

# Os Teoremas de Pappus e Desargues

Pillar, João Pedro Galdino<sup>1</sup>;

**Resumo:** No presente trabalho serão apresentados o Teorema de Pappus e o Teorema de Desargues, sendo estes teoremas da Geometria Euclidiana, que sob as hipóteses garantem a colinearidade de três pontos. O objetivo será realizar a demonstração destes teoremas utilizando a Geometria Projetiva, e citar aplicações de ambos.

**Palavras-chave:** Geometria Projetiva, Pappus, Desargues

## 1. Introdução

Os Teoremas de Pappus e Desargues, tratam da colinearidade de pontos na Geometria Euclidiana e são resultados que podem ser demonstrados apenas com resultados da Geometria Euclidiana, porém pode-se realizar as demonstrações de uma forma elegante utilizando a Geometria Projetiva, sendo este o objetivo do trabalho, serão abordados os conceitos básicos e alguns resultados desta geometria, com ideia de projetivizar os Teoremas para realizar a demonstração de um deles e ao chegar na tese, voltar para a sua forma euclidiana, concluindo a demonstração. Além disso, serão citadas algumas diferenças entre as geometrias, visto que estaremos utilizando de técnicas de uma geometria não Euclidiana. Por fim temos aplicações dos teoremas mencionados anteriormente.

## 2. Teoremas de Pappus e Desargues

Tanto o Teorema de Pappus quanto o de Desargues tem a versão projetiva análoga à versão euclidiana, trocando assim pontos e retas por pontos projetivos e retas projetivas. Nesse contexto, ilustraremos os dois teoremas em sua versão euclidiana para a visualização destes. E a seguir enunciaremos o Teorema de Pappus em sua versão euclidiana, para assim motivarmos a demonstração que será feita no decorrer do trabalho.

**Teorema 3.1 (Teorema de Pappus)** Sejam quaisquer duas retas distintas  $l$  e  $s$  no Plano Euclidiano, tomando os pontos  $U, V$  e  $W$  pertencentes a  $l$  e  $U', V'$  e  $W'$  pertencentes a  $s$ , com todos os pontos distintos, traçamos os segmentos:  $UV', U'W, VU', V'W', WU'$  e  $WW'$ . Considere os pontos  $A = VW' \cap V'W$ ,  $B = UW' \cap U'W$  e  $C = UV' \cap U'V$ . O Teorema de Pappus afirma que assim os ditos pontos  $A, B$  e  $C$  são colineares.

Abaixo, segue uma ilustração para compreendermos o enunciado.

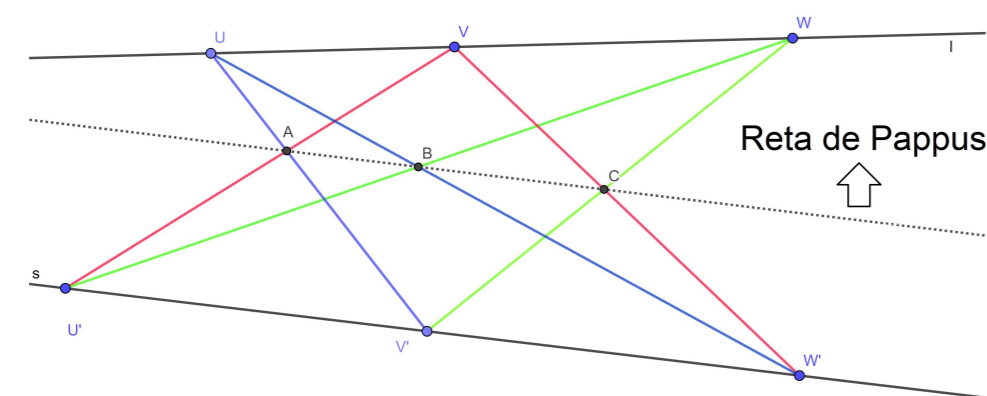


Figura 1

Como comentado previamente, faremos agora uma breve introdução à alguns conceitos e resultados da Geometria Projetiva, que serão utilizados para a demonstração dos teoremas.

**Definição 3.1** O Plano Projetivo  $\mathbb{RP}^2$ , será o conjunto quociente obtido de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , com a relação de equivalência  $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}; v = \lambda w$ . Iremos chamar então  $\mathbb{RP}^2$  de **Plano Projetivo** e seus elementos de **pontos projetivos**.

