Análise qualitativa de uma equação diferencial linear com atraso discreto de primeira ordem

Ospina, Laura[1]; López, Julián[2]

Resumo: *Neste trabalho realizamos uma análise qualitativa da equação linear com atraso discreto dada por $U'(s) = -\beta U(s-1)$. Esta equação é uma normalização da equação logística linearizada em torno do seu ponto de equilíbrio estável. Utilizamos o Teorema Grande de Picard, a representação de soluções em séries e a análise das raízes características. Encontramos três pontos de bifurcação para β em $0, 1/e$ e $\pi/2$.*

Palavras-chave: *Análise, Soluções, Raízes da equação característica.*

Introdução

O objetivo é analisar o comportamento das soluções da equação diferencial com atraso $u'(t) = -\alpha u(t-\tau)$, $\tau > 0$. Para o estudo, vamos reescalar convenientemente a equação para obter uma mais simple. Definamos $s := \frac{t}{\tau}$, $\beta = \alpha\tau$ e $U(s) := u(t)$ e, assim, obtemos

$$U'(s) = -\beta U(s-1). \qquad (1)$$

A *equação característica* associada a (1) é $h(\lambda) := \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$.

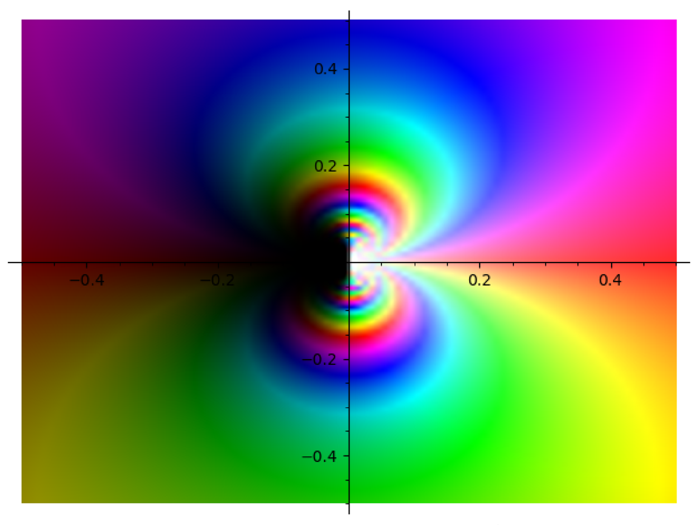
Dado que, $\lambda = 0$ não é raiz, podemos substituir $z = \frac{1}{\lambda}$ e assim

$$\frac{1}{z} + \beta e^{-\frac{1}{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad z e^{-\frac{1}{z}} = \frac{1}{\beta}$$

como $g(z) = ze^{-\frac{1}{z}}$ tem uma singularidade essencial em $z = 0$ e não se anula em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, pelo *Teorema Grande de Picard* deduz-se que $g^{-1}(\frac{1}{\beta})$ tem infinitos elementos. Podemos concluir:

$\Rightarrow$ Existe $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $|\lambda_k| \to \infty$, com λ_k raiz de h.

$\Rightarrow$ Existem infinitas soluções de (1) da forma $U(s) := e^{\lambda_k s}$.



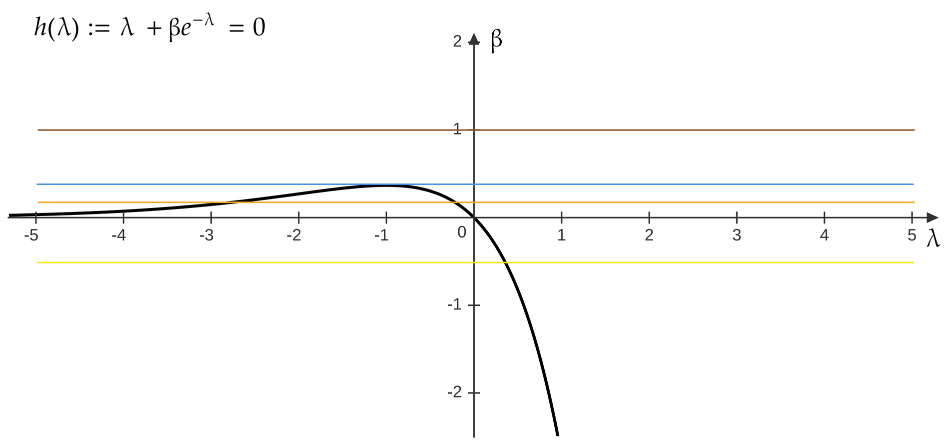
Função $g(z) = ze^{-\frac{1}{z}}$

Muitas conclusões sobre o comportamento das soluções de (1) podem ser obtidas a partir de certa informações básicas sobre as raízes de h, que são resumidas nos próximos resultados:

2. Raízes reais da equação característica

Cumpre-se:

