Uma demonstração da redutibilidade completa da representação exponencial complexa

Lima, Guilherme.

Resumo: *A teoria de representações de grupos permeia diversos ramos do conhecimento e tem sido usada, por exemplo, para estudar vibrações moleculares, grafos e grupos mais complexos. Um problema de interesse em tal teoria é o de saber quando uma dada representação é completamente redutível. Neste trabalho apresentamos uma demonstração da redutibilidade completa da representação exponencial complexa*

Palavras-chave: *Álgebra; Representação de grupos; Representação exponencial.*

1. Introdução

Em geral, e principalmente para representações de dimensão maior > 3, não há um método para determinar a redutibilidade completa de uma representação.

Por outro lado, é conhecido — no caso em que o grupos representado é finito, e o espaço de representação complexo —, que representações nessas condições são completamente redutíveis, o que não vale para grupos infinitos em geral.

Neste trabalho, usando um teorema de decomposição e propriedades de representações (além de rudimentos de equações diferencias e álgebra linear), mostraremos que a representação exponencial complexa é completamente redutível.

2. Definições e teoremas

Definição 3.1 *Uma representação linear de um grupo G sobre um corpo K é um homomorfismo $T : G \to GL(V_K)$, isto é,*

$$T(gh) = T(g) \circ T(h), \quad \forall g, h \in G \tag{1}$$

onde V_K é um espaço vetorial, denominado espaço de representação, e $GL(V_K)$ é o conjunto das transformações lineares invertíveis de V_K em V_K.

Definição 3.2 (Representação exponencial) *Seja G o grupo complexo aditivo. O caminho diferenciável x (ver [1]), definido por*

$$x'(t) = x(t)A \tag{2}$$

sujeito à condição

$$x(0) = I_n \tag{3}$$

onde $x'(0) = A$ é uma matriz complexa, e I_n é a matriz identidade, ambas de ordem n, tem a forma

$$x(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \tag{4}$$

e satisfaz:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \quad \forall t, s \in \mathbb{C} \tag{5}$$

isto é, é um homomorfismo. Além disso, sabemos que

$$det(e^A) = e^{tr(A)} \neq 0 \tag{6}$$

Consequentemente, obtém-se uma representação.

Definição 3.3 *Seja $T : G \to GL(V)$ uma representação de G em V. Um subespaço $U \subset V$ é dito invariante sob T (ou T-invariante), se*

$$T(g)u \in U, \ \forall g \in G \ \text{ e } \ \forall u \in U \tag{7}$$

Definição 3.4 *Uma representação $T : G \to GL(V)$ é dita irredutível se ela não possui subsespaços T-invariantes não triviais, i.e, diferentes de V e $\{0\}$.*

Definição 3.5 *Uma representação $T : G \to GL(V)$ é dita completamente redutível se para todo subespaço $U \subset V$, T-invariante, existe um subespaço T-invariante W, tal que $V = U \oplus W$.*

Dada uma representação $T : G \to GL(V)$, e um subespaço T-invariante U, define-se uma nova representação, chamada de representação *quociente*, denotada por $T_{V/U}$, que satisfaz $T_{V/U}(g)(v + U) = T(g)v + U$, para todo $g \in G$ e $v \in V$.

Teorema 3.1 *Seja $T : G \to GL(V)$ uma representação de G. Seja*

$$V = V_1 + \cdots + V_n \tag{8}$$

uma decomposição de V, onde os V_i são subespaços invariantes e minimais[1]. *Então T é completamente redutível. Mais ainda, para todo subespaço invariante U, existem índices $i_1, \ldots, i_p$ tais que*

$$V = U \oplus V_{i_1} \oplus \cdots \oplus V_{i_p} \tag{9}$$

Demonstração: ver página 18 de [3].

Teorema 3.2 *Toda representação quociente de uma representação completamente redutível também é completamente redutível.*

Demonstração: segue do teorema acima.

3. Resultado principal

Teorema 4.1 *A representação exponencial $x : t \in \mathbb{C} \mapsto e^{t\alpha} \in GL(V)$, onde V é um espaço complexo de dimensão finita n, e $\alpha : V \to V$ um operador linear; é completamente redutível se, e somente se, α é diagonalizável.*

Demonstração: ($\Leftarrow$) Segue da hipótese e do teorema 3.1.

($\Rightarrow$) Por indução na dimensão de $V = n$. Seja $u \in V$ um autovetor. Seja U o espaço gerado por u. Considere $\overline{x} = x_{V/U}$. Aplicando a hipótese de indução a $\overline{x}$, que é completamente redutível (pelo teorema 3.2), obtemos uma base de autovetores do operador correspondente a $\overline{x}$, ou seja, o operador $\overline{\alpha} = \alpha + U$. Tomando um representante de cada classe desta base e unindo a u, obtemos, para cada t, que a forma matricial da exponencial, nesta base, digamos $B = \{u, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, é:

$$[x(t)]_B = diag(e^{t\lambda_u}, e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_{n-1}}) \tag{10}$$

Derivando a expressão acima em $t = 0$, vem que

$$[\alpha]_B = diag(\lambda_u, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \tag{11}$$

como queríamos demonstrar.

4. Conclusão

Como visto anteriormente, a redutibilidade completa da representação exponencial depende do operador linear em questão ser diagonalizável. Observa-se que a complexidade do espaço é necessária, para a demonstração acima, em vista da existência de autovalores.

Referências

[1] Lopes, A.O; Doering, C.I; *Equações Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 2016.

[2] Steinberg, B.; *Representation Theory of Finite Groups:* An Introductory Approach, Springer, 2012.

[3] Vinberg, E.; *Linear Representation of Groups*. Translated from the Russian by A. Iacob, Birkhaüser, 2010.

Apoios:

[1] Com minimais queremos dizer que, a representação, restrita a um subespaço invariante, é irredutível.