = (0, 0, 1)$.

Considere os conjuntos

$$H_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 > 0\}, \quad H_- = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 < 0\}$$

$$\mathbb{S}^1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 = 0\},$$

chamados de hemisfério norte, o hemisfério sul e o equador, respectivamente.

Dado o sistema (1) em \mathbb{R}^2 e usando **projeções centrais** construímos o campo de vetores induzido em \mathbb{S}^2 , da seguinte maneira: dado um ponto p no plano, consideramos a interseção da reta passando por p e pela origem de \mathbb{S}^2 . Este ponto representa a imagem das projeções centrais dadas por $f^\pm: \mathbb{R}^2 \rightarrow H_\pm$ as projeções centrais dadas por

$$f^\pm(x_1, x_2) = \pm \left(\frac{x_1}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 1}}, \frac{x_2}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 1}} \right)$$

como na Figura 1.

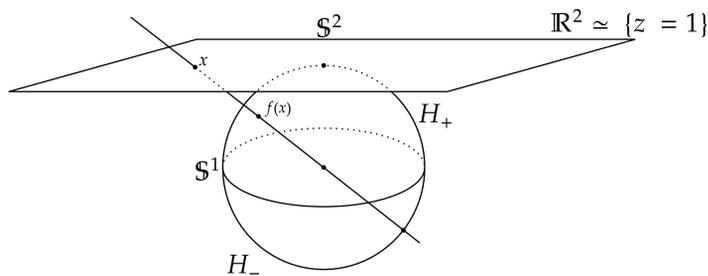


FIGURE 1: Projeção central do plano $z = 1$ nos hemisférios de \mathbb{S}^2 .

Desta maneira, as projeções f^\pm induzem sobre H_\pm um campo vetorial analiticamente conjugado ao campo vetorial associado ao sistema diferencial (1).

Sejam as **cartas locais**, isto é, parametrizações que recobrem \mathbb{S}^2 , veja Figura 2, definidas por

$$U_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_i > 0\} \quad \text{e} \quad V_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_i < 0\},$$

$i, j = 1, 2$ e 3 , e os difeomorfismos $\phi_i = U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\psi_i = V_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ dados por

$$\phi_i(x_1, x_2, x_3) = \psi_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_j & x_k \\ x_i & x_i \end{pmatrix},$$

com $j, k \neq i$ e $j < k$.

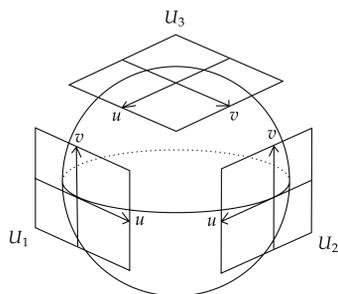


FIGURE 2: Cartas locais da esfera \mathbb{S}^2

Nestas condições, os campos

$$X_1(y) = Df^+(\varphi_3)X(\varphi_3) \quad \text{e} \quad X_2(y) = Df^-(\psi_3)X(\psi_3)$$

são induzidos por f^+ em $H_+ = U_3$ e f^- em $H_- = V_3$, respectivamente. Além disso, $f^+ = \varphi_3^{-1}$ e $f^- = \psi_3^{-1}$.

Portanto, obtemos um campo vetorial $p(X)$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ que admite uma extensão analítica $p(X)$ em \mathbb{S}^2 , chamado **compactificação de Poincaré** do campo vetorial $X = (P, Q)$.

Denotando por $(u, v) = \varphi_i(x_1, x_2, x_3) = \psi_i(x_1, x_2, x_3)$, temos $p(X)$ nas diferentes cartas locais.

• na carta local U_1 ,

$$\dot{u} = v^d \left[Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) - uP\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right);$$

• na carta local U_2 ,

$$\dot{u} = v^d \left[P\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) - uQ\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right) \right], \quad \dot{v} = -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right),$$

• na carta local U_3 , $\dot{u} = P(u, v)$, $\dot{v} = Q(u, v)$.

Para $i = 1, 2, 3$ as expressões de $p(X)$ em V_i coincidem com as de U_i , exceto pelo fator $(-1)^{d-1}$. Desta maneira, identificamos o infinito do plano \mathbb{R}^2 com o equador \mathbb{S}^1 e cada direção em \mathbb{R}^2 fornece dois pontos antipodais em \mathbb{S}^1 .

Finalmente, uma singularidade do campo $p(X)$ em \mathbb{S}^1 é chamado **ponto singular infinito** e singularidades em $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ são chamadas **pontos singulares finitos**.

2. Exemplo

Considere o sistema

$$\dot{x} = y - x^2y, \quad \dot{y} = -x^3 + xy^2. \quad (2)$$

O sistema (2) na carta U_1 é dada por:

$$\dot{u} = -1 + 2u^2 - u^2v^2, \quad \dot{v} = -uv(-1 + v^2), \quad (3)$$

e para a carta U_2 , por:

$$\dot{u} = -2u^2 + u^4 + v^2, \quad \dot{v} = -uv + u^3v. \quad (4)$$

Além disso,

$$(0, 0), \quad Q_{1\pm} = (1, \pm 1), \quad Q_{2\pm} = (-1, \pm 1),$$

são os pontos singulares finitos de (2), onde $Q_{1\pm}$ e $Q_{2\pm}$ são **selas hiperbólicas** e $(0, 0)$ é **ponto monodrômico**. Enquanto que

$$p_\pm = (\pm 2)^{-1/2}, 0, \quad (0, 0),$$

são os pontos singulares infinitos em U_1 e U_2 , respectivamente, sendo p_\pm nós estáveis (+) e instáveis (-) e a origem de U_2 **linearmente nulo**.

Note ainda que, as retas $r_\pm: 1 \pm x$ são **curvas algébricas invariantes** que passam pelos pontos singulares $Q_{1\pm}$ e $Q_{2\pm}$. Finalmente,

$$H(x, y) = (1 - x^2)(1 + x^2 - 2y^2)$$

é uma **integral primeira** do sistema (2) e pelo Teorema de Poincaré-Lyapunov, concluímos que origem de (2) é um **centro**.

Reunindo todas as informações descritas acima, concluímos que o retrato de fase global do sistema diferencial planar (2) no disco de Poincaré é como representado na Figura 3.

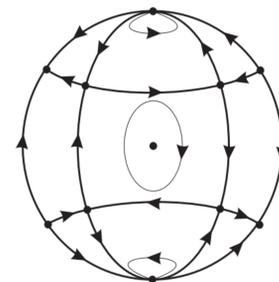


FIGURE 3: Retrato de fase do sistema (2) no disco de Poincaré.

Referências

- [1] M. J. Alvarez, A. Ferragut and X. Jarque; **A Survey on the Blow Up Technique**. Int. J. of Bifurcation and Chaos **21**, 2011.
- [2] J. Chavarriga, H. Giacomini, J. Giné and J. Llibre; **Local analytic integrability for nilpotent centers**. Ergodic Theory Dynam. Systems **23**, 2003.
- [3] F. Dumortier, J. Llibre and J. C. Artés; **Qualitative theory of planar differential systems**. Universitext Springer, 2006.

Apoios: