Superfícies imersas no grupo de Heisenberg

Silva, Karolline Vitória[1]; Padilha, Inês[2]

Resumo: *As geometrias não euclidianas são pouco estudadas nos cursos de graduação, mas seu conhecimento é essencial, pois existem atualmente várias linhas de pesquisa em Geometria que utilizam resultados relevantes desta teoria. Neste sentido, buscamos estudar o grupo de Heisenberg, bem como sua geometria e algumas destas propriedades considerando superfícies imersas no grupo de Heisenberg (H_3). Também analisamos alguns tipos de superfícies mínimas de translação considerando inicialmente as curvas em planos ortogonais e posteriormente em planos não ortogonais. Tomamos como referência os trabalhos apresentados por Rafael López [1] que tem por título "Minimal translation surfaces in the Heisenberg group Nil_3 e o artigo e "The Gauss map of minimal graphs in the Heisenberg group"[2]. Para o desenvolvimento dos resultados utilizamos técnicas conhecidas da teoria de Geometria Riemanniana e Equações Diferenciais.*

Palavras-chave: *Grupo de Heisenberg, Aplicação de Gauss, Superfícies mínimas de translação.*

1. O grupo de Heisenberg

O grupo de Heisenberg, denotado por H_3, é um grupo de Lie nilpotente de step 2, cuja representação matricial é dada por:

$$H_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

cuja operação do grupo de Heisenberg é dada por

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \Big(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \Big).$$

Para cada $p = (x, y, z) \in H_3$ definimos a translação à esquerda $L_p : H_3 \longrightarrow H_3$ por $L_p(q) = p * q$ para todo $q \in H_3$. A matriz da diferencial de L_p na identidade é dada por

$$(dL_p)_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-y}{2} & \frac{x}{2} & 1 \end{bmatrix}, p \in H_3.$$

Escolhendo uma parametrização global $X : \mathbb{R}^3 \longrightarrow H_3$, uma base do espaço tangente $T_e H_3$ na identidade $e = (0, 0, 0)$ do grupo é dada por

$$e_1 = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_e, e_2 = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)_e, e_3 = \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)_e.$$

E assim construímos o seguinte referencial:

$$\begin{aligned} E_1 &= (dL_P)_e \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)_e = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ E_2 &= (dL_P)_e \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)_e = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z} \\ E_3 &= (dL_P)_e \Big(\frac{\partial}{\partial z}\Big)_e = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

A métrica deste grupo é dada por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (\frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy + dz)^2.$$

A conexão Riemanniana ∇ é expressa como segue

$$\begin{gathered} \nabla_{E_1} E_2 = \frac{1}{2} E_3 = -\nabla_{E_2} E_1 \\ \nabla_{E_1} E_3 = -\frac{1}{2} E_2 = \nabla_{E_3} E_1 \\ \nabla_{E_2} E_3 = \frac{1}{2} E_1 = \nabla_{E_3} E_2. \end{gathered}$$

e $\nabla_{E_i} E_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

2. A aplicação de Gauss em H_3

Seja S uma superfície orientável em um grupo de Lie G de dimensão 3, munido com uma métrica invariante à esquerda. A aplicação

$$\gamma : S \to S^2 = \{v \in \mathfrak{g}; |v| = 1\},$$

onde $\gamma(p) = dL_p^{-1} \circ \eta(p)$, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G e η o campo de vetores normal unitário de S, é chamada aplicação de Gauss.

3. Superfícies de translação

Definição 1 *Uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamada superfície de translação se pode ser localmente escrita como $X(x, y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y)$ de duas curvas diferenciáveis, onde γ_1 e γ_2 são chamadas curvas geradoras de S.*

Teorema 4.1 *Superfícies mínimas de translação do tipo 1 no grupo de Heisenberg H_3 são parametrizadas por*

$$X(x, y) = (x, 0, u(x)) * (0, y, v(y)) = \Big(x, y, u(x) + v(y) + \frac{xy}{2}\Big),$$

onde $u(x) = ax + u_0, a, u_0 \in \mathbb{R}$ e $v(y)$ é dado por

$$v(y) = c\Big[(a + y)\sqrt{1 + (a + y)^2} + ln(a + y + \sqrt{1 + (a + y)^2}\Big] + v_0,$$

onde $c, v_0 \in \mathbb{R}$.

Sketch : Sejam as curvas $\gamma_1(x) = (x, 0, u(x))$ contida no plano xz e $\gamma_2(y) = (0, y, v(y))$ contida no plano yz.

$$X(x, y) = \gamma_1(x) * \gamma_2(y) = \Big(x, y, u(x) + v(y) + \frac{xy}{2}\Big).$$

Os coeficientes da 1ª F.F. são

$$\begin{aligned} E &= < X_x, X_x > = 1 + (u'(x) + y)^2, \\ F &= < X_x, X_y > = (u'(x) + y)v'(y), \\ G &= < X_y, X_y > = 1 + v'(y)^2. \end{aligned}$$

Os coeficientes da 2ª F.F. são

$$\begin{aligned} L &= < \nabla_{X_x} X_x, U > = \frac{1}{\sqrt{w}}\Big[(-v'(y) + \frac{u''(x)}{u'(x) + y}\Big], \\ M &= < \nabla_{X_x} X_y, U > = \frac{1}{2\sqrt{w}}\Big[\frac{(u'(x) + y)^2 + 1 + v'(y)^2}{u'(x) + y}\Big], \\ N &= < \nabla_{X_y} X_y, U > = \frac{1}{\sqrt{w}}\Big[v'(y) + \frac{v''}{u'(x) + y}\Big]. \end{aligned}$$

Logo,

$$u''(x)(1 + v'(y)^2) - (u'(x) + y)v'(y) + v''(y)[1 + (u'(x) + y)^2] = 0. \quad (1)$$

Caso 1 : $u''(x) \neq 0$ em um intervalo aberto. Dividindo a EDO por $u''(x)$ e depois derivando em relação y,

$$-\frac{d}{dy}\Big(\frac{v'(y)}{1 + v'(y)^2}\Big) + 2\frac{v''(y)}{1 + v''(y)^2} + 2(u'(x) + y)\frac{d}{dy}\Big(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2}\Big) = 0. \quad (2)$$

Se $\frac{d}{dy}\Big(\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2}\Big) \neq 0$ chegaremos em uma contradição.

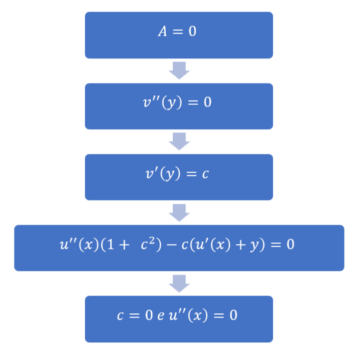
Se $\frac{v''(y)}{1 + v'(y)^2} = A, A \in \mathbb{R}$. Substituindo A e realizando as derivações da equação 3, obtemos

$$A\Big(1 + \frac{2v'(y)^2}{1 + v'(y)^2}\Big) = 0.$$

Logo, $A = 0$, e portanto $v''(y) = 0$ e $v'(y) = c, c \in \mathbb{R}$. Substituindo em (2), obtemos então

$$u''(x)(1 + c^2) - c(u'(x) + y) = 0.$$

Desse modo, $c = 0$ e $u''(x) = 0$.



Caso 2 :Se $u''(x) = 0$, então $u'(x) = a, a \in \mathbb{R}$. Desse modo, $u(x) = ax + u_0, a, u_0 \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação 2, obtemos

$$\frac{v''(y)}{v'(y)} = \frac{a + y}{(1 + (a + y)^2)}.$$

Integrando em relação a y ambos os lados obtemos

$$v'(y) = c_3\sqrt{1 + (a + y)^2}$$

E portanto,

$$v(y) = c\Big[(a + y)\sqrt{1 + (a + y)^2} + ln(a + y + \sqrt{1 + (a + y)^2})\Big] + v_0,$$

onde $c, v_0 \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2 *Uma superfície de translação do tipo 1 no espaço tridimensional de Heisenberg H_3 é uma superfície mínima não trivial se e somente se a superfície pode ser parametrizada por*

$$X(x, y) = \Big(x + ysen\theta, ycos\theta, f(x) + g(y) + \frac{xycos\theta}{2}\Big),$$

onde $f(x) = ax + b, (a, b \in \mathbb{R}$ e $g(y)$ é dada por

$$g(y) = \frac{c_1}{cos\theta}\Big[(a + ycos\theta)\sqrt{1 + (a + ycos\theta)^2} + ln(a + ycos\theta + \sqrt{1 + (a + ycos\theta)^2}\Big] + sen\theta\Big(ay + \frac{1}{2}cos\theta^2 + c_2\Big).$$

Referências

[1] LÓPEZ, Rafael, INOGUCHI, Jun-Ich, MUNTEANU, Marian Ioan José Edson. **Minimal translation surfaces in the heisenberg group** *nil*$_3$. arXiv: 1109.1628v1. (Geometriae Dedicata). Disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.1109.1628

[2] FIGUEROA, Christian. **The Gauss map of Minimal graphs in the Heisenberg group**. Journal of Geometry and Symmetry in Physics: June 2011.

Apoios:

[1]Aluna de Mestrado do PPGM-UFAM. Esta autora foi apoiada pelo Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq).
[2]Professora Associada do Departamento de Matemática na Universidade Federal do Amazonas (UFAM).