UFV XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Introdução à Teoria dos Matroides

João Vitor Apolinário Araújo Godinho – joao.v.godinho@ufv.br [1]
Allan de Oliveira Moura – allan.moura@ufv.br

Resumo: *O intuito deste trabalho é uma iniciação à teoria dos matroides, estruturas matemáticas que abstraem a noção de independência, abordando os principais criptomorfismos, que é como chamamos os diversos modos de definir essas estruturas, e também algumas classes fundamentais de matroides, explorando, principalmente, a sua relação com a álgebra linear e teoria dos grafos. Além disso, mostramos como representar geometricamente alguns matroides.*

Palavras-chave: *Matroides, Combinatória, Grafos, Álgebra Linear.*

1. O que é um matroide?

Matroides são estruturas que abstraem a noção de independência linear. O desenvolvimento da teoria dos matroides foi estimulado, durante o século passado, pela álgebra linear e teoria dos grafos. Alguns matroides surgem diretamente do estudo de espaços vetoriais e são, naturalmente, ditos *vetoriais*, enquanto que outros são obtidos de grafos e são ditos *cíclicos*. Existe, porém, uma miríade de outros tipos de matroides. Além disso, existem conexões da teoria com diversas áreas da matemática, da otimização combinatória à geometria algébrica.

Matroides podem ser abordados por variados métodos axiomáticos, que são equivalentes, ainda que nem sempre a equivalência seja óbvia ou intuitiva, os chamamos de *criptomorfismos*. Apresentamos, neste pôster, teoremas que garantem a equivalência de diferentes meios de definir os matroides. Também mostramos alguns exemplos de matroides e como representá-los geometricamente.

2. Criptomorfismos

Axiomas de Independência

Definição. *Um matroide M é um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, em que E é um conjunto e $\mathcal{I}$ uma coleção de subconjuntos de E, que satisfaz as seguintes propriedades:*

(I.1) $\emptyset \in \mathcal{I}$. (Não-Trivialidade)

(I.2) *Se $I_2 \in \mathcal{I}$ e $I_1 \subseteq I_2$, então $I_1 \in \mathcal{I}$.* (Hereditariedade)

(I.3) *Se I_1 e I_2 pertencem a $\mathcal{I}$ e $|I_1| < |I_2|$, então existe um elemento x pertencente a $I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup x \in \mathcal{I}$.* (Aglutinação)

Os elementos de $\mathcal{I}$ são chamados de conjuntos *independentes* de M. Um subconjunto de E, que não pertence a $\mathcal{I}$, é dito *dependente*.

Coleção de Circuitos

Definição. *Um conjunto dependente minimal em um matroide M é chamado de circuito de M. Denotamos por $\mathcal{C}$ a coleção de circuitos de M.*

As seguintes propriedades caracterizam os elementos de $\mathcal{C}$:

(C.1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$. (Não-Trivialidade)

(C.2) *Se C_1 e $C_2 \in \mathcal{C}$ e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$.* (Empilhamento)

(C.3) *Se C_1 e C_2 são elementos distintos de $\mathcal{C}$ e $x \in C_1 \cap C_2$, então existe um elemento $C_3 \in C$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - x$.* (Eliminação)

Teorema. *Seja E um conjunto e $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz as propriedades* **(C.1)**, **(C.2)** e **(C.3)**. *Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de E que não contêm elementos de $\mathcal{C}$. Então, temos que $(E, \mathcal{I})$ é um matroide tal que $\mathcal{C}$ é a sua coleção de circuitos.*

Coleção de Bases

Definição. *Uma base de um matroide M é um conjunto independente maximal de M.*

A coleção $\mathcal{B}$ de bases de um matroide satisfaz as seguintes propriedades:

(B.1) *$\mathcal{B}$ não é vazia.* (Não-Trivialidade)

(B.2) *Se B_1 e $B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 - B_2$, então existe um elemento $y \in B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.* (Substituição)

