XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Repercussões sobre a Desigualdade de Cauchy: A Cristalografia e uma Interpretação Vetorial

Vergueiro, Laura Gois[1] e da Silva Junior, Carlos Alberto[2]

Resumo: *A Desigualdade de Cauchy é uma importante inequação, utilizada para validar diversas outras identidades matemáticas modernas. Dentre essas, podemos destacar a Desigualdade de Harker-Kasper, que surge com o estudo da cristalografia, e sua modelagem no Espaço Vetorial que admite Produto Interno. Nesse trabalho apresentamos a demonstração da Desigualdade de Harker-Kasper e no Produto Interno de forma elegante a partir da Desigualdade de Cauchy em conjunto com conceitos de matemática elementar.*

Palavras-chave: *Desigualdade de Cauchy, Desigualdade de Cauchy-Schwarz, Cristalografia, Produto Interno.*

1. Introdução

Augustin Louis Cauchy foi um matemático francês importantíssimo nos campos do Cálculo e da Análise. Suas obras abordavam criteriosamente conceitos fundamentais de diversas áreas, que foram primordiais para seu sucesso, pois expressavam as preocupações técnicas descritas nos teoremas e definições, que começavam a ser exigidas no início do século XIX, chamado de "Era do Rigor" [1].

Em um dos seus textos, é possível encontrar uma interessante identidade conhecida como *Desigualdade de Cauchy*: tomando $(a_1, a_2, ..., a_n)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n)$ duas sequências de números reais, temos que é valida a seguinte desigualdade

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \leq \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)}$$

A demonstração é feita pelo Princípio da Indução Finita (PIF).

- Para n=2: a partir da fatoração, temos que

$$0 \leqslant (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a_1b_2a_2b_1 \leqslant a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1^2b_1^2 + 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_2^2 \leqslant a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_1b_1 + a_2b_2) \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

Logo, a não negatividade do termo prova a veracidade da Desigualdade de Cauchy para n=2.

- Supondo que a desigualdade seja válida para $k\epsilon\mathbb{N}$, então, para $k+1$, segue que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} =$$
$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k) + a_{k+1}b_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2)} + a_{k+1}b_{k+1}$$

Por fim, fazendo um paralelo entre a identidade que chegamos e n=2, temos que

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)}\ \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2)} + a_{k+1}b_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\left(\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)}\right)^2 + a_{k+1}^2}\ \sqrt{\left(\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2)}\right)^2 + b_{k+1}^2} =$$
$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 + a_{k+1}^2)}\sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2 + b_{k+1}^2)}$$

Que implica em:

$$a_1b_1 + ... + a_{k+1}b_{k+1} \leqslant \sqrt{(a_1^2 + ... + a_{k+1}^2)}\sqrt{(b_1^2 + ... + b_{k+1}^2)}$$

Portanto, comprovamos a legitimidade da *Desigualdade de Cauchy* a partir do PIF, que nos dá acesso a essa poderosa ferramenta.

2. Desigualdade de Harker-Kasper

A cristalografia é a ciência que estuda a estrutura geométrica de cristais focada em sua simetria. Após 1911, com a utilização do raio-x, conseguiu-se determinar com precisão a localização dos átomos nos cristais, que proporcionou o desenvolvimento de normas sobre as distâncias e ângulos formados entre eles [2]. Apesar disso, o raio-x é uma onda eletromagnética que possui intensidades e fases, por consequência, ocorre a perda de informações sobre as ondas difratas, que contém os dados dessas estruturas. Em 1948, a *Desigualdade de Harker-Kasper* foi uma das pioneiras no estudo sobre essas fases, relacionando os fatores de estrutura do espalhamento dos átomos e se desenvolveu a partir da Desigualdade de Cauchy [3]. Ela é enunciada como:

$$g^2(x) \leqslant \frac{1}{2}[1 + g(2x)]$$

onde $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k cos(\beta_k x)$, p_k é um real positivo e $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Dessa forma, usando as identidades trigonométricas, temos

$$\frac{1}{2}[1 + g(2x)] = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_k cos(2\beta_k x)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_k[cos^2(\beta_k x) - sen^2(\beta_k x)]\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{n} p_k[cos^2(\beta_k x) - (1 - cos^2(\beta_k x))]\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} p_k 2cos^2(\beta_k x)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - 1 + 2\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right] = \sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x) =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right) \cdot 1 = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k cos^2(\beta_k x)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) \geqslant$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy:

$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k cos^2(\beta_k x)} \cdot \sqrt{p_k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{p_k^2 \cdot cos^2(\beta_k x)}\right)^2 =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot cos(\beta_k x)\right)^2 = g^2(x)$$

Desta maneira, a partir de uma simples manipulação e com auxílio da Desigualdade de Cauchy conseguimos demonstrar a Desigualdade de Harker-Kasper.

3. Combinando Schawrz e Vetores

Navegando pelos oceanos matemáticos encontramos outras ambiente, como, por exemplo, seja V um espaço vetorial, tal que $(V, \langle\cdot\rangle)$, $\mathbf{v},\mathbf{w}\ \epsilon V$ vetores e as sequências (v_n) e (w_n) suas coordenadas respectivas. O produto interno de $\mathbf{v}$ por $\mathbf{w}$ é definido como $\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j w_j$.

Reescrevendo a desigualdade de Cauchy em $(V, \langle\cdot\rangle)$, adquirimos a condensa identidade

$$\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \leqslant \langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\mathbf{w},\mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Além disso, não precisamos pensar na demonstração de uma identidade como algo imutável ou único, mas como um método que pode ser usado em outras ocasiões. Baseado nisso, vamos demonstrar a Desigualdade de Cauchy em V, tendo como guia a demonstração de Schawrz para a ***Desigualdade de Cauchy-Schawrz***, a partir do polinômio $p(t) = \langle\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w}\rangle$. Desenvolvendo $p(t)$, empregando a propriedade distributiva, segue que

$$p(t) = \langle\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v} + t\mathbf{w}, t\mathbf{w}\rangle =$$
$$= \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}, t\mathbf{w}\rangle + \langle\mathbf{v}, t\mathbf{w}\rangle + \langle t\mathbf{w}, t\mathbf{w}\rangle =$$
$$= \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle + 2t\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + t^2\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle$$

Por definição, o produto interno de dois vetores deve ser sempre maior do que ou igual a zero, então o gráfico de $p(t)$ tem concavidade para cima, e, para que não haja valores negativos, o delta de $p(t)$ deve ser menor do que zero, pois a função não interceptará o eixo das abscissas. Logo,

$$\triangle < 0 \Rightarrow (2\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle)^2 - 4\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle^2 < 4\langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle \Rightarrow \langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle < \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Assim, obtivemos a desigualdade estrita. Para o caso de igualdade, observe que:

$$\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \langle\mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w}\rangle = 0$$

Que, por definição, só ocorre se

$$\mathbf{v} + t\mathbf{w} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{w}}.$$

Portanto,

$$\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \leqslant \langle\mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\mathbf{w}, \mathbf{w}\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

A partir do método de Schawrz, provamos com simplicidade que a Desigualdade de Cauchy é válida num espaço vetorial que admite produto interno, encontrando a condição para que ocorra o caso de igualdade [4]. Mais que isso, percebemos que o produto interno de dois vetores sempre será menor do que ou igual ao produto da norma deles.

4. Conclusão

Como consequência da formalização matemática depois do século XIX, nasceu a Desigualdade de Cauhcy que se desdobra até hoje em vários contextos, como na cristalografia, solucionando a perda de informação da estrutura dos cristais. Além disso, ela é extremamente versátil e pode ser modelada em diversos ambientes matemáticos que há tornam cada vez mais abundante de significado. No caso específico dos espaços vetoriais que admitem produto interno, tanto tornam sua notação compacta, quanto permitem uma comparação direta entre conceitos fundamentais desse espaço, de produto interno e de norma.

Referências

[1] BARONI, R.L.S.; OTERO-GARCIA S.C.;**Aspectos da Historia da Analise Matematica de Cauchy a Lebesgue**., 1 ed. São Paulo, 2014.

[2] FRANCA, E.F.; **Estudo Cristalográfico de Compostos de Platina (II) e de Níquel (II) com Ditiocarbimato** . Dissertação de Mestrado em Química, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2005.

[3] MAFUD, A.C.; **Estrutura Cristalina e Molecular de Derivados de Ditiocarbamatos**. Dissertação de Mestrado em Ciências (Físico-Química), Universidade São Paulo, São Carlos, 2006.

[4] STEELE, J.M.; **THE CAUCHY SCHWARZ MASTER CLASS An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities**. 1 ed. Cambridge University Press, New York, 2004.

Apoios:

[1] Universidade Federal de São João del-Rei - MG, Graduanda em Bacharelado de Matemática, lauragoisvergueiro@aluno.ufsj.edu.br
[2] Universidade Federal de São João del-Rei - MG, Departamento de Matemática e Estatística, carlosdamat@ufsj.edu.br