

Equação dos pontos duplos e a da imagem para aplicações de reflexão ¹

Zampiva, José Rafael B.²; Okamoto, Bruna Orefice³; Tomazella, João Nivaldo⁴; Peñaford-Sanchis, Guilherme⁵

Resumo:

Seja $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{V}$ uma subvariedade complexa de um subespaço vetorial \mathcal{V} no qual um grupo de reflexão W age. Um mapeamento de reflexão é a restrição $\mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}^p$ do mapeamento quociente ω . Estudamos os espaços de pontos duplos K^2 , D^2 e D dos mapeamentos de reflexão, fornecendo uma descrição explícita da estrutura analítica dos ramos dos pontos duplos K_σ^2 , D_σ^2 , D_σ . No caso em que \mathcal{Y} é uma hipersuperfície em \mathcal{V} , obtemos equações explícitas para o espaço de pontos duplos D e a imagem de f . No caso de $(\mathcal{Y}^2, W_{\mathcal{Y}}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, isso fornece métodos eficientes para calcular os invariantes $\mu(D)$ e $\delta(D)$. Consideramos os espaços D_σ^2 e D_σ , que são espaços de Cohen-Macaulay de dimensão $n-1$. Pontos em D_σ^2 e D_τ^2 não têm componentes irredutíveis comuns para $\sigma \neq \tau$. Esta análise implica que D_σ^2 e D_τ^2 são localmente isomórficos em subconjuntos densos, com os isomorfismos mantendo as propriedades estruturais dos mapeamentos. A descrição dessas estruturas fornece uma base para entender a geometria dos mapeamentos de reflexão e suas aplicações em diversas áreas da matemática, como a teoria de singularidades e a topologia dos espaços de múltiplos pontos.

Palavras-chave: Aplicações de reflexão, Pontos duplos, Número de Milnor, A-Equivalência.

1. Grupos de Reflexão e aplicações de reflexão

Grupos de reflexão:

Seja V espaço vetorial de dimensão n . Uma reflexão em V é um operador linear $\sigma : V \rightarrow V$, satisfazendo:

- σ é unitária,
- σ tem ordem finita,
- $\dim \text{Fix } \sigma = \dim n - 1$

Um grupo de Reflexão W é um grupo gerado por reflexões. A ação de uma reflexão σ induz uma ação em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Um polinômio p é dito invariante para o grupo W se $\sigma \cdot p = p$, para todo $\sigma \in W$.

A aplicação órbita para W é $\omega = (p_1, \dots, p_n)$, onde os p_i 's são polinômios invariantes para o grupo W que age em $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Os polinômios p_i 's invariantes são: monômios de graus determinados d_i 's, onde, $\text{Ordem}(W) = d_1 \dots d_n$ e o número de reflexões em W é $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$.

Todos os grupos de reflexão são classificados, sendo, então, de fácil estudo e determinação dos polinômios invariantes para as aplicações ω_W .

Exemplos: $Z_{k_1} \times \dots \times Z_{k_n}$, S_n , D_n são exemplos clássicos de tais grupos.

Aplicações de reflexão:

Seja W grupo de reflexão agindo em \mathbb{C}^p e $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ um mergulho, uma aplicação de reflexão é a composição $\omega \circ h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$.

2. Fórmula da Imagem

Teorema: Para qualquer aplicação de reflexão $f = \omega \circ h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, temos que $\text{Im}(f) = V(g)$, onde

$$g = \prod_{\sigma \in W} (\sigma L) \circ s,$$

sendo $s : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ uma seção de ω .

3. Pontos Duplos: K_2 , D_2 , D

Pontos K_2 :

Considerando $\text{Im } h = \mathcal{Y}$, definimos

$$B_2(\mathcal{Y}) = \text{Bl}_{\Delta \mathcal{Y}}(\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}) = \{(u, u', v) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{P}^{n-1} \mid v \wedge (u - u') = 0\};$$

onde $v \wedge (u - u') = 0$ são os menos 2×2 da matriz

$$\begin{pmatrix} u_1 - u'_1 & \dots & u_n - u'_n \\ v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Além disso, considerando α_f a matriz $p \times n$, com entradas em $\mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times \mathcal{Y}}$, que satisfaz a seguinte equação:

$$f(u) - f(u') = \alpha_f \cdot (u - u').$$

Então, definimos

$$K_2(f) = \{(u, u', v) \in B_2(\mathcal{Y}) \mid \alpha_f(u, u') \cdot v = 0\}.$$

Em especial, para uma aplicação de reflexão $f = \omega|_{\mathcal{Y}}$, temos a seguinte decomposição:

$$K_2(\omega) = \bigcup_{\sigma \in W \setminus \{1\}} K_2^\sigma,$$

sendo

$$K_2^\sigma = \{(u, \sigma u, v) \in B^2(\mathbb{C}^p) \mid l_\sigma^\perp(v) = 0\},$$

com $V(l_\sigma^\perp) = \text{Fix } \sigma^\perp$.