Teorema. *Seja E um conjunto e $\mathcal{B}$ uma coleção de subconjuntos de E que satisfaz* **(B.1)** e **(B.2)**. *Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de E que estão contidos em algum elemento de $\mathcal{B}$. Então, $(E, \mathcal{I})$ é um matroide e $\mathcal{B}$ sua coleção de bases.*

Proposição. *Todos elementos de $\mathcal{B}$ possuem mesma cardinalidade.*

Função Posto

Definição. (Restrição de Matroides) *Sejam M o matroide $(E, \mathcal{I})$ e $X \subseteq E$. Seja $\mathcal{I}|X$ o conjunto $\{I \subseteq X$ tal que $I \in \mathcal{I}\}$. O par $(X, \mathcal{I}|X)$ é um matroide. Chamamos esse matroide de restrição de M à X. Denotamos $M|X$.*

Utilizando o fato da cardinalidade das bases de um matroide ser a mesma, generalizamos, com o posto, a ideia de dimensão da álgebra linear.

Definição. *O posto de X, $p(X)$, é a cardinalidade de uma base B do matroide $M|X$. Seja $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}^+$ uma função tal que $\rho(X) = p(X)$. Tal função é chamada função posto de M.*

A função posto satisfaz as seguintes propriedades:

(P.1) *Se $X \subseteq E$, então $0 \leq \rho(X) \leq |X|$.* (Normalização)

(P.2) *Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $\rho(X) \leq \rho(Y)$.* (Incrementação)

(P.3) *Se X e Y são subconjuntos de E, então:*

$$\rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

(Semi-Modularidade)

Teorema. *Seja E um conjunto e $\rho : 2^E \to \mathbb{Z}^+$, satisfazendo as propriedades* **(P.1)**, **(P.2)** e **(P.3)**. *Seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos de E tais que $\rho(X) = |X|$. Então, temos que $(E, \mathcal{I})$ é um matroide e ρ sua função posto.*

Fecho

Definição. *Seja M um matroide sob um conjunto E e ρ sua função posto. Seja $\phi : 2^E \to 2^E$ tal que, para todo $X \subseteq E$,*

$$\phi(X) = \{x \in E \text{ tal que } \rho(X \cup x) = \rho(X)\}$$

A função ϕ é chamada de operador de fecho de M e dizemos que $\phi(X)$ é o fecho de X em M ou que $\phi(X)$ é gerado por X em M.

O operador de fecho de um matroide M sob E satisfaz as propriedades:

(F.1) Se $X \subseteq E$, então $X \subseteq \phi(X)$. (Incrementação)

(F.2) Se $X \subseteq Y \subseteq E$, então $\phi(X) \subseteq \phi(Y)$. (Monotonia)

(F.3) Se $X \subseteq E$, então $\phi(\phi(X)) = \phi(X)$. (Idempotência)

(F.4) Se $X \subseteq E$, $x \in E$ e $y \in \phi(X \cup x) - \phi(X)$, então $x \in \phi(X \cup y)$. (Substituição de Mac Lane–Steinitz)

Teorema. *Seja E um conjunto e $\phi : 2^E \to 2^E$ tal que ϕ satisfaz* **(F.1)**, **(F.2)**, **(F.3)** e **(F.4)**. *Seja $\mathcal{I} = \{X \subseteq E$, tal que $x \notin \phi(X - x)$, para todo $x \in X\}$. Então, temos que $(E, \mathcal{I})$ é um matroide com operador de fecho ϕ.*

Hiperplanos

Definição. *Em um matroide M um subconjunto de $E(M)$ tal que $\phi(X) = X$ é chamado de plano ou conjunto fechado de M. Um hiperplano de M é um plano de posto igual a $\rho(M) - 1$.*

Teorema. *Seja $\mathcal{H}$ uma coleção de subconjuntos de E. O conjunto $\mathcal{H}$ é a coleção de hiperplanos de um matroide sob E se, e somente se, $\mathcal{H}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(H.1) $E \notin \mathcal{H}$. (Não-Trivialidade)

(H.2) *Se $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ e $H_1 \subseteq H_2$, então $H_1 = H_2$.* (Empilhamento)

(H.3) *Se $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$, com $H_1 \neq H_2$, e $x \in E - (H_1 \cup H_2)$, então existe um elemento $H_3 \in \mathcal{H}$ tal que $(H_1 \cap H_2) \cup x \subseteq H_3$.*

3. Exemplos

Matroides Vetoriais

Proposição. *Seja E o conjunto dos rótulos das colunas de uma matriz $A_{m,n}$ sob um corpo $\mathbb{F}$ e seja $\mathcal{I}$ a coleção de subconjuntos X de E tais que o multiconjunto de colunas rotuladas por X é um conjunto linearmente independente no espaço vetorial $V(m, \mathbb{F})$. Então, temos que $(E, \mathcal{I})$ é um matroide.*

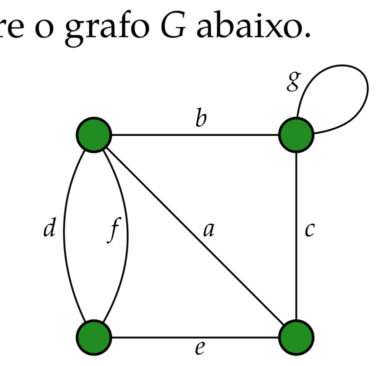
Exemplo. Considere a matriz A abaixo.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

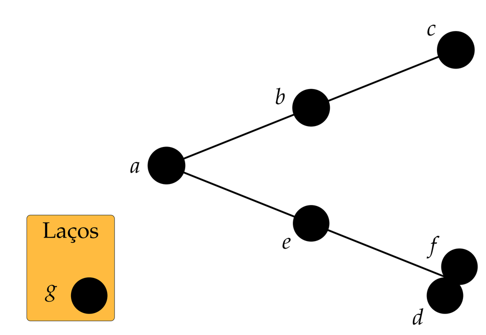
Matroides Gráficos

Teorema. *Seja E o conjunto de arestas de um grafo G e $\mathcal{C}$ a coleção de conjuntos de arestas dos ciclos de G. Então, $\mathcal{C}$ é a coleção de circuitos de um matroide sob E.*

Exemplo. Considere o grafo G abaixo.



O matroide obtido da matriz A é isomorfo ao matroide obtido do grafo G. Podemos representar geometricamente esse matroide pelo seguinte diagrama, em que cada conjunto independente unitário é um ponto distinto, os pontos correspondentes à classe paralela df são agrupados, os pontos correspondentes aos elementos dos circuitos de três elementos são colineares e os conjuntos dependentes unitários (laços) são encapsulados.



Matroides Uniformes

Sejam m e n inteiros não-negativos, com $m \leq n$. Seja E um conjunto com n elementos e $\mathcal{B}$ a coleção de subconjuntos com m elementos de E. Então, $\mathcal{B}$ é a coleção de bases de um matroide sob E. Denotamos esse matroide por $U_{m,n}$ e dizemos que é o *matroide uniforme de posto m em um conjunto de n elementos.*

Referências

GORDON, Gary; MCNULTY, Jennifer. *Matroids: A Geometric Introduction*. New York: Cambridge University Press, 2012.

OXLEY, James. *Matroid Theory*. 2ª. New York: Oxford University Press Inc., 2011. (Oxford Graduate Texts in Mathematics).

ROTA, Gian-Carlo. *Indiscrete Thoughts*. Boston: Birkhäuser, 2008. (Modern Birkhäuser Classics).

WELSH, Dominic. *Matroid Theory*. New York: Academic Press, Inc., 1976.

WHITNEY, Hassler. On the abstract properties of linear dependence. *Hassler Whitney Collected Papers*, Springer, p. 147–171, 1992.

Apoio: CNPq

[1] Bolsista do Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) da OBMEP.
[2] Departamento de Matemática. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Universidade Federal de Viçosa.