XI Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Cálculo Fracionário

Um Estudo da Integral Fracionária de Riemann-Liouville

Silva, Felipe [1]; Ramos, Priscila[2]

Resumo: *O cálculo fracionário tem sido cada vez mais pesquisado afim de resolver problemas nas mais variadas áreas. Este trabalho enfatiza o estudo da Integral fracionária de Riemann-Liouville (IFRL) com o objetivo de apresentar propriedades e resultados. Para alcançar o objetivo desse trabalho foi realizada uma ampla pesquisa bibliográfica.*

Palavras-chave: *Cálculo Integral; Cálculo Fracionário; Integral Fracionária de Riemann-Liouville.*

1. Introdução

O cálculo surgiu a milênios atrás, seus primórdios remontam a épocas antigas, destacamos aqui o método da exaustão usado por Eudoxo de Cnido para calcular o volume das pirâmides do Egito, um método similar posteriormente foi usado por Arquimedes para aproximar o valor de pi com grande precisão. Os estudos do cálculo diferencial e do cálculo integral avançaram até que foram formalizados de maneira simultânea e independente por Leibniz e Newton através do teorema fundamental do cálculo.

Atribui-se a origem do cálculo fracionário a uma troca de correspondências entre L'Hôpital e Leibniz, onde L'Hôpital levantou a seguinte questão: 'qual deveria ser a interpretação, na notação de Leibniz $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}y}y(x)$, para a derivada de ordem $n = 1/2$, que equivale a derivar a função $y(x)$ meia vez'Leibniz, respondeu: 'o estudo dessas equações levaria a um paradoxo, que algum dia gerará muitas consequências frutíferas.'

Atualmente, é crescente o número de pesquisas que envolvem os conceitos do cálculo fracionário para formular e resolver problemas nas mais diversas áreas do saber, como matemática, física, biologia, engenharias e outras ([1],[2],[5]).

2. Função Gama

A função Gama de Euler é usada para definir o operador de integração da Integral Fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 3.1 *: A função Gama, denotada por Γ é definida por:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

Existem ainda outras formulações para a função Gama que foram propostas por Gauss e Weiestrass, estas são equivalentes à função Gama proposta por Euler. Ver [6]

3. Integral Fracionária de Riemann-Liouville

Integral Fracionária de Riemann-Liouville é definida a seguir conforme a referência [4].

Definição 4.1 *: Seja (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ um intervalo finito ou infinito de $\mathbb{R}$. As integrais fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita da função f de ordem α, com $\alpha > 0$ são dadas, respectivamente, por*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \;\; x > a \tag{2}$$

e

$$I^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (\tau - x)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \;\; x < b, \tag{3}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gama e $f \in L^1([a,b], \mathbb{R})$.

Na literatura podemos encontrar vários resultados e relações da Integral Fracionária de Riemann-Liouville, alguns são destacados a seguir.

Proposição 4.1 *: A Integral Fracionária de Riemann-Liouville é um operador linear.*

Demonstração: Sejam f e g funções contínuas e k uma constante real. Então,

$$I^{\alpha}_{a+}(kf+g) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (kf+g)(\tau) d\tau \tag{4}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (kf)(\tau) d\tau + \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (g)(\tau) d\tau$$

$$= \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (f)(\tau) d\tau + \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} (g)(\tau) d\tau$$

$$= k I^{\alpha}_{a+} f(x) + I^{\alpha}_{a+} g(x).$$

Proposição 4.2 *: A Integral Fracionária de Riemann-Liouville satisfaz a propriedade de semigrupo: se α, $\gamma \geq 0$ então*

$$I^{\alpha}\left(I^{\gamma} f(x)\right) = I^{\alpha+\gamma} f(x). \tag{5}$$

Demonstração: Ora, pela definição temos

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\gamma} f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\tau} (\tau-\epsilon)^{\gamma-1} f(\epsilon) d\epsilon\right] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^t f(\epsilon) \int_{\epsilon}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\epsilon)^{\gamma-1} d\tau d\epsilon. \end{aligned}$$

Considerando que ϵ e t são valores fixos e fazendo a mudança de variável $t = \epsilon + s(t - \epsilon)$, temos que

$$\int_{\epsilon}^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\epsilon)^{\gamma-1} d\tau = (t-\epsilon)^{\alpha+\gamma-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-1} ds.$$

Então, obtemos

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_0^t (t-\epsilon)^{\alpha+\gamma-1} f(\epsilon) d\epsilon \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\gamma-1} ds.$$

Note que surge a função Beta de Euler, dada por

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Disto e utilizando a relação

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \tag{6}$$

chegamos na igualdade

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\gamma} f(x)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_0^t (t-\epsilon)^{\alpha+\gamma-1} f(\epsilon) d\epsilon \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\gamma)} \int_0^t (t-\epsilon)^{\alpha+\gamma-1} f(\epsilon) d\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$I^{\alpha}\left(I^{\gamma} f(x)\right) = I^{\alpha+\gamma} f(x)$$

Proposição 4.3 *: Regra da integração fracionária de monômio.*

Demonstração: Seja $f_{\mu}(t) = t^{\mu}$, com $\mu > -1$ e $t > 0$. Temos que

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f_{\mu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f_{\mu}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\mu} d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variavel $u = \frac{\tau}{t}$, obtemos

$$\begin{aligned} I^{\alpha} f_{\mu}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-u)^{\alpha-1} t^{\mu} u^{\mu} t du \\ &= \frac{t^{\alpha+\mu}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\mu} du. \end{aligned}$$

Note que novamente aparece a função Beta e através da relação (6) temos

$$I^{\alpha} f_{\mu}(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}.$$

De onde concluimos que

$$I^{\alpha} f_{\mu}(t) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)} t^{\alpha+\mu}.$$

4. Conclusão

Instigados pelo crescente interesse de pesquisadores na área do cálculo fracionário, este trabalho estudou e destacou alguns resultados referentes à IFRL com o objetivo de despertar o interesse de estudantes para essa área e introduzir conceitos e técnicas.

Referências

[1] AMMI, Moulay Rchid Sidi; TORRES, Delfim FM. Optimal control of a nonlocal thermistor problem with ABC fractional time derivatives. **Computers and Mathematics with Applications** , v. 78, n. 5, p. 1507-1516, 2019.

[2] ALMEIDA, Ricardo. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. **Communications in Nonlinear Science and Numerical simulations**, v. 44, p.460–481, 2017.

[3] FORSCH, Fabíola Cristiane et al. Existência de solução para um problema envolvendo uma equação diferencial fracionária. 2019.

[4] KILBAS,Anatoliĭ Aleksandrovich; SRIVASTAVA, Hari M.; TRUJILLO, Juan J. **Teoria e aplicações de equações diferenciais fracionárias**, maisvier, 2006

[5] PULIDO, Martha Aurora Parra. **Derivada fracionária'psi'-Hilfer e estabilidades de Ulam-Hyers.**. 2020. Tese de doutorado. [sn].

[6] SOUZA, Nicoly Longaretti de et al. Introdução ao cálculo de ordem não inteira. 2022.

Apoios:

[1]Universidade Federal do Oeste da Bahia
[2]Universidade Federal do Oeste da Bahia