X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

A hipótese de Riemann e a distribuição dos números primos

Barata, Gustavo Alves[1];

Resumo: *A busca por um padrão na distribuição dos números primos é um problema em aberto na matemática que perdura na comunidade científica a séculos. Dado o impacto e importância desses números para a construção e entendimento da matemática e para o mundo, essa busca se torna essencial. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar a história por trás da distribuição dos números primos, de modo que será dividido em duas partes: a história acerca do Teorema dos Números Primos e a Hipótese de Riemann.*

Palavras-chave: *Teorema dos Números Primos, Função Zeta, Hipótese de Riemann.*

1. Introdução

Na Grécia Antiga, os números primos já eram vistos como essenciais para entender a Matemática, dada a sua importância na construção dos números naturais. Na Idade Moderna e Contemporânea, os números primos são de extrema importância para a área da Teoria dos Números, devido a grande quantidade de teoremas presentes nela que os envolvem.

Dessa forma, vários matemáticos famosos estudaram os números primos em algum momento de suas vidas, por diversos motivos e objetivos, como Friedrich Gauss, Pafnuti Chebyshev, Jacques Hadamard, Leonhard Euler e Bernhard Riemann. Porém, há uma questão que assombra os matemáticos desde a Grécia Antiga: como os números primos estão distribuídos nos números naturais e, além disso, como localizá-los de forma eficiente?

Portanto, o objetivo deste trabalho é, justamente, apresentar a história que originou um dos teoremas mais importantes acerca dos números primos e sua distribuição e, também, um dos principais problemas em aberto na matemática que é intimamente ligado a ele: a Hipótese de Riemann.

2. A Conjectura de Gauss

Desde Euclides (c.350-300 a.C), sabemos que há infinitos números primos, mas entender a sua ordem de aparição foi (e ainda é) um verdadeiro desafio. Friedrich Gauss (1777-1855) foi o primeiro matemático a fazer uma estimativa realmente boa sobre o comportamento desses números. O grande avanço de Gauss foi mudar a pergunta que os matemáticos se faziam: em vez de querer saber a localização precisa de qualquer número primo, ele quis saber a quantidade de números primos entre 1 e outro número natural N.

Em 1792, por volta dos 15 anos de idade, enquanto estudava logaritmos utilizando um livro que ganhara de presente, Gauss percebeu que havia uma tabela de números primos na contracapa e achou curioso a sua presença em um livro que abordava um conteúdo (logaritmos) que, até o momento, não parecia estar relacionado com os números primos. Denotando por $\pi(N)$ a função que conta a quantidade de números primos entre 1 e N (ex: $\pi(100) = 25$, o que nos daria uma probabilidade de 1/4 de tirarmos um número primo entre os 14), Gauss decidiu dividir esse número N por $\pi(N)$.

N	$\pi(N)$	$N/\pi(N)$	$\ln(N)$
10	4	2,5	2,30
100	25	4,0	4,60
1 000	168	6,0	6,91
10 000	1 229	8,1	9,21
100 000	9 592	10,4	11,51
1 000 000	78 498	12,7	13,81
10 000 000	664 579	15,0	16,11
100 000 000	5 761 455	17,4	18,42
1 000 000 000	50 847 534	19,7	20,72

Baseando-se na propriedade do logaritmo do produto e nas duas últimas colunas à esquerda, Gauss notou que o $\ln(N)$ crescia de forma semelhante à razão $N/\pi(N)$. Dessa forma, Gauss conjecturou que

$$\ln(N) \sim \frac{N}{\pi(N)} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(N) \sim \frac{N}{\ln(N)}.$$

Após chegar nessa aproximação, por ainda ser adolescente, Gauss não fez nada com esse resultado naquele momento, essencialmente.

Alguns anos depois, por volta de 1797, na segunda edição do seu livro "*Essai sur la théorie des nombres*", o matemático Adrien-Marie Legendre (1752 - 1833) também chegou em uma conjectura sobre a distribuição dos números primos:

$$\pi(N) \approx \frac{N}{\ln(N) - 1,08366}$$

Nos anos e décadas posteriores a essa conjectura e conforme a aproximação de Gauss foi se espalhando, os matemáticos ficaram se perguntando qual seria a melhor aproximação. No final, quem ganhou foi Gauss.

3. Teorema dos Números Primos

O matemático Pafnuty Chebyshev (1821 – 1894) conjecturou, em dois artigos de 1848 e 1850, a seguinte lei assintótica:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1,$$

ou seja, para valores de x suficientemente grandes, $\pi(x)$ é assintoticamente igual a $x/\ln x$.

No ano de 1859, Bernhard Riemann (1826 - 1866) tentou provar esse resultado em seu trabalho intitulado "*Sobre o Número de Primos Menores que uma Dada Magnitude*", que foi sua única produção na área da Teoria dos Números. Nesse paper, Riemann descobriu diversas propriedades acerca de uma função conhecida como função zeta ($\zeta(s)$) e também assumiu hipóteses sobre ela que não foram provadas, sendo uma delas a famosa Hipótese de Riemann, que será apresentada no capítulo seguinte.

De forma independente, no ano de 1896, Jacques Hadamard (1865 – 1963) e de la Vallée-Poussin (1866 – 1962) conseguiram provar essa lei tendo como base o trabalho de Riemann e utilizando métodos de análise complexa. No entanto, eles conseguiram fazer isso de forma que não foi necessário assumir a Hipótese de Riemann como verdadeira. Dessa forma, tal limite ficou conhecido como **Teorema dos Números Primos (TNP)**.

Várias outras demonstrações do TNP foram realizadas nas décadas seguintes, como as demonstrações elementares dadas de forma independente por Atle Selberg (1907 - 2007) e Paul Erdős (1913 - 1996) em 1948 e 1949, respectivamente. Uma demonstração mais moderna e simples utlizando análise complexa é dada por Donald Newman (1930 - 2007) e pode ser vista em [1]. Sua demonstração se baseia, majoritariamente, em dois resultados:

Teorema 1 *Seja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo finito, não negativa, não decrescente e $O(x)$. Defina a função*

$$g(s) = s\int_1^\infty f(x)x^{-1-s}dx$$

onde s é uma variável complexa.

Esta integral representa uma função analítica em $\Re s > 1$, e se existe uma constante c tal que

$$g(s) - \frac{c}{s-1}$$

possui continuação analítica sobre a reta $\Re s = 1$, então

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = c.$$

e

Proposição 1 *A seguinte equivalência ocorre:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1.$$

onde $\psi(x)$ é a função de Chebyshev dada por

$$\psi(x) = \sum_{p^n \leq x} \ln(p)$$

4. A Hipótese de Riemann

A Hipótese de Riemann é um dos problemas em aberto mais famosos da Matemática e surge justamente no estudo sobre a distribuição dos números primos. Porém, antes de falarmos propriamente dela, devemos comentar sobre um elemento muito importante em sua origem: a função zeta de Riemann.

Tal função é uma série infinita e foi enunciada pela primeira por Leonhard Euler (1707 – 1783) em seu artigo *"Variae observationes circa series infinitas"* e é dada da seguinte forma:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + ...$$

A princípio, Euler estudou essa série com $s \in \mathbb{R}$. Investigando essa série, Euler percebeu que ela tinha uma profunda relação com os números primos, que ficou conhecida como Fórmula do Produto de Euler:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

em que p percorre todos os números primos. É importante destacar que tal série converge uniformemente em $s > 1$ e, quando $s = 1$, temos a série harmônica, que diverge.

Em 1859, após ser eleito para a Academia de Berlim, Riemann devia apresentar para a organização um relato de suas recentes pesquisas. Nesse trabalho, Riemann tentou provar a até então Conjectura de Gauss, que era seu orientador de doutorado antes de falecer. Após sua morte, Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) virou seu orientador e, de certa forma, apresentou a função zeta para Riemann, que começou a trabalhar bastante nela utilizando valores complexos para s. Nesse paper, Riemann mostrou propriedades extremamente importantes da função zeta.

Definição 1 *A função zeta de Riemann, indicada por $\zeta(s)$, é a única extensão meromorfa de $\Sigma_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ para o plano complexo $\mathbb{C}$.*

Observação 1 *A expressão $\zeta(s) = \Sigma_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ é válida em $\Re s > 1$.*

Através da equação funcional

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

dada por Riemann, onde Γ é a função Gama, ele conseguiu estender o domínio da função ζ para todo o plano complexo (com a exceção de $s = 1$). Essa equação também mostra que a função zeta de Riemann se anula nos números pares negativos, que ficaram conhecidos como **zeros triviais**, e que todas outras raízes, que ficaram conhecidos como **zeros não-triviais**, estão situadas na chamada faixa crítica, que corresponde a $0 \leq \Re s \leq 1$ (posteriormente, Hadamard e Poussin retiraram as retas $\Re s = 0$ e $\Re s = 1$ dessa análise).

Em sua pesquisa, Riemann, visando dar um norte no caminho para a demonstração do Teorema dos Números Primos, fez uma afirmação forte sobre os zeros não-triviais: **todos os zeros não-triviais tem parte real igual a $\frac{1}{2}$**. E essa simples hipótese ficou conhecida como a **Hipótese de Riemann**, que segue sem solução desde 1859 e que sua resolução traria diversas consequências no estudo sobre os números primos e nas áreas que os envolvem.

Referências

[1] GOMES, Lucas V. de O.G. **Sobre a distribuição dos números primos**. Uberlândia: Repositório UFU, 2020.

[2] DU SAUTOY, Marcus. **A música dos números primos**: a história de um problema não resolvido na matemática. 1 ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

Apoios: CAPES, CNPq, FAPESP

[1] Faculdade de Matemática, ICEN-UFPA