**Notação:** Denotamos um ponto projetivo (a classe de equivalência) por  $\bar{v}$  onde  $v = \{\lambda v; \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$ .

**Definição 3.2** Um subconjunto  $r \subset \mathbb{RP}^2$  é uma **reta projetiva** se  $r$  for a imagem de um plano  $\Gamma$  pela projeção  $\Psi: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^2$ , em outras palavras, quando for um plano perfurado.

**Notação:** Denotamos uma reta projetiva por  $r_{\bar{\eta}}$  onde  $\eta$  é um vetor normal ao plano  $\Gamma$ . Além disso, diremos que três pontos projetivos são **colineares** se existe uma reta projetiva que os contém.

Visto que agora estamos trabalhando com uma Geometria não Euclidiana, temos algumas diferenças do que estamos habituados, um dos principais resultados que chamam atenção é, que nesta, quaisquer retas projetivas tem interseção, isto é, não existem retas paralelas, e ainda, dadas duas retas projetivas, conseguimos descobrir qual é a interseção, segue abaixo tal resultado.

**Proposição 3.1** Duas retas projetivas distintas,  $r_{\bar{\eta}}$  e  $r_{\bar{v}}$  concorrem em um único ponto  $\bar{v}$ , tal que  $\bar{v} = \bar{\eta} \times \bar{v} \in \mathbb{RP}^{2*}$ .

**Proposição 3.2** Três pontos  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares se, e somente se,  $\det[u, v, w] = 0$ .

**Proposição 3.3** Por dois pontos projetivos  $\bar{v}$  e  $\bar{u}$  incide uma reta projetiva  $r_{\bar{\eta}}$ , onde  $\bar{\eta} = \bar{v} \times \bar{u} \in \mathbb{RP}^{2*}$ .

Agora que conhecemos alguns entes desta Geometria, principalmente se tratando de colinearidade, será introduzida a noção de colineação em  $\mathbb{RP}^2$ , e alguns outros resultados relacionados a tal.

**Definição 3.3** Uma **colineação** é uma aplicação biunívoca  $\psi: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  que preserva a colinearidade, isto é, se  $u, v$  e  $w$  são pontos projetivos colineares, então as imagens  $\psi(u), \psi(v)$  e  $\psi(w)$  são pontos projetivos colineares.

**Proposição 3.4** Se  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  e  $\bar{t}$  são pontos de  $\mathbb{RP}^2$  não colineares três a três, então existe uma colineação  $A: \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  induzida por um operador linear invertível  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que:  $A(\bar{e}_1) = \bar{u}, A(\bar{e}_2) = \bar{v}, A(\bar{e}_3) = \bar{w}$  e  $A(1:1:1) = \bar{t}$ .

Todas as demonstrações dos resultados mencionados estão disponíveis em [1]. Agora, temos os pré-requisitos necessários para fazer a demonstração do teorema utilizando a Geometria Projetiva, a seguir o Teorema de Pappus, em sua versão projetiva.

**Teorema 3.2 (Teorema de Pappus - Versão Projetiva)** Se  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{u}', \bar{v}', \bar{w}'$ , são seis pontos projetivos distintos, dos quais os três primeiros estão sobre uma reta  $r_{\bar{\eta}}$  e os três últimos fora desta reta e sobre uma outra reta  $r_{\bar{v}}$ , então os pontos de interseção  $\bar{a} = r_{\bar{\eta}u'v'} \cap r_{\bar{\eta}'u'v}$ ,  $\bar{b} = r_{\bar{\eta}uv'} \cap r_{\bar{\eta}'uv}$  e  $\bar{c} = r_{\bar{\eta}vw'} \cap r_{\bar{\eta}'vw}$  são colineares.

**Dem:** Considere  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  e  $\bar{b}$ .

Note que, por hipótese, tais pontos são não colineares três a três, logo, pela Proposição 3.4, podemos supor que:  $\bar{u} = (1:0:0)$ ,  $\bar{v}' = (0:1:0)$ ,  $\bar{w} = (0:0:1)$  e,  $\bar{b} = (1:1:1)$ .

