UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ CAMPUS PATO BRANCO

XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

# O Teorema Espectral e suas Aplicações

Detogni, Gileade Trentin[1]; Salomão, Mateus Eduardo[2]

***Resumo:*** *Neste trabalho, serão apresentadas duas versões (uma para operadores autoadjuntos e outra para operadores normais) do Teorema Espectral, um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear. Ademais, serão abordadas aplicações deste teorema nas áreas de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Diferencial.*

***Palavras-chave:*** *Teorema Espectral, autoadjunto, aplicações.*

## 1. Introdução

O estudo da diagonalização de operadores em um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita permite estabelecer condições necessárias e suficientes para tal espaço ter uma base formada por autovetores de um dado operador linear. Quando o espaço admite produto interno, podemos aprimorar este estudo. Neste contexto, é possível definir operadores autoadjuntos e operadores normais, e com isso analisar a existência de bases ortonormais formadas por autovetores. Desta análise, surgem as versões do famoso Teorema Espectral, um dos mais relevantes resultados da Álgebra Linear. Este teorema tem uma vasta quantidade de aplicações e, neste trabalho, apresentaremos uma envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias e uma área de Geometria Diferencial.

## 2. O Teorema Espectral

No texto, $\mathbb{K}$ representará o corpo dos números reais ($\mathbb{R}$) ou o corpo dos números complexos ($\mathbb{C}$). Além disso, $V$ denotará um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com produto interno (que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$), e $L(V,V)$ denotará o espaço vetorial dos operadores lineares de $V$.

**Definição 3.1.** *Seja $T \in L(V,V)$. Dizemos que $T$ possui um adjunto se existir um operador linear $T^* \in L(V,V)$ tal que*

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle,$$

*para todos $u, v \in V$. Diremos, neste caso, que $T^*$ é o adjunto de $T$. Mais ainda, o operador $T$ é chamado de autoadjunto se $T$ admite adjunto $T^*$ e $T^* = T$.*

Um importante resultado que permite caracterizar os operadores autoadjuntos será feito na sequência. Indicaremos por $\overline{[T]}^t_B$ a matriz transposta conjugada de $[T]_B$, que é a matriz de $T$ com relação a uma base $B$ de $V$.

**Proposição 3.1.** *Seja $T \in L(V,V)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*a) $T$ é autoadjunto.*

*b) Existe uma base ortonormal $B$ de $V$ tal que $[T]_B = \overline{[T]}^t_B$.*

*c) $[T]_B = \overline{[T]}^t_B$ para toda base ortonormal $B$ de $V$.*

A seguir, apresentaremos dois resultados importantes que serão utilizados na demonstração do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.

**Proposição 3.2.** *Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se $T \in L(V,V)$ é autoadjunto, então $T$ possui um autovetor.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

**Proposição 3.3.** *Sejam $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita e $T \in L(V,V)$. Se $W$ é um subespaço $T$-invariante de $V$ (isto é, $T(w) \in W$ para todo $w \in W$), então $W^\perp$ é $T^*$-invariante (isto é, $T^*(w) \in W^\perp$ para todo $w \in W^\perp$).*

*Demonstração.* Ver [3]. □

Em seguida, apresentaremos a versão do Teorema Espectral para operadores autoadjuntos.

**Teorema 3.1** (Teorema Espectral (autoadjunto))**.** *Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in L(V,V)$ é autoadjunto, então existe uma base ortonormal de $V$ cujos vetores são autovetores de $T$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $dim_{\mathbb{K}} V = n \geq 1$. Pela Proposição 3.2, $T$ possui um autovetor, digamos $v_1$. Se $dim_{\mathbb{K}} V = 1$, então $\left\{\frac{v_1}{||v_1||}\right\}$ é uma base de $V$, como queríamos. Vamos supor agora que $n > 1$ e que o resultado vale para todo espaço de dimensão igual a $n-1$. Seja $W = [v_1]$. É fácil ver que $W$ é invariante por $T$. Pela Proposição 3.3, $W^\perp$ é $T^*$-invariante. Como $T^* = T$, segue que $W^\perp$ é $T$-invariante. Agora, como $W^\perp$ é um espaço de dimensão $n-1$, segue da hipótese de indução que $W^\perp$ possui uma base ortonormal $\{v_2, ..., v_n\}$ formada por autovetores. Logo, $B = \left\{\frac{v_1}{||v_1||}, v_2, ..., v_n\right\}$ é um conjunto ortonormal com $n = dim_{\mathbb{K}} V$ elementos e, portanto, uma base de $V$. Por construção, todos os elementos de $B$ são autovetores e o resultado está provado. □

Uma consequência imediata do teorema anterior é a seguinte:

**Corolário 3.1.** *Seja $V$ um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno e de dimensão finita. Se $T \in L(V,V)$ é autoadjunto, então $T$ é diagonalizável.*

Vale destacar que a recíproca do Teorema Espectral é válida para $\mathbb{R}$-espaços vetoriais, mas não é válida para $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, conforme o contraexemplo a seguir.

**Exemplo 3.1.** *Seja $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$T(v) = (1+i)v.$$

*Temos que 1 é autovalor de $T$ associado a $(1+i)$, mas $T$ não é autoadjunto.*

Em seguida, apresentaremos a definição de operador normal e a versão do Teorema Espectral para tais operadores.

**Definição 3.2.** *Seja $T \in L(V,V)$, onde $V$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com produto interno. Dizemos que $T$ é normal se existir $T^*$ e $T^* \circ T = T \circ T^*$.*

**Teorema 3.2** (Teorema Espectral (normal))**.** *Sejam $V$ um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, e $T \in L(V,V)$. Então, $T$ é um operador normal se, e somente se, existe uma base ortonormal de $V$ cujos vetores são autovetores de $T$.*

*Demonstração.* Ver [3]. □

## 3. Aplicações

### 4.1 Solução de Sistemas de EDO

Indicaremos um sistema de $n$ equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes por $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, em que $\mathbf{x} = (\, x_1(t) \, \dots \, x_n(t) \,)^t \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(\mathbb{R})$. Relembramos que uma matriz é autoadjunta quando o operador em relação a base canônica associado a tal matriz é autoadjunto.

**Teorema 4.1.** *Seja $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ um sistema de $n$ equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes. Se $A$ é autoadjunta, então a solução geral do sistema é da forma*

$$x(t) = c_1\xi_1 e^{r_1 t} + \ldots + c_n \xi_n e^{r_n t},$$

*onde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, $\xi_1, \ldots, \xi_n \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ e $r_1, \ldots, r_n$ são números reais não necessariamente distintos.*

Destacamos que o Teorema Espectral é utilizado na demonstração de tal resultado, para que seja obtida a base ortonormal de autovetores $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, que aparece na solução do sistema.

### 4.2 Curvaturas em Geometria Diferencial

Seja $S$ uma superfície regular orientável em $\mathbb{R}^3$, onde foi escolhida uma orientação $N : S \to \mathbb{R}^3$. Neste contexto, está definida a aplicação normal de Gauss, $N : S \to S^2$, onde $S^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. É conhecido que $S$ é diferenciável e as propriedades de sua diferencial são essenciais no estudo de superfícies.

No que segue, dado $p \in S$ denotaremos por $T_pS$ o plano tangente a $S$ em $p$.

**Proposição 4.1.** *A diferencial $dN_p : T_pS \to T_pS$ da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear autoadjunta.*

*Demonstração.* Uma vez que $dN_p$ é linear, é suficiente provar que

$$\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle,$$

para alguma base $\{w_1, w_2\}$ de $T_pS$.

Seja $X : U \to X(U) \subset S$ uma parametrização de $S$ em $p$, com $X(q) = p$ e $\{X_u(q), X_v(q)\}$ a base associada de $T_pS$. Se $\alpha : I \to X(U)$, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em $S$, com $\alpha(0) = p$, temos

$$dN_p(\alpha'(0)) = dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) = \frac{d}{dt}(N \circ X(u(t), v(t)))|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt} M(u(t), v(t))|_{t=0} = M_u u'(0) + M_v v'(0),$$

onde $M = N \circ X$. Em particular,

$$dN_p(X_u(q)) = M_u(q) \quad \text{e} \quad dN_p(X_v(q)) = M_v(q).$$

Note que em $U$ são válidas as seguintes igualdades: $\langle M, X_u \rangle = 0$ e $\langle M, X_v \rangle = 0$. Então, derivando essas expressões em relação a $v$ e $u$, respectivamente, obtemos

$$\langle M_v, X_u \rangle + \langle M, X_{uv} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle M_u, X_v \rangle + \langle M, X_{vu} \rangle = 0.$$

Assim,

$$\langle M_v, X_u \rangle = -\langle M, X_{uv} \rangle = \langle M_u, X_v \rangle,$$

e concluímos que

$$\langle dN_p(X_v(q)), X_u(q) \rangle = \langle X_v(q), dN_p(X_u(q)) \rangle.$$

□

Uma vez que $dN_p$ é autoadjunta, o Teorema Espectral nos garante a existência de uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_pS$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Os valores $k_1$ e $k_2$ são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental de $S$ em $p$, e são as chamadas *curvaturas principais* de $S$ em $p$. Tais valores têm grande relevância no estudo de Geometria Diferencial.

## Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[2] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[3] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2010.

**Apoios:**

CAPES CNPq FAPESP INCTMat

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Este autor foi apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)

[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Orientador do trabalho.