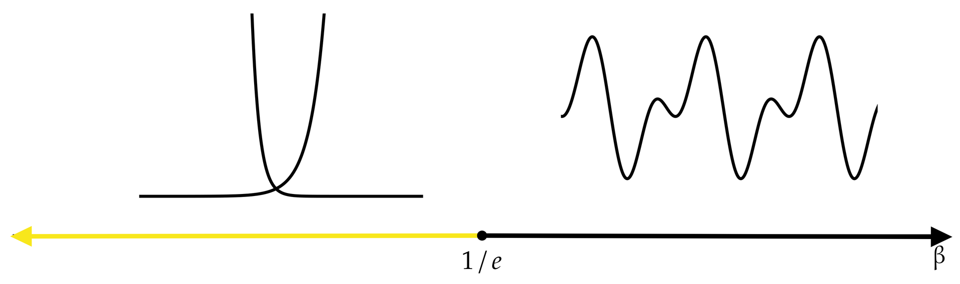
1. Se $\beta < 0$, então h tem uma única raiz real $\lambda > 0$.
2. Se $0 < \beta < \frac{1}{e}$, então h tem exatamente dois raízes reais $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, com $\lambda_1 \to -\infty$, $\quad \lambda_2 \to 0^-$ para $\beta \to 0^+$.
3. Se $\beta = \frac{1}{e}$, então $\lambda = -1$ é a única raiz real de h e tem multiplicidade dois.
4. Se $\beta > \frac{1}{e}$, então h não tem raízes reais.



3. Soluções oscilatórias

São equivalentes:

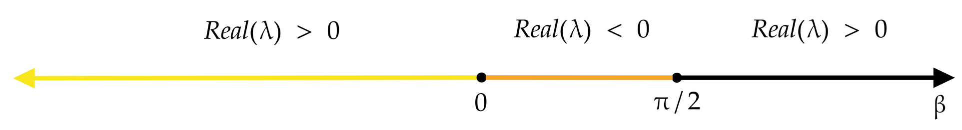
1. Toda solução do problema $U'(s) = -\alpha U(s-1)$ oscila, ou seja, existe $s_n \to \infty$ tal que $U(s_n) = 0$ para todo n.
2. A equação característica $\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$ não tem soluções reais.



4. Análise de Re(λ)

Cumpre-se:

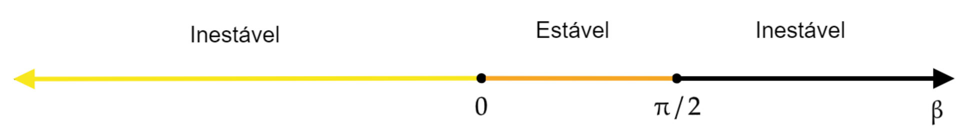
1. Se $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, então existe $\mu > 0$ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\mu$ para toda raiz λ.
2. Se $\beta = \frac{\pi}{2}$, então $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ são raízes simples y todas as raízes restantes têm parte real negativa.
3. Se $\beta > \frac{\pi}{2}$, então existe alguma raiz λ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im}(\lambda) < \pi$.



5. Estabilidade das soluções

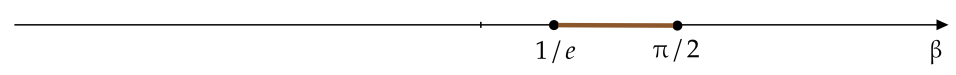
Cumpre-se:

1. Se $\beta < 0$ ou se $\beta > \frac{\pi}{2}$, então o equilíbrio $u \equiv 0$ em (2) é instável.
2. Se $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, então o equilíbrio $u \equiv 0$ em (2) é (globalmente) assintoticamente estável.



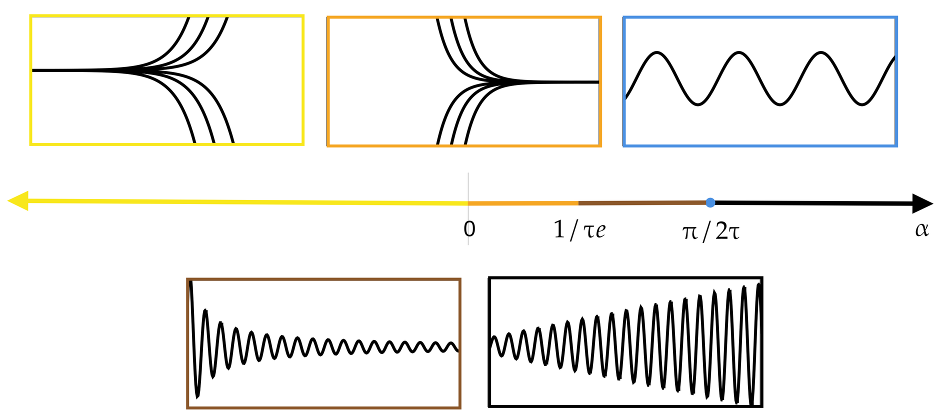
6. Existência das soluções

Dado $\beta \in \left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$, existem $\lambda = x \pm iy$ raízes tais que $-1 < x < 0$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$



7. Conclusão

As soluções da equação (1) podem ser resumidas no seguinte diagrama:



Referências

[1] Amster, P. (2017). *Ecuaciones diferenciales con retardo*, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires.

[2] Cooke, K., y Bellman, R. (1963). *Differential— difference equations*, International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, 45, 1-97 pp.

[3] Peréz, S., y Bengochea, A. (2018). *Introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo*, Miscelanea Matemática, 67, 57-71 pp.

Apoios:

[1] UNICAMP-IMECC. FAEPEX
[2] U.D. Francisco Jose de Caldas