(1) Como por hipótese  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares, tomando um representante de cada classe respectivamente,  $u = (1, 0, 0), v = (v_1, v_2, v_3)$  e  $w = (0, 0, 1)$ , pela Proposição 3.2,  $\det[u, v, w] = 0$ , calculando, temos que  $\det[u, v, w] = v_2$ , concluímos que  $v_2 = 0$ , e portanto,  $v = (v_1, 0, v_3)$  e, temos que  $v = (v_1:0:v_3)$ , além disso, como por hipótese todos os pontos são distintos, em particular  $v \neq w \Rightarrow v_1 \neq 0$  e  $v \neq u \Rightarrow v_3 \neq 0$ , e portanto, temos que  $v = v_3(\frac{v_1}{v_3}:0:1) = (\beta:0:1)$ , com  $\beta = \frac{v_1}{v_3} \neq 0$ .

(2) Como  $\bar{u}, \bar{v}$  e  $\bar{w}$  são colineares, com raciocínio análogo ao anterior verificando quando  $\det[u, v, w] = 0$ , concluímos que  $v = (\beta:0:1)$  e, do mesmo jeito  $\bar{u}' = (1:1:\alpha')$  e  $\bar{w}' = (\gamma':1:1)$ .

**OBS:** Até agora, temos:  $\bar{u} = (1:0:0)$ ,  $\bar{v} = (\beta:0:1)$ ,  $\bar{w} = (0:0:1)$ ,  $\bar{u}' = (1:1:\alpha')$ ,  $\bar{v}' = (0:1:0)$ ,  $\bar{w}' = (\gamma':1:1)$  e,  $\bar{b} = (1:1:1)$ .

Vejam, que falta sabermos  $\bar{a}$  e  $\bar{c}$ . Faremos então para tais pontos.

(3) Para  $\bar{a}$ , temos que  $\bar{a} = r_{\bar{\eta}u'v'} \cap r_{\bar{\eta}'u'v}$ , isto é,  $\bar{a} = \overline{\eta_{u'v'} \times \eta_{v'u'}}$ , vejamos então quem são estas normais.

Para  $\eta_{u'v'}$ , que é o vetor normal da reta que passa pelos pontos projetivos  $\bar{u}$  e  $\bar{v}'$ , este é, tal que  $\eta_{u'v'} = u \times v'$ , calculando o determinante, concluímos que  $\eta_{u'v'} = (0, 0, 1)$ .

Para  $\eta_{v'u'}$ , fazemos  $\eta_{v'u'} = u' \times v = (1)i + (\alpha'\beta - 1)j + (-\beta)k$ , portanto  $\eta_{v'u'} = (1, \alpha'\beta - 1, -\beta)$ .

Como  $\bar{a}$  é tal que as duas retas acima incidam em  $\bar{a}$ , temos que  $\bar{a} = (0, 0, 1) \times (1, \alpha'\beta - 1, -\beta)$ , realizando a operação com um representante de cada classe, temos um representante para a classe  $\bar{a}$  é  $(-\alpha'\beta + 1, 1, 0)$ , e então  $\bar{a} = (-\alpha'\beta + 1:1:0)$ .

Fazendo  $(0, 0, 1) \times (1, \alpha'\beta - 1, -\beta)$  concluímos que  $\bar{a} = (-\alpha'\beta + 1:1:0)$ ; Com esse mesmo processo, para  $\eta_{vw'}$  e  $\eta_{v'w}$ , obtemos  $\bar{c} = (0:\beta:\beta - \gamma')$ .

(4) Sabemos que  $\bar{u}', \bar{v}', \bar{w}' \in r_{\bar{v}}$ , logo, estes são colineares, tomando os representantes de cada um desses pontos, teremos que  $\det[u', v', w'] = 1 - \gamma'\alpha' = 0$ . \*

(5) Por outro lado, analisando os pontos que queremos mostrar ser colineares,  $\bar{a}, \bar{b}$  e  $\bar{c}$ . Temos que  $\det[a, b, c] = \beta - \alpha'\beta\gamma' = \beta(1 - \alpha'\gamma')$ , onde pela equação (\*) temos que  $\det[a, b, c] = \beta(1 - \alpha'\gamma') = 0$ . Assim, os pontos são colineares, finalizando a demonstração.

