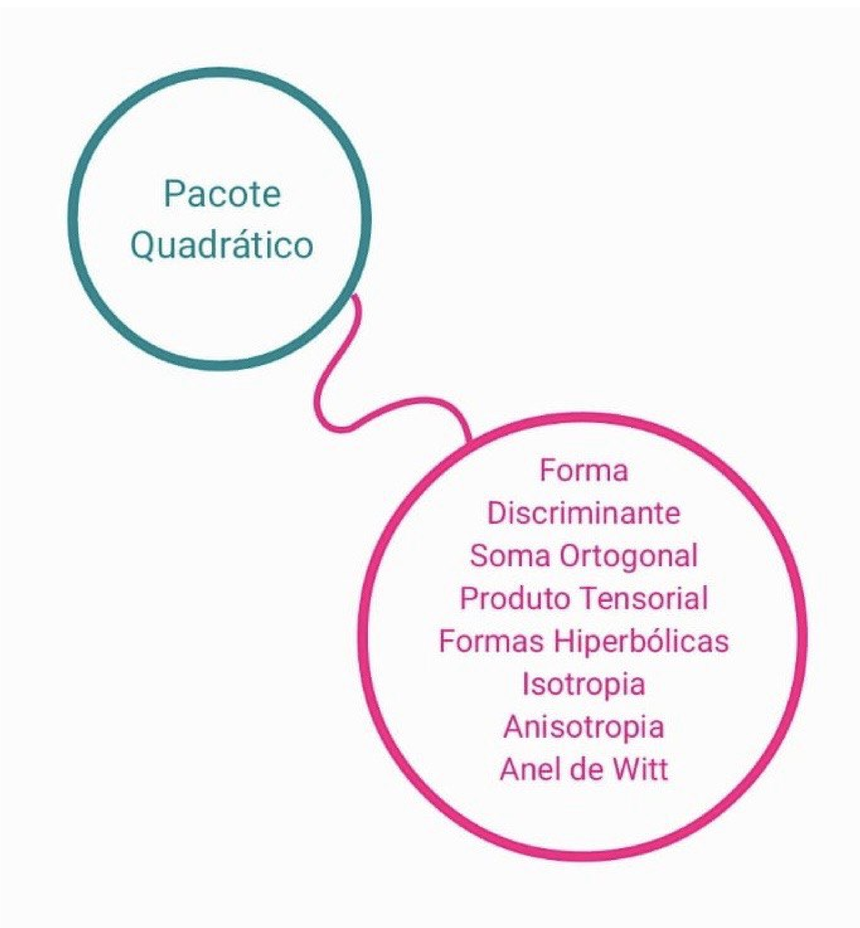
Formas Quadráticas, Topologia e Invariantes de Corpos

Jéssica Duarte Severino
Hugo Luiz Mariano (Orientador)

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação- ICMC
Universidade de São Paulo
jessicaduarte4@usp.br

O Pacote Quadrático



O Invariante Nível (Level)

- Um corpo K é dito **(formalmente) real** se $-1 \notin \sum K^2$. Caso contrário, K será dito **não-real**.
- Para um anel comutativo com unidade R, o número

$$s(R) = \min\{n : -1 = e_1^2 + ... + e_n^2, e_i \in R\}$$

  é chamado de **nível** de R. Se -1 não é uma soma de quadrados em R, definimos $s(R) = \infty$.
- Para um espaço topológico com involução (X, i), o número

$$s(X, i) = \min\{n \in \mathbb{N} | \exists f : (X, i) \to (S^{n-1}, -1)\}$$

  é chamado de **nível** de (X, i). Se não existir n com essa propriedade, definimos $s(X, i) = \infty$.

Exemplos Variados

- Todo subcorpo de $\mathbb{R}$ é formalmente real.
- $s(\mathbb{C}) = 1$ (pois $-1 = i^2$ em $\mathbb{C}$).
- char $K = 2 \Rightarrow -1 = 1 \in K \Rightarrow s(K) = 1$.
- O anel $\mathbb{R}/4\mathbb{Z}$ tem nível $s(\mathbb{R}) = 3$.
- O anel $\mathbb{Z}_{(p)}$ dos inteiros p-ádicos tem nível $s(\mathbb{Z}_{(p)}) = 1, 2$ ou 4.
- $X = \mathbb{R}^n$ ou

$$X = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}, i(x) = -x$$

  para $x = (x_1, \dots, x_n)$, é chamada de mapa antipodal.
- $X = \mathbb{C}^n$, $i(x_1, \dots, x_n) = (\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$, onde $\overline{x_j}$ é a conjugação complexa de x_j.
- Seja $\mathfrak{a} < \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ um ideal. Seja $X = V_c(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{C}^n$ o conjunto algébrico afim definido por $\mathfrak{a}$, isto é,

$$X = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{a}\}.$$

  X herda a topologia de $\mathbb{C}^n$. Temos que (X, i) é livre de pontos fixos se e somente se o ideal $\mathfrak{a}$ não tem zeros reais, digamos

$$\mathfrak{a} = \langle 1 + X_1^2 + \cdots + X_n^2 \rangle$$

.

Contexto Histórico

- Desde os anos 1930 sabe-se que o nível de um corpo pode ser $1, 2, 4, 8$ ou um múltiplo de 16 (van den Waerden, H. Kneser).
- As principais perguntas permaneceram em aberto: Existe um corpo não real K com $s(K) > 4$? O $s(K)$ é sempre uma potência de 2?

O Teorema Principal

Para todo número natural n, o domínio integral

$$A_n := \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]/\langle 1 + x_1^2 + ... + x_n^2 \rangle$$

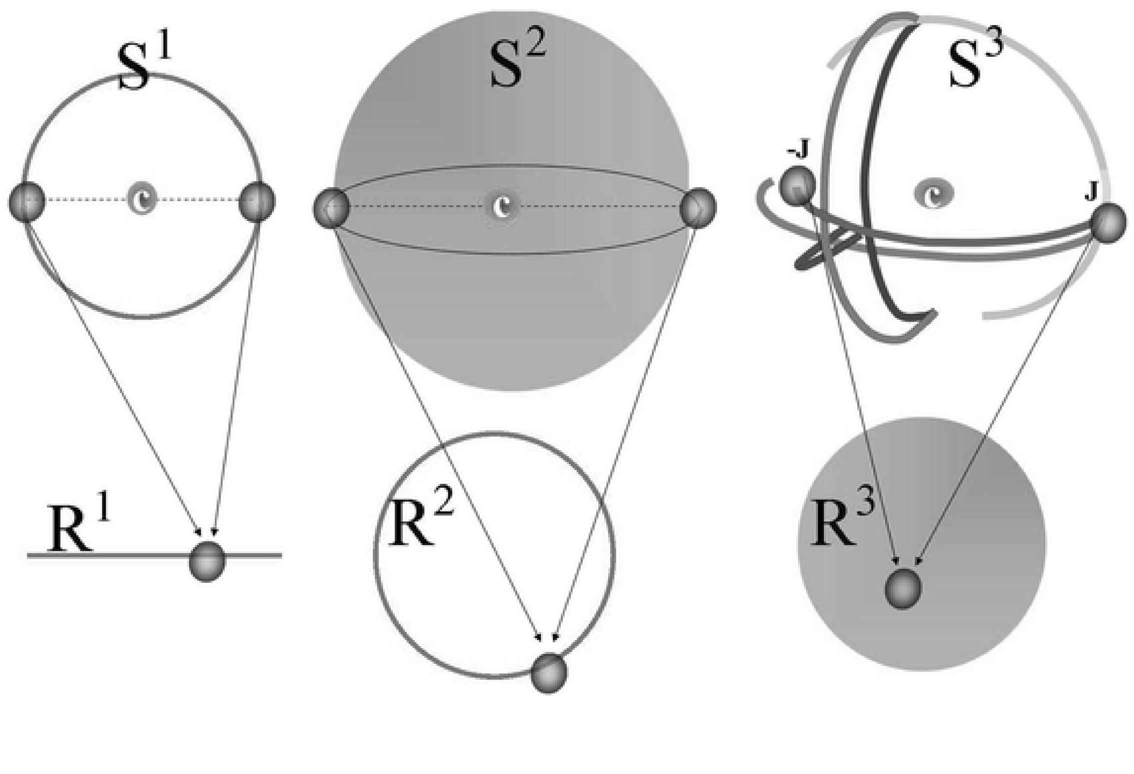
possui nível $s(A_n) = n$.

Aplicações

O Teorema de Borsuk-Ulam

Uma das maneiras de demonstrar o Teorema Principal é através do uso do Teorema de Borsuk-Ulam (e das suas consequências).

Teorema (Borsuk-Ulam). Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ com $f = (f_1, \dots, f_n)$ uma função contínua “ímpar” ($f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in S^n$). Então f se anula para pelo menos um ponto $a \in S^n$.



Borsuk-Ulam

Fig. 1: Karol Borsuk à esquerda e Stanisław Ulam à direita.

Problemas em Aberto

- Como calcular explicitamente o nível de um corpo dado K? Por exemplo, como calcular $s(K(X_1, ..., X_n))$?
- Dado $n \in \mathbb{N}$, existe um corpo K tal que $s(K) = 2^n$?
- Dado um todo anel comutativo R, seja

$$A_n(R) := R[X_1, ..., X_n]/\langle 1 + x_1^2 + ... + x_n^2 \rangle.$$

  É verdade que $s(A_n(R)) = \min(n, s(R))$?

Estudos Futuros

- Explorar os "tripés formas quadráticas - ordens - valorações" e "formas quadráticas - K Teoria - cohomologia Galoisiana".
- Abordar aspectos lógicos da teoria de formas quadráticas via grupos especiais e multi-álgebras.
- Explorar as aplicações das teorias algébricas de formas quadráticas nas geometrias (Diferencial, Algébrica e Algébrica Real).

Referências

[1] A. Pfister. Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology. London Mathematical Society, LNS 217, 1995.

[2] T. Y. Lam. The Algebraic Theory of Quadratic Forms (2nd ed., reimpressão). W. A. Benjamin, 1980.

[3] J. R. Munkres. Elements of algebraic topology. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984

[4] J. Bochnak, M. Coste, M-F Roy. Real Algebraic Geometry. Springer

[5] W. Scharlau. Quadratic and Hermitian forms, volume 270. Springer Science & Business Media, 2012.

[6] I. Efrat. Valuations, orderings, and Milnor K-theory. Number 124. American Mathematical Soc., 2006.

[7] H. L. Mariano, H. R. de O. Ribeiro, K. M. de A. Roberto. Uma Jornada pelas Teorias Algébricas de Formas Quadráticas. Editora da Física, 2021.

[8] H. L. Mariano, H. R. de O. Ribeiro, K. M. de A. Roberto. Functorial relationship between multirings and the various abstract theories of quadratic forms. São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 16: 5-42, 2022.