X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Um estudo sobre o Envoltório de Grassmann e o Envoltório Supercomutativo

Monteiro, Gabriel Santana[1]

Resumo:*O presente trabalho está inserido na teoria das Álgebras com Identidades Polinomiais, também conhecida como PI-Teoria. Dizemos que um polinômio em variáveis não comutativas é uma identidade polinomial para álgebra A quando avaliado em quaisquer elementos de A se anula. Assim, uma PI-Álgebra é uma álgebra que admite, pelo menos, uma identidade polinomial não trivial. Desse jeito, a grosso modo, podemos dizer que a PI-Teoria busca relacionar o efeito das identidades polinomiais na estrutura das álgebras que as satisfazem. Neste trabalho damos especial atenção às álgebras de Grassmann, no que diz respeito às suas identidades polinomiais e graduações. Falamos sobre o envoltório de Grassmann e o envoltório supercomutativo de uma superálgebra. O objetivo principal deste trabalho foi encontrar a conexão entre a classificação das superálgebras simples de dimensão finita e o envoltório de Grassmann. Para isto, usamos os conceitos e resultados já existentes nesse contexto, além de utilizar a classificação dos T-ideais verbalmente primos de Kemer. Como se conhece muito pouco sobre o comportamento dos envoltórios mencionados, nossa pesquisa vai na direção de uma boa compreensão de tudo o que já foi realizado já que trata-se de uma teoria recente onde ainda há muito o que desenvolver. Este trabalho foi supervisionado pela Fernanda Gonçalves de Paula (UESC).*

Palavras-chave:*Álgebras Graduadas, Superálgebras, Álgebras supercomutativas, Envoltório supercomutativo.*

1. Motivação

A área da Matemática na qual este trabalho se insere é: Teoria de Anéis, e mais especificamente, na Teoria das Identidades Polinomiais, também conhecida como PI-Teoria. A saber, uma identidade polinomial para uma álgebra é um polinômio em variáveis não comutativas que se anula quando avaliado em quaisquer elementos da álgebra.

O estudo central da PI-Teoria é a descrição das identidades polinomiais de uma álgebra, isto é, a determinação de uma base das identidades polinomiais. Em 1950, W. Specht conjecturou o problema da existência de base finita para as identidades de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica nula, que é conhecido como problema de Specht. No ano de 1987, Kemer, em seu trabalho sobre a estrutura dos T-ideais em característica nula, apresentou uma solução positiva para este problema mencionado, classificando de forma definitiva as álgebras verbalmente primas sobre tais corpos, conhecida como a teoria estrutural de T-ideais.

O uso de álgebras graduadas e suas identidades graduadas foi crucial para o trabalho de Kemer, tornando-as ferramentas essenciais para o desenvolvimento desta teoria. Com isso, a questão de pesquisa deste trabalho foi: Qual é a conexão entre a classificação das superálgebras simples de dimensão finita e o envoltório de Grassmann?

2. Álgebras Graduadas

Definição 3.1 *Seja A um álgebra e considere G um grupo finito abeliano com notação aditiva. Uma G-graduação em A, é a decomposição do espaço vetorial em subespaços tais que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g \ \text{ e } \ A_g A_h \subseteq A_{g+h},$$

para quaisquer $g, h \in G$. Desta tal decomposição, chamaremos A de álgebra G-graduada.

Definição 3.2 *Uma álgebra A é dita superálgebra se possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação (ou seja, $A = A_0 \oplus A_1$ e $A_i A_j \subseteq A_{i+j}, i, j \in \mathbb{Z}_2$)*

Definição 3.3 *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base ordenada $\{e_i : i \in I\}$. A álgebra de Grassmann de V é a álgebra associativa gerada por $\{e_i : i \in I\}$ e com a seguinte relação*

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \ \text{ e } \ e_i^2 = 0,$$

onde $i, j \in I$. Esta álgebra será denotada por E.

A álgebra de Grassmann possui uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural:

$$E = E_{\bar{0}} \oplus E_{\bar{1}},$$

onde $E_{\bar{0}}$ é o subespaço vetorial de E gerado pelo conjunto com a unidade de E e todos os elementos de comprimento par e $E_{\bar{1}}$ é o subespaço vetorial de E gerado pelo conjunto de elementos de comprimento ímpar.

Definição 3.4 *Seja $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ um conjunto de variáveis não comutativas, $\mathbb{K}\langle X \rangle$ denotará a álgebra associativa unitária livre, livremente gerada por X, ou seja, $\mathbb{K}\langle X \rangle$ possui por base os elementos da forma $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ tal que $x_{i_k} \in X$, onde $k = 0, 1, \dots$, e a multiplicação definida por*

$$(x_{i_1} \dots x_{i_k})(x_{j_1} \dots x_{j_m}) = x_{i_1} \dots x_{i_k} x_{j_1} \dots x_{j_m}$$

onde $x_{i_q}, x_{j_s} \in X$. Os elementos de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ são chamados de polinômios.

Para cada $g \in G$, denotaremos por $\mathbb{K}\langle X \rangle_g$ o subespaço de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado por todos os monômios de grau homogêneo g. Assim,

$$\mathbb{K}\langle X \rangle = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{K}\langle X \rangle_g \ \text{ e } \ \mathbb{K}\langle X \rangle_g \mathbb{K}\langle X \rangle_h \subseteq \mathbb{K}\langle X \rangle_{g+h}$$

para quaisquer $g, h \in G$. Denotaremos por $\mathbb{K}\langle X \rangle^{gr}$ a álgebra $\mathbb{K}\langle X \rangle$ com a graduação apresentada e chamaremos álgebra associativa livre G-graduada.

3. Envoltório de Grassmann

Definição 4.1 *Uma superálgebra $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ é dita supercomutativa se*

$$ab = (-1)^{ij} \cdot ba$$

para quaisquer $a \in A_i$ e $b \in A_j$.

Definição 4.2 *Seja $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ uma superálgebra. Definimos a álgebra $E(A)$ como sendo*

$$E(A) = (A_{\bar{0}} \otimes E_{\bar{0}}) \oplus (A_{\bar{1}} \otimes E_{\bar{1}}).$$

Esta álgebra é chamada Envoltório de Grassmann

4. Envoltório supercomutativo

Sejam $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ e $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ conjuntos de variáveis enumeráveis. Defina a álgebra $S = \mathbb{K}[U, V]$ como sendo

$$S = \langle 1, u_1, \dots, v_1, \dots | u_i u_j = u_j u_i, u_i v_j = v_j u_i, v_i v_j = -v_j v_i \rangle.$$

Destacamos em S os subespaços vetoriais

- $S_{\bar{0}}$ gerado pelo conjunto $\{1, u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_k} : k$ é par $\}$;
- $S_{\bar{1}}$ gerado pelo conjunto $\{v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_n} : n$ é ímpar $\}$.

Desse jeito, a álgebra $S = \mathbb{K}[U, V]$ tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $S = S_{\bar{0}} \oplus S_{\bar{1}}$. Para toda álgebra supercomutativa A temos, para toda aplicação

$$\varphi : \{U, V\} \to A$$

tal que $\varphi(U) \subseteq A_{\bar{0}}$ e $\varphi(V) \subseteq A_{\bar{1}}$ pode ser estendida a um homomorfismo de superálgebras

$$\overline{\varphi} : S \to A.$$

Definição 5.1 *$S = \mathbb{K}[U, V]$ é chamada álgebra livre supercomutativa sobre $\mathbb{K}$, sobre os conjuntos enumeráveis U e V de variáveis comutativas e anticomutativas, respectivamente.*

Definição 5.2 *Seja $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$ uma superálgebra. Definimos a álgebra $S(A)$ como sendo*

$$S(A) = (A_{\bar{0}} \otimes S_{\bar{0}}) \oplus (A_{\bar{1}} \otimes S_{\bar{1}})$$

Esta superálgebra é chamada superenvoltório de A.

5. Resultado Principal

Teorema 6.1 *Seja $char(\mathbb{K}) = 0$. Então $S(A)$ e $E(A)$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais, para qualquer superálgebra A.*

Ideia da Demonstração.

- Identifique os elementos geradores e_i de E como os v_j de S e note E está contido em S com $\mathbb{Z}_2$-graduação induzida e desse jeito, $E(A) \subseteq S(A)$, isto é, $S(A)$ satisfaz as identidades de $E(A)$.
- Por hipótese, $char(\mathbb{K}) = 0$. Considere um polinômio multilinear $f(x_1, \dots, x_n)$ que não é uma identidade para $S(A)$, ou seja,

$$f(a_1 \otimes s_1, \dots, a_n \otimes s_n) \neq 0$$

onde $a_1, \dots, a_n \in A_0 \cup A_1$ e $s_1, \dots, s_n \in S_0 \cup S_1$.

- Como S é uma álgebra gerada por $U \cup V$ sobre $\mathbb{K}$, tem-se que

$$f(a_1 \otimes u_1, \dots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \dots, a_n \otimes v_{n-r}) \neq 0.$$

- Tome a aplicação $\varphi : A \otimes (U \cup V) \to A \otimes E$ tal que

$$\varphi(b \otimes v_i) = b \otimes e_i \ \text{ e } \ \varphi(b \otimes u_i) = b \otimes e_{n+2i-1} e_{n+2i}$$

para todo $b \in A$ e $i = 1, 2, \dots$, e pode-se estender a um homomorfismo de superálgebras $\psi : A \otimes S \to A \otimes E$ tal que $\psi(S(A)) \subseteq E(A)$ e assim,

$$\psi(f(a_1 \otimes u_1, \dots, a_r \otimes u_r, a_{r+1} \otimes v_1, \dots, a_n \otimes v_{n-r})) \neq 0.$$

Logo, $S(A)$ e $E(A)$ *satisfazem as mesmas identidades polinomiais.*

Referências

[1] BRANDÃO JÚNIOR, A. P. **Polinômios Centrais para Álgebras Graduadas**. 2006. 70 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2006.

[2] ALVES, I. Z. M. **Álgebras e Identidades Graduadas**. 2012. 72 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós-graduação em Matemática, Brasília, 2012.

[3] SARTORI, K. K. **Polinômios Standard e Simétrico em Álgebras verbalmente primas**. 2017. 43 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal da Bahia, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-graduação em Matemática, Salvador, 2017.

Apoios:

Este trabalho foi supervisionado pela Fernanda Gonçalves de Paula (UESC).

[1]Mestrando em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos