

# Classificação de sistemas lineares autônomos bidimensionais de EDOs

Pscheidt, Júlia - PET Matemática UFSC<sup>1</sup>

**Resumo:** Sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes podem ser estudados a partir dos autovalores da matriz associada ao problema. Além disso, é sempre possível encontrar uma matriz conjugada a essa que esteja na forma canônica de Jordan. Assim, este trabalho objetivou classificar as soluções de sistemas bidimensionais desse tipo, a depender do tipo dos autovalores (reais ou complexos), da sua positividade, e da sua multiplicidade geométrica.

**Palavras-chave:** Forma de Jordan, Conjugação topológica, Retratos de fase.

## 1. Introdução

Um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes é do tipo

$$\begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

para cada  $t \in \mathbb{R}$ , e pode ser traduzido para a equação diferencial autônoma  $x'(t) = Ax(t)$ , em que  $A \in M_n(\mathbb{R})$  e  $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ .

**Teorema (Forma canônica de Jordan):** Se  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , então  $A$  é linearmente conjugada a uma matriz real  $J$  diagonal em blocos de Jordan reais ou complexos, que é única a menos de ordem dos blocos na diagonal [1].

**Proposição (Conjugação):** Se  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  conjuga as matrizes reais  $A$  e  $J$ , ie,  $AQ = QB$ , então  $Q$  transforma as soluções de  $y' = Jy$  nas soluções de  $x' = Ax$  [1].

Assim, para obtermos as soluções de  $x' = Ax$ , basta que encontremos as soluções de  $y' = Jy$ , tarefa potencialmente mais simples, haja vista a estrutura da matriz  $J$ .

Dessa forma, partindo das EDOs cuja matriz associada está na forma de Jordan, foram classificados os sistemas lineares autônomos bidimensionais de acordo com seu comportamento, apresentando-se também os respectivos retratos de fase.

Este trabalho foi desenvolvido em uma iniciação científica supervisionada pelo Professor Dr. Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa como parte de uma das atividades desenvolvidas pelo PET Matemática da UFSC, sob tutoria da Professora Dr.<sup>a</sup> Alda Dayana Mattos Mortari.

## 2. Classificação de sistemas lineares autônomos bidimensionais

Foi estudado o comportamento das soluções da EDO  $x' = Ax$  no caso em que  $A \in M_2(\mathbb{R})$ . Por ser linear, o único ponto de equilíbrio da EDO é o vetor nulo. Assim, estudaremos o comportamento assintótico de todas as soluções com dado inicial não nulo. Para isso utilizamos a forma de Jordan e os autovalores. Sendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores não nulos da matriz  $A \in M_2(\mathbb{R})$ , as classificações das soluções do sistema associado à matriz conjugada  $J \in M_2(\mathbb{R})$  na forma de Jordan são:

### $\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais distintos

A matriz  $A$  será conjugada a  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ . O sistema  $y' = Jy$  tem solução geral da forma  $y(t) = (c_1e^{\lambda_1 t}, c_2e^{\lambda_2 t})$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Quando  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , ocorre o caso em que a origem será chamada de **nó estável**. Se  $c_1 \neq 0$ ,

$$\frac{y'(t)}{|y'(t)|} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} e_2}{e^{\lambda_1 t}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1 c_1 e_1}{|\lambda_1 c_1 e_1|},$$

logo as órbitas tendem a zero seguindo a direção de  $e_1$  [2]. Temos também que

$$\frac{y'(t)}{|y'(t)|} = \frac{\lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} e_2}{e^{\lambda_2 t}} \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \frac{\lambda_2 c_2 e_2}{|\lambda_2 c_2 e_2|},$$

logo as órbitas tendem ao infinito na direção de  $e_2$ .

Quando  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , ocorre o caso de um **nó instável**, cuja análise é similar à do nó estável, apenas com a inversão do sentido das soluções.

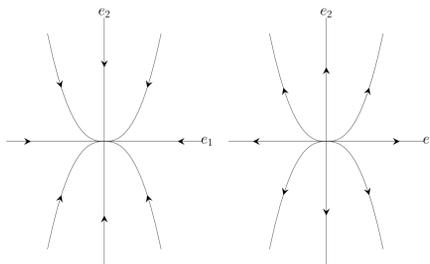


Fig. 1: Nô estável (esquerda) e nô instável (direita).

Quando  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , ocorre o caso de um **ponto de sela**. Com  $c_1 \neq 0$  e  $c_2 \neq 0$ , as soluções se aproximam assintoticamente do eixo de  $e_1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , e do eixo de  $e_2$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

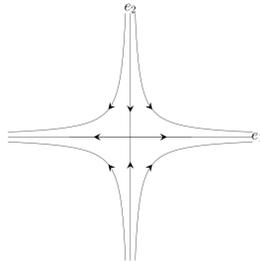


Fig. 2: Sela.

Ressalta-se que em todos estes casos, quando  $c_1 = 0$ , a órbita das soluções tende a zero seguindo a direção do eixo de  $e_2$ . Quando  $c_2 = 0$ , a órbita das soluções tende a zero seguindo a direção do eixo de  $e_1$ .