A seguir, temos uma ilustração do Teorema de Desargues, que será enunciado na sua versão projetiva logo em seguida.

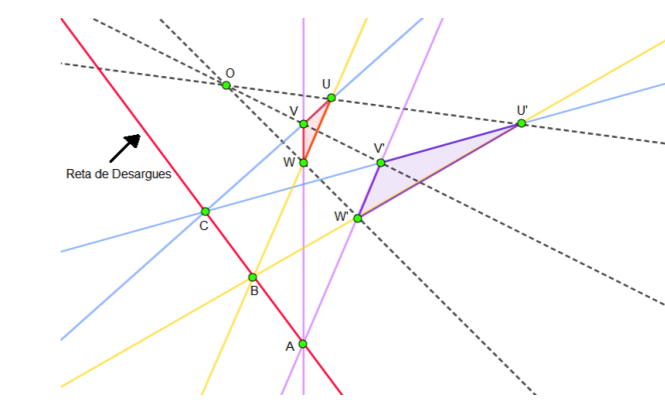


Figura 2

**Teorema 3.3 (Teorema de Desargues Versão Projetiva)**

Se  $\Delta = \{u, v, w\}$  é um conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares,  $\Delta' = \{u', v', w'\}$  outro conjunto de três pontos projetivos distintos e não colineares tais que a interseção  $\Delta \cap \Delta' = \emptyset$  e além disso,  $\{p\} = r_{\bar{\eta}_{uv'}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w}} \cap r_{\bar{\eta}_{w'u}}$ . Então, os pontos projetivos  $\bar{a}, \bar{b}$  e  $\bar{c}$  são colineares, em que:  $\bar{a} = r_{\bar{\eta}_{uv}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w'}}$ ,  $\bar{b} = r_{\bar{\eta}_{uv'}} \cap r_{\bar{\eta}_{v'w}}$ ,  $\bar{c} = r_{\bar{\eta}_{uv}} \cap r_{\bar{\eta}_{w'u}}$ .

A demonstração desse teorema será omitida, visto que é feita com os mesmos argumentos da anterior. Partiremos então para algumas aplicações dos teoremas, que são os problemas das árvores.

**Pergunta 1:** Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores? Para esta pergunta, podemos notar que sob as condições do Teorema de Desargues podemos obter tais pontos desta forma. Porém, também é possível solucioná-lo de outra maneira, como na figura abaixo. Porém, se acrescentarmos mais uma condição ao problema, conseguimos fazer com que a solução necessariamente esteja nas hipóteses do teorema, e essa é a motivação para a próxima pergunta.

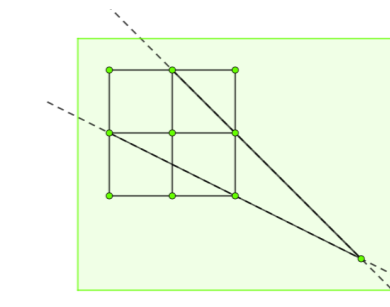


Figura 3

**Pergunta 2:** Como plantar dez árvores em dez filas de três árvores cada uma de modo que cada árvore está em exatamente três filas? Como comentado anteriormente, dada essa condição adicional, temos que qualquer disposição das árvores que resolvem o problema, é possível encontrar 7 pontos nas condições para utilizar o Teorema.

**Pergunta 3:** Como plantar 9 árvores em dez filas de três árvores? A solução é construída pelo Teorema de Pappus, e qualquer outra solução possível, terá 6 pontos sob as hipóteses dele.

## 3. Conclusão

Em virtude do que foi mencionado, podemos observar que apesar de os teoremas focados no trabalho serem da Geometria Euclidiana, podemos demonstrá-los de uma forma mais simples, utilizando a Geometria Projetiva, assim, fazendo com que a prova se resume a calcular determinantes de matrizes  $3 \times 3$ , que por sua vez pode ser mais vantajoso do que a utilização de alguns resultados da GE, para efetuar a demonstração. Ademais, nota-se que além da beleza dos teoremas, estes tem aplicação nos problemas das árvores, que consiste em plantar árvores enfileiradas sob certas condições.

## Referências

[1] BARROS, Abdênago; ANDRADE, Plácido. **Introdução a geometria projetiva**. SBM, 2010.

Apoios: