X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Fórmulas de Área e Coárea[1]

Casellato, Henrique[2].

Resumo: *O estudo das fórmulas de área e coárea são imperativos no ramo da Teoria Geométrica da Medida, pois com elas, torna-se possível calcular, por meio da integração do jacobiano do mapeamento Lipschitz $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, respectivamente, a medida n-dimensional da imagem de f (quando $n \le m$) e a integral da medida $(n-m)$-dimensional dos conjuntos de nível de f (quando $n \ge m$). Esses resultados são extensões da famosa fórmula de mudança de variáveis para integrais de Riemann no Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis. Para entender por completo os conceitos de área e coárea, são necessários alguns conceitos preliminares, como propriedades de diferenciação de funções Lipschitz, o teorema de Rademacher, mapeamentos lineares e jacobianos. Por fim, o objetivo desse trabalho é introduzir as fórmulas de área e coárea (junto com uma breve explicação dos fundamentos preliminares) e suas aplicações mais comuns.*

Palavras-chave: *geometria, coárea, área, medida, integração.*

1. Conceitos preliminares

Para entender por completo as fórmulas de área é coárea, antes é preciso introduzir alguns conceitos importantes, desde funções Lipschitz até Jacobianos.

Definição 2.1 *Seja $A \subset \mathbf{R}^n$, a função $f : A \to \mathbf{R}^m$ é chamada de **Lipschitz** se*

$$|f(x) - f(y)| \le C|x - y| \quad (1)$$

para alguma constante C e para todo $x, y \in A$. A menor constante C que satisfaz (1) para todo x, y é denotada por

$$Lip(f) \equiv \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}; x, y \in A, x \neq y\right\}$$

Definição 2.2 *Uma função $f : A \to \mathbf{R}^m$ é chamada de **localmente Lipschitz** se para cada compacto $K \subset A$, existe uma constante C_K tal que*

$$|f(x) - f(y)| \le C_K|x - y|$$

para todo $x, y \in K$.

Teorema 2.1 *(Teorema de Rademacher) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ uma função localmente Lipschitz, então f é $\mathcal{L}^n$ diferenciável quase-sempre.*

Teorema 2.2 *(Teorema da decomposição polar) Seja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ um mapeamento linear.*

i. Se $n \le m$, existem dois mapas, um simétrico $S : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ e um ortogonal $O : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ tal que $L = O \circ S$.

ii. Se $n \ge m$, existem dois mapas, um simétrico $S : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ e um ortogonal $O : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ tal que $L = S \circ O^\star$. Com $A^\star$ representando o adjunto de A.

Definição 2.3 *Seja $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é linear.*

*i. Se $n \le m$, $L = O \circ S$ e o **Jacobiano** de L é definido como $\|L\| = |\det S|$.*

*ii. Se $n \ge m$, $L = S \circ O^\star$ e o **Jacobiano** de L é definido como $\|L\| = |\det S|$.*

Definição 2.4 *Seja Df a matriz gradiente de f. O Jacobiano de f é definido como*

$$Jf(x) \equiv \|Df(x)\| \quad (\mathcal{L}^n \text{ q.s. } x).$$

Para relembrar,

Definição 2.5 *i. Seja. $A \subseteq \mathbf{R}^n$, $0 \le s < \infty$ e $0 < \delta \le \infty$, escreve-se*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\left(\frac{diam C_j}{2}\right)^s \middle| A \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty C_j, diam C_j \le \delta\right\},$$

onde

$$\alpha(s) := \frac{\sqrt{\pi^s}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}.$$

ii. Para A e s como acima, define-se

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

iii. Chama-se $\mathcal{H}^s$, a medida de Hausdorff s-dimensional em $\mathbf{R}^n$.

Definição 2.6 *O mapeamento $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ é a **função de multiplicidade**, também escrita como $N(f, y)$, que é o número de elementos de $f^-1(y)$.*

2. Fórmula da área

Teorema 3.1 *(**Fórmula da Área**) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz com $n \le m$, então para cada subconjunto $\mathcal{L}^n$-mensuráveis $A \subset \mathbf{R}^n$,*

$$\int_A Jf \, dx = \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{H}^0\left(A \cap f^{-1}(y)\right) d\mathcal{H}^n(y).$$

Ou seja, a medida $\mathcal{H}^n$ da imagem $f(A) \subset \mathbf{R}^n$, contando a multiplicidade, pode ser computada pela integral do Jacobiano Jf sobre A.

Exemplo 3.1 *(**Comprimento de uma curva**) ($n = 1$, $m \ge 1$). Assume-se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz e injetiva. Escrevendo*

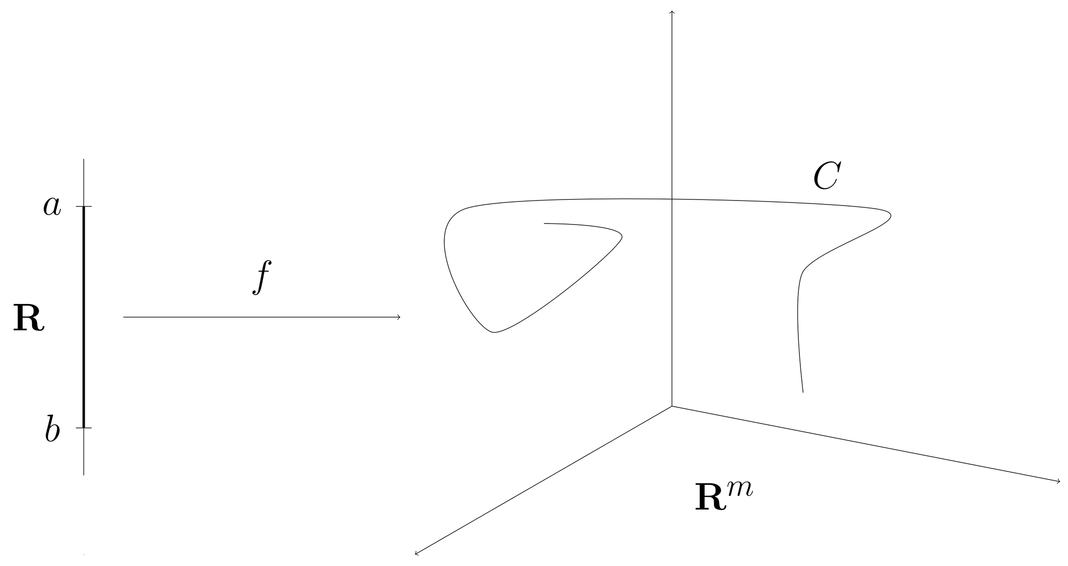
$$f = \left(f^1, ..., f^m\right) \quad e \quad Df = \left(\frac{d}{dt}f^1, ..., \frac{d}{dt}f^m\right),$$

da forma que

$$Jf = |Df| = |\frac{d}{dt}f|.$$

Para $-\infty < a < b < \infty$, define-se uma curva $C := f([a, b]) \subset \mathbf{R}^m$, então

$$\mathcal{H}^1(C) = \text{"comprimento" de } C = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}f\right| dt$$



Exemplo 3.2 *(Área de superfície de uma hipersuperfície paramétrica) ($n \ge 1$, $m = n + 1$). Supõe-se $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n+1}$ é Lipschitz, contínua e injetiva, escrevendo*

$$f = (f^1, ..., f^{n+1}) \quad e \quad Df = \begin{bmatrix} f^1_{x_1} & \cdots & f^1_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^{n+1}_{x_1} & \cdots & f^{n+1}_{x_n} \end{bmatrix}_{(n+1)\times n}$$

da forma que

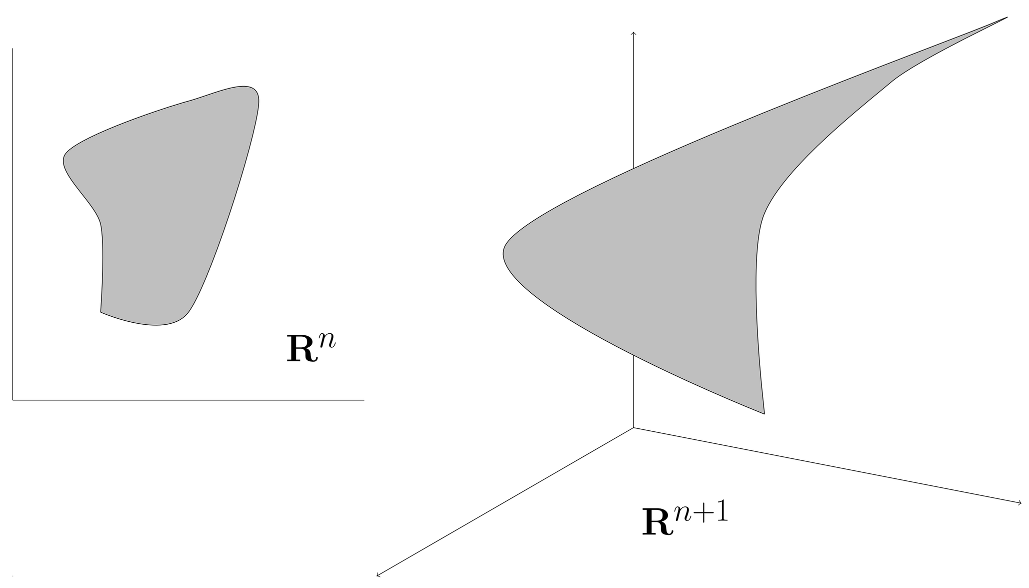
$$(Jf)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\partial(f^1, ..., f^{k-1}, f^{k+1}, ..., f^{n+1})}{\partial(x_1, ..., x_n)}\right)^2.$$

Para cada conjunto aberto $U \subseteq \mathbf{R}^n$, escreve-se

$$S := f(U) \subseteq \mathbf{R}^{n+1},$$

então, a área de superfície n-dimensional de S

$$\mathcal{H}^n(S) = \int_U \left(\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{\partial(f^1, ..., f^{k-1}, f^{k+1}, ..., f^{n+1})}{\partial(x_1, ..., x_n)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx.$$



3. Fórmula da Coárea e aplicações

Teorema 4.1 *(Fórmula da coárea) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz, com $n \ge m$, então para cada subconjunto $\mathcal{L}^n$-mensuráveis $A \subset \mathbf{R}^n$,*

$$\int_A Jf \, dx = \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}\left(A \cap f^{-1}(y)\right) dy.$$

Nota-se que a fórmula da coárea é uma generalização "curvilínea" do teorema de Fubini.

Teorema 4.2 *(Fórmula de mudança de variáveis) Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ Lipschitz, $n \ge m$, então para cada função $\mathcal{L}^n$-somável $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$,*

i. $g|_{f^{-1}(y)}$ é $\mathcal{H}^{n-m}$-somável para $\mathcal{L}^m$ q.s. y; e

ii.

$$\int_{\mathbf{R}^n} g(x)Jf(x)dx = \int_{\mathbf{R}^m}\left(\int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-m}\right) dy.$$

Exemplo 4.1 *Uma aplicação da fórmula da coárea é no cálculo de integrais sobre conjuntos de nível. Assumindo $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ Lipschitz contínua, então*

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Df| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(f = t) dt.$$

Assumindo também que $\operatorname{ess\,inf} |Df| > 0$ e supondo que $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ é $\mathcal{L}^n$-somável, então

$$\int_{\{f > t\}} g dx = \int_t^\infty \left(\int_{\{f = s\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1}\right) ds.$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\{f > t\}} g dx\right) = -\int_{\{f = t\}} \frac{g}{|Df|} d\mathcal{H}^{n-1}$$

para $\mathcal{L}^1$-q.s. t.

4. Agradecimentos

Meus estudos e meu trabalho de Iniciação Científica são financiados pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Processo nº 2023/12997-1.

Referências

[1] EVANS, Lawrence C.;GARIEPY, Ronald F. Measure theory and fine properties of functions, Revised Edition **CRC Press, Inc.**, 2015.

Apoios:

[1] Parte do trabalho de Iniciação Científica apoiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e orientada pelo Prof. Hermano Frid, DCM/USP-Ribeirão Preto.
[2] Este autor foi apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).