### $\lambda_1$ e $\lambda_2$ reais iguais

Seja  $\lambda_0 := \lambda_1 = \lambda_2$ . Se a multiplicidade geométrica de  $\lambda_0$  for 2, então a matriz  $A$  será conjugada a  $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ . A solução geral de  $y' = Jy$  é da forma  $y(t) = (c_1e^{\lambda_0 t}, c_2e^{\lambda_0 t})$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Caso  $\lambda_0 < 0$ , a origem será um **foco estável**; e caso  $\lambda_0 > 0$ , a origem será um **foco instável**.

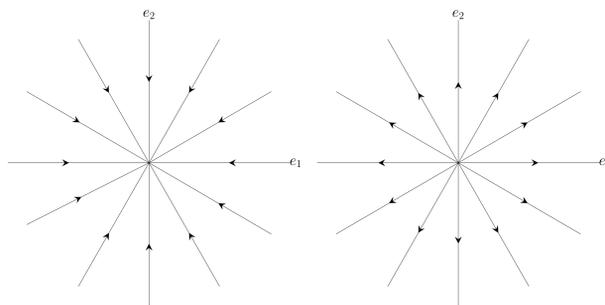


Fig. 3: Foco estável (esquerda) e foco instável (direita).

Agora, se a multiplicidade geométrica de  $\lambda_0$  for 1, a matriz  $A$  será conjugada a  $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ . A solução geral de  $y' = Jy$  é da forma  $y(t) = (ae^{\lambda_0 t}, (at + b)e^{\lambda_0 t})$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Caso  $\lambda_0 < 0$ , ocorre o caso em que a origem é um **nó impróprio estável**. Para  $a \neq 0$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{|y'(t)|} &= \frac{y'(t) te^{\lambda_0 t}}{te^{\lambda_0 t} |y'(t)|} \\ &= \frac{a\lambda_0 e^{\lambda_0 t} e_1 + b\lambda_0 e^{\lambda_0 t} e_2 + ae^{\lambda_0 t} e_2 + a\lambda_0 t e^{\lambda_0 t} e_2}{te^{\lambda_0 t} |y'(t)|} \\ &= \left( \frac{b\lambda_0 e_2}{t} + \frac{a(\lambda_0 e_1 + e_2 + \lambda_0 t e_2)}{t} \right) \frac{te^{\lambda_0 t}}{|y'(t)|} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a\lambda_0 e_2}{|a\lambda_0 e_2|}, \end{aligned}$$

Neste caso, as órbitas tendem a zero na direção do eixo de  $e_2$  [2].

Caso  $\lambda_0 > 0$ , a origem é um **nó impróprio instável**, e tem comportamento similar ao nó impróprio estável com a inversão da direção das soluções.

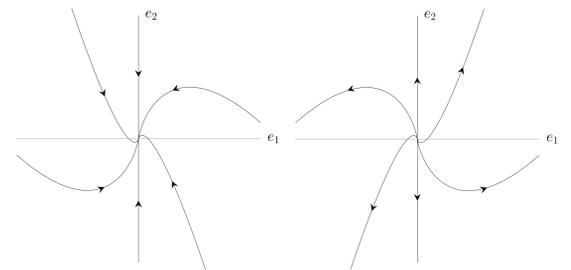


Fig. 4: Nô impróprio estável (esquerda) e nô impróprio instável (direita).

### $\lambda_1$ e $\lambda_2$ complexos conjugados

Sejam  $\lambda_1 = a + bi$  e  $\lambda_2 = a - bi$ , com  $b \neq 0$ . Neste caso, a matriz  $A$  será conjugada a  $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . A solução geral de  $y' = Jy$  é da forma  $y(t) = re^{at}(\cos(bt + \theta), -\sin(bt + \theta))$ , com  $r, \theta \in \mathbb{R}$ .

Se  $a = 0$ , a origem será um **centro**.

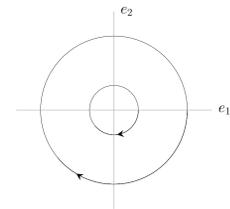


Fig. 5: Centro.

Se  $a < 0$ , o caso é de uma **espiral estável**; e se  $a > 0$ , o caso é de uma **espiral instável**.

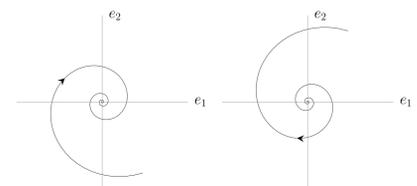


Fig. 6: Espiral estável (esquerda) e espiral instável (direita).

## 3. Conclusão

Neste trabalho foi descrito o comportamento assintótico das soluções de um sistema de equações diferenciais lineares autônomo bidimensional a partir da análise dos autovalores da matriz associada, e também foram apresentados todos os retratos de fase, a menos de uma conjugação topológica. Este é um primeiro passo no estudo do comportamento assintótico de EDOs. Os próximos passos desta iniciação científica serão estudar o comportamento assintótico de processos de evolução lineares com dicotomia exponencial, e também a propriedade do ponto de sela.

## Referências

- [1] DOERING, C.I.; LOPES, A.O. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.
- [2] RODRIGUES, H.M. **Equações Diferenciais Ordinárias**. São Carlos: ICMS USP, 2012.

Apoios: