XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Os Referenciais de Monge e Bishop [1]

Garrido, Gabriel de Azevedo[2];

Resumo: *Uma das partes do curso de Geometria Diferencial é o estudo do famoso Referencial de Frenet. Porém, este referencial, como qualquer outro ente matemático, obteve melhoras conforme a teoria foi se desenvolvendo com o tempo. Assim, alguns problemas que o Referencial de Frenet possui, sendo um deles, no cálculo da derivada da curva paralela, são resolvidos com outros referenciais, os quais destacaremos nessa apresentação. Assim, esta apresentação contempla a comparação entre os referenciais de Frenet, Monge e Bishop, os quais fazem parte de uma área de pesquisa dentro da Geometria Diferencial. Ademais, serão discutidas propriedades desses referenciais dentro da Teoria de Curvas em $\mathbb{R}^3$ como exemplo, ou seja, mostraremos a relação entre a curvatura e torção e as derivadas dos vetores tangente, normal e binormal.*

Palavras-chave: *Geometria Diferencial, Referenciais, Bishop, Monge*

1. Introdução

Aqui, são apresentados alternativas para o referencial de Frenet de uma curva em $\mathbb{R}^3$: os referenciais de Monge e Bishop. Tais referenciais apresentam vantagens em relação ao referencial de Frenet, com algumas sendo exploradas nesse trabalho. A motivação que nos é dada é a identificação da curva paralela a uma curva.

Suponha $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe $\mathcal{C}^k\left(I,\, \mathbb{R}^3\right)$, com $k \geq 2$ e $\left\|\gamma'(t)\right\| = 1$. Considere os campos de vetores tangente, normal e binormal, dados por, respectivamente, $T_\gamma(t),\ N_\gamma(t),\ B_\gamma(t)$, em relação ao referencial de Frenet da curva γ. Assim,

$$\begin{bmatrix} T'_\gamma(t) \\ N'_\gamma(t) \\ B'_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\gamma(t) & 0 \\ -\kappa_\gamma(t) & 0 & -\tau_\gamma(t) \\ 0 & \tau_\gamma(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\gamma(t) \\ N_\gamma(t) \\ B_\gamma(t) \end{bmatrix}.$$

Agora, construamos a curva paralela a γ, dada pela curva $\beta(t) = \gamma(t) + \lambda N_\gamma(t)$, para todo $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Quer-se encontrar o vetor tangente à curva β num ponto $\beta(t)$ arbitrário. Assim,

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \gamma'(t) + \lambda N'_\gamma(t) \\ &= \beta'(t) = \left\|\gamma'(t)\right\| T_\gamma(t) - \lambda\kappa_\gamma(t)\, T_\gamma(t) - \lambda\tau_\gamma(t)\, B_\gamma(t). \end{aligned}$$

Como o vetor binormal $B_\gamma(t) = \delta_1 T_\gamma(t) + \delta_2 N\gamma(t)$, com $\delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então, tem-se que

$$\beta'(t) = \left(\left\|\gamma'(t)\right\| - \lambda\kappa_\gamma(t) - \lambda\delta_1\tau_\gamma(t)\right) T_\gamma(t) - \lambda\delta_2\tau_\gamma(t)\, N_\gamma(t).$$

Em tese, o referencial de Frenet, para uma curva paralela a uma curva dada, não tem a mesma direção tangente que a primeira curva por conta na derivada da curva β possuir uma combinação dos vetores tangente e normal da curva γ.

O objetivo desse trabalho é apresentar outros referenciais que solucionam, não só, mas também, este problema da derivada de uma curva paralela a uma curva dada. Dessa forma, faz-se importante estudar outros referncíais que, neste trabalho, serão abordados os *Referencial de Monge* e *Referencial de Bishop*.

2. Referencial de Monge

Defina a base positiva de vetores ortonormais dada por $\mathcal{M} = \left\{T^M_\gamma(t),\ N^M_\gamma(t),\ B^M_\gamma(t)\right\}$ construido a partir do referencial de Frenet tal que

$$\begin{bmatrix} T^M_\gamma(t) \\ N^M_\gamma(t) \\ B^M_\gamma(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta(t)) & -\operatorname{sen}(\theta(t)) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_\gamma(t) \\ N_\gamma(t) \\ B_\gamma(t) \end{bmatrix},$$

em que a função

$$\theta : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

com a função dada por

$$\theta(t) = -\int_{t_0}^{t} \tau(s)\ ds.$$

Observação 3.1 *Note que o referencial de Monge é contruido quando se rotaciona o referencial de Frenet por um ângulo obtido através da função supracitada.*

Matricialmente, a representação deste referencial é dada pelo produto e igualdade das matrizes a seguir:

$$\begin{bmatrix} \left(T^M_\gamma(t)\right)' \\ \left(N^M_\gamma(t)\right)' \\ \left(B^M_\gamma(t)\right)' \end{bmatrix} = \left[\mathcal{M}\right]_\gamma \begin{bmatrix} T^M_\gamma(t) \\ N^M_\gamma(t) \\ B^M_\gamma(t) \end{bmatrix},$$

com a matriz dada por $\left[\mathcal{M}\right]_\gamma$ sendo a matriz

$$\left[\mathcal{M}\right]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_\gamma(t)\cos(\theta(t)) & \kappa_\gamma(t)\operatorname{sen}(\theta(t)) \\ -\kappa_\gamma(t)\cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ -\kappa_\gamma(t)\operatorname{sen}(\theta(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, calculemos o vetor tangente, pelo referencial de Monge, da curva paralela a γ. Considere a curva

$$\begin{aligned} \mu : I \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \mu(t) = \gamma(t) + \lambda N^M_\gamma(t) \end{aligned},$$

temos que a sua derivada é a expressão

$$\mu'(t) = \left(\left\|\gamma'(t)\right\| + \lambda\kappa_\gamma(t)\cos(\theta(t))\right) T_\gamma(t).$$

Com efeito, temos um vetor tangente da curva paralela que é múltiplo do vetor tangente da curva inicial.

Definição 3.1 *Se $\mathcal{M} = \left\{T^M_\gamma(t),\ N^M_\gamma(t),\ B^M_\gamma(t)\right\}$ é um referencial de Monge de uma curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Definimos a assinatura de γ com respeito a $\mathcal{B}$ como sendo o campo de vetores $\omega^\gamma_{\mathcal{M}} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\omega^\gamma_{\mathcal{M}}(t) = (\omega_1(t),\ \omega_2(t)) = \left(\kappa_\gamma(t)\cos(\theta(t)),\ \kappa_\gamma(t)\operatorname{sen}(\theta(t))\right)$, com $\frac{d\theta}{dt}(t) = -\tau(t)$*

Com este referencial e a definição acima, podemos calcular as curvaturas de uma curva.

Proposição 3.1 *Considere uma curva birregular $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma \in \mathcal{C}^\infty(I,\ \Omega)$ e seja o campo de vetores $\omega^\gamma_{\mathcal{M}}(t) = (\omega_1(t),\ \omega_2(t))$ a assinatura normal de Monge de γ. Então,*

$$\kappa_\gamma(t) = ||\omega(t)||$$

e, também,

$$\tau_\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{\omega_2(t)\,\kappa'_\gamma(t) - \omega'_2(t)\,\kappa_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)\,\omega_1(t)}, & \text{quando } \omega_1(t) \neq 0; \\[2ex] \dfrac{\omega_1(t)\,\kappa'_\gamma(t) - \omega'_1(t)\,\kappa_\gamma(t)}{\kappa_\gamma(t)\,\omega_2(t)}, & \text{quando } \omega_2(t) \neq 0 \end{cases}.$$

3. Referencial de Bishop

Para os referenciais de Frenet e Monge o conjunto $K = \left\{\gamma'(t),\ \frac{D\gamma'}{dt}(t)\right\}$ é linearmente independente. O referencial de Bishop traz uma melhora para este problema.

Definição 4.1 *Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva tal que $\gamma'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, $\left\|\gamma'(t)\right\| = 1$ e $\gamma \in \mathcal{C}^2(I,\ \mathbb{R}^n)$ Um referencial de Bishop sobre γ é uma coleção $\mathcal{B} = \{T(t),\ N_1(t),\ N_2(t)\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *T e N_i são campos de vetores de classe $\mathcal{C}^1(I,\ \mathbb{R}^n)$ ao longo de γ, para todo $i = 1,\ 2$;*
2. *$T(t) = \alpha'(t)$, para todo $t \in I$, e $\mathcal{B}$ forma uma base ortonormal positiva para $\mathbb{R}^3$;*
3. *As derivadas de cada um dos campos de vetores satisfazem a seguinte equação matricial:*

$$\begin{bmatrix} T'(t) \\ N'_1(t) \\ N'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1(t) & \omega_2(t) \\ -\omega_1(t) & 0 & 0 \\ -\omega_2(t) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \end{bmatrix}$$

para certas funções $\omega_i : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $i \in \{1,\ 2\}$.

O resultado que será apresentado foi comentado na introdução dessa sessão.

Teorema 4.1 *Toda curva regular parametrizada pelo comprimento de arco de classe $\mathcal{C}^k\left(I,\ \mathbb{R}^3\right)$,$k \geq 2$, admite referencial de Bishop de classe $\mathcal{C}^2\left(I,\ \mathbb{R}^3\right)$. Isto é, se $\mathcal{K} = \left\{\gamma'(t_0),\ M_1,\ M_2\right\}$ é uma base ortonormal positiva para $\mathbb{R}^3$, então existe um único referencial de Bishop $\mathcal{B} = \{T(t),\ N_1(t),\ N_2(t)\}$ de classe $\mathcal{C}^2\left(I,\ \mathbb{R}^3\right)$ sobre γ tal que $N_i(t_0) = M_i$*

Para o próximo resultado, deve-se ter a seguinte definição.

Definição 4.2 *Se $\mathcal{B} = \{T(t),\ N_1(t),\ N_2(t)\}$ é um referencial de Bishop de uma curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $N'_i(t) = -\omega_i(t)\, T(t)$, definimos a assinatura de γ com respeito a $\mathcal{B}$ como sendo a curva $\omega^\gamma_{\mathcal{B}} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\omega^\gamma_{\mathcal{B}}(t) = (\omega_1(t),\ \omega_2(t))$*

Proposição 4.1 *Suponha que uma curva $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^2\left(I,\ \mathbb{R}^3\right)$ e parametrizada pelo comprimento de arco admita um referencial de Frenet $\mathcal{F} = \{T(t),\ n(t),\ B(t)\}$, ou seja, o referencial satisfazendo as equações vistas na introdução. Se $\mathcal{B} = \{T(t),\ N_1(t),\ N_2(t)\}$ é um referencial de Bishop de assinatura normal $\omega^\gamma_{\mathcal{B}}(t) = (\omega_1(t),\ \omega_2(t))$, entaõ fazendo $(\omega_1(t),\ \omega_2(t)) = r(t)\left(\cos(\theta(t)),\ \operatorname{sen}(\theta(t))\right)$, tem-se*

$$\kappa(t) = r(t) \quad \text{e, também,} \quad \frac{d\theta}{dt}(t) = \tau(t).$$

Observação 4.1 *O referencial de Monge é, em última análise, um referencial de Bishop. Ademais, como o referencial de Monge é obtido através do referencial de Frenet, temos curvas que não possuem referenciais de Frenet e Monge, mas possuem um referencial de Bishop.*

4. Conclusão

Aqui, apresentam-se melhorias que a teoria dos referenciais móveis sofreu. Os problemas não são só o da velocidade da curva paralela e o da maior abrangência de curvas que possuem um referencial, mas outros mais que ambos os referenciais podem corrigir e melhorar dentro da teoria de referenciais móveis.

Referências

[1] Klingenberg, W.; **A course in a differential geometry**. Editora Springer, 1983.

[2] Bishop, R.L.; **There is more than one way to frame a curve**. Editora Amer, 1975.

[3] Carmo, M.P.; **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Editora SBM, 2014.

Apoios:
CNPq

[1] Este trabalho foi apoiado pela CNPq
[2] UFSCar. Este autor foi apoiado pela CNPq