Considerando, agora, $K_2^\sigma(f) = B_2(\mathcal{Y}) \cap K_2^\sigma$, temos, a priori, a seguinte decomposição como conjuntos:

$$K_2(f) = \bigcup_{\sigma \in W \setminus \{1\}} K_2^\sigma(f),$$

Teorema: Dada uma aplicação de reflexão $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ então: Como espaço complexo:

$$K_2^\sigma(f) = \{(u, \sigma u, v) \in K_2^\sigma \mid L(u) = 0, \alpha_f^\sigma(u) \cdot l_\sigma(v) = 0\}.$$

1. A dimensão de $K_2^\sigma(f)$ é pelo menos $2n - p$. E, se for igual então $K_2^\sigma(f)$ é localmente uma interseção completa.

2. o Blowup $B_2(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$ leva, isomorficamente, $K_2^\sigma(f) \setminus E$ ao espaço $\{(u, \sigma u) \mid u \in (\mathcal{Y} \times \sigma \mathcal{Y}) \setminus \text{Fix } \sigma\}$.

Considerando a projeção da aplicação de blowup em $K_2(f)$ definimos $D_2(f)$, e com isso, obtemos resultados análogos para $D_2(f)$ e, posteriormente para $D(f)$.

4. Fórmula para D para hipersuperfícies

Nesse caso, temos $D_\sigma(f) = V(\lambda_\sigma)$, sendo:

$$\lambda_\sigma = \begin{cases} \frac{\sigma L - L}{l_\sigma}, & \text{se } \sigma \text{ é uma reflexão} \\ \sigma L - L, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Obtemos então o seguinte teorema:

Teorema: Como espaços complexos, o espaço de pontos duplos $D(f)$ é o conjunto de zeros da seguinte equação

$$\lambda = \prod_{\sigma \in W \setminus \{1\}} \lambda_\sigma.$$

5. Exemplo para D_δ

Considere o grupo diedral D_8 agindo em \mathbb{C}^2 . Tal grupo admite a seguinte representação:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

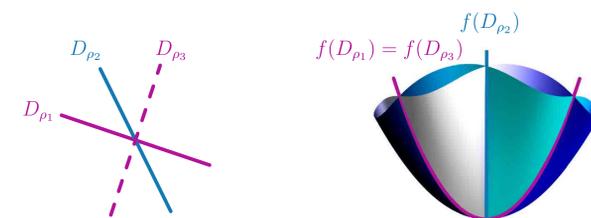
Então, considerando $D_8 \times Id$ agindo em \mathbb{C}^3 com $h(x, y) = (x, y, x+2y)$ e $\omega(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 y^2, z)$, temos $f = (x^2 + y^2, x^2 y^2, x + 2y)$.

A imagem de f em \mathbb{C}^3 é dada pela equação

$$16x^4 - 200x^2 y + 625y^2 - 40x^3 z^2 + 70xy z^2 + 33x^2 z^4 - 14yz^4 - 10xz^6 + z^8.$$

Além disso, seus pontos duplos são dados pelas seguintes equações:

$$\lambda_{\sigma_i} = 1, \lambda_{\rho_1} = 3x - y, \lambda_{\rho_2} = x + 3y, \lambda_{\rho_3} = 4x + 2y$$



Pontos duplos e a imagem para a aplicação $f = (x^2 + y^2, x^2 y^2, x + 2y)$

6. Invariantes μ e δ para aplicações de reflexão

Sabendo as equações dos pontos duplos de uma aplicação de reflexão, obtemos o seguinte resultado:

Teorema: Uma aplicação de reflexão $f : (\mathbb{C}^2, W_{\mathcal{Y}}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ é \mathcal{A} -finita se e somente se todos os números de milnor $\mu(D_\sigma(f))$ e todos os valores de contato $\mu(D_\sigma(f)) \cdot \mu(D_\tau(f))$ são finitos, com $\sigma \neq \tau$. Além disso,

$$\mu(D(f)) = \sum_{\sigma \in W \setminus \{1\}} (\mu(D_\sigma(f)) + \sum_{\tau \in W \setminus \{1\}} \mu(D_\sigma(f)) \cdot \mu(D_\tau(f))) - |W| + 2$$

$$\text{e}$$

$$\delta(D(f)) = \sum_{\sigma \in W \setminus \{1\}} (\delta(D_\sigma(f)) + \sum_{\tau \in W \setminus \{1\}} \delta(D_\sigma(f)) \cdot \mu(D_\tau(f))).$$

Referências

- [1] Zampiva, J.R.B; Sanchis, G. P.; Okamoto, B. O; Tomazella, J.N.; **Double points and image of reflection maps**. Arxiv. 2023
- [2] Sanchis, G. P.; **Reflection maps**. Math. Ann. 378, 559-598. 2020

¹Este trabalho foi apoiado parcialmente pela CAPES

²UFSCar. Este autor foi apoiado parcialmente pela CAPES

³UFSCar. Este autor foi apoiado pela FAPESP

⁴UFSCar. Este autor foi apoiado pela FAPESP

⁵Universidade de Valencia. Este autor foi apoiado por 'ERDF A way of making Europe'