UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS PATO BRANCO
X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

Análise da estabilidade de sistemas de EDO's utilizando o Funcional de Liapunov

Castoldi, Everson Augusto [1]; Tumelero, Gilson [2]

Resumo: *Neste trabalho, será abordado brevemente a teoria de estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias (EDO) utilizando a teoria segundo Liapunov. Serão enunciadas as condições para que um sistema seja estável, assintoticamente estável ou instável numa região próxima a um ponto crítico dado. Por fim, serão dados exemplos relacionados a esta teoria, nos casos em que o sistema é linear e não linear.*

Palavras-chave: *Estabilidade, função de Liapunov, sistemas de EDO.*

1. Introdução

Apesar de todos os avanços na teoria das equações diferenciais ordinárias (EDO), ainda hoje não existem métodos bem definidos que possibilitem explicitar a solução de equações e de sistemas de equações diferenciais ordinárias não lineares. Em vista disso, recorre-se a outros métodos, em substituição à resolução analítica, para analisar o comportamento da solução sem encontrá-las de fato. Diante disso, utilizaremos o Funcional de Liapunov para verificar a estabilidade numa região próxima do ponto crítico de sistemas de EDO.

2. Pontos críticos

Um vetor $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de **ponto crítico** ou de **equilíbrio** para um sistema autônomo $X' = F(X)$ se $X_0' = 0$. O que é equivalente a dizer que $F(X_0) = 0$. Quando estamos falando em um ponto $X_0 \in \mathbb{R}^2$, isto pode ser interpretado fisicamente por: Quando uma partícula é colocado em um ponto crítico X_0, ela permanece ali indefinidamente. A seguir, definimos quando um ponto crítico é estável, assintoticamente estável ou instável.

3. Estabilidade

Definição 4.1. *Seja X_0 um ponto crítico de um sistema autônomo plano e denotamos por $X = X(t)$ a solução que satisfaz a condição $X(0) = X_1$ com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_0 é um* ***ponto crítico estável*** *se dado um $\epsilon > 0$, existe um raio correspondente $\delta > 0$ tal que, se a posição X_1 satisfaz $|X_1 - X_0| < \delta$ então a solução $X(t)$ satisfaz $|X(t) - X_0| < \epsilon$ para todo $t > 0$. Se além disso, $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = X_0$ sempre que $|X_1 - X_0| < \delta$, X_0 é chamado de ponto crítico* ***assintoticamente estável****.*

Definição 4.2. *Seja X_0 um ponto crítico de um sistema autônomo plano e $X(t)$ uma solução que satisfaz a condição inicial $X(0) = X_1$ com $X_0 \neq X_1$. Diz-se que X_0 é um* ***ponto crítico instável*** *quando existe um disco de raio $\epsilon > 0$, tal que, para qualquer $\delta > 0$ existe uma posição inicial X_1 que verifica $|X_1 - X_0| < \delta$ e a solução $X(t)$ satisfaz $|X(t) - X_1| \geq \epsilon$ ao menos para um $t > 0$.*

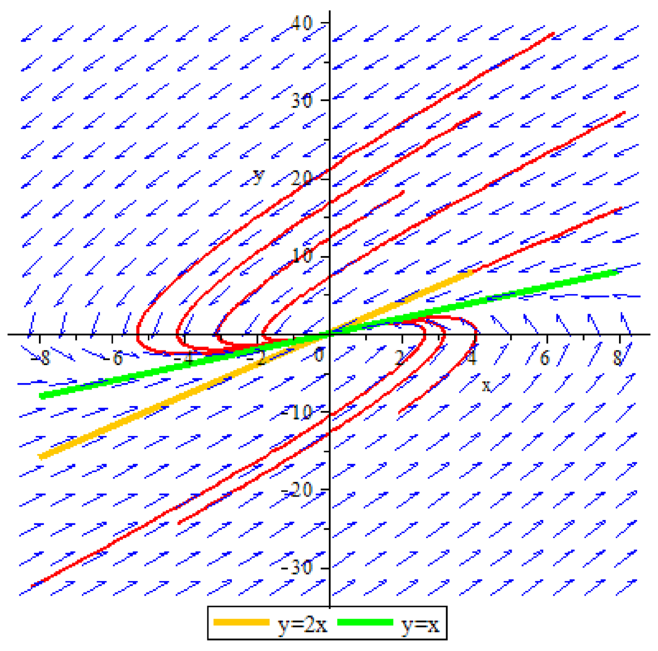
A partir de agora, estamos interessados em analisar a estabilidade dos pontos críticos de sistemas homogêneos com coeficientes constantes, isto é, sistema na forma $X' = AX$, onde todos os elementos a_{ij} da matriz A são constantes reais. Por simplicidade, consideraremos sistemas tais que o ponto crítico esteja localizado na origem $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$, pois caso não seja, basta fazer uma translação dos eixos.

Exemplo 4.1. *Seja o sistema linear $X' = AX$, onde $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Temos que $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ são os autovalores da matriz A e $K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ são os autovetores respectivos. Assim, a solução geral do sistema é:*

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

É fácil ver que $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$. Portanto, o ponto crítico $\mathbf{0}$ é assintoticamente estável.

O campo de direção a seguir ilustra o comportamento de soluções próximas aos ponto crítico.



Entretanto, em consequência da definição, o estudo da estabilidade dos pontos críticos de sistemas de EDO lineares com coeficientes constantes da forma $X' = AX$ pode ser feito a partir dos autovalores da matriz A associada ao sistema conforme o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Se $X' = AX$ é um sistema linear autônomo de ordem n, cuja matriz dos coeficiente é não-singular, então a origem de $\mathbb{R}^n$ é*

(i) assintoticamente estável se as partes reais de todos os autovalores de A são negativos;

(ii) estável, mas não assintoticamente estável, se A tem ao menos um par de autovalores imaginários puros de multiplicidade um, nenhum autovalor imaginário puro de multiplicidade maior que um, e nenhum autovalor com parte real positiva;

(iii) instável nos demais casos.

4. Estabilidade sugundo Liapunov

Seja um sistema autônomo da forma $X' = F(X)$. O estudo da estabilidade deste sistema será baseado na ideia de que um sistema mecânico perde energia quando está na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Dito isso, a ideia por trás da teoria de Liapunov é encontrar uma função escalar associada à energia mecânica de um sistema. Note também que se o sistema é estável no ponto X_0 então a energia diminui a medida que o tempo passa, isto é, a energia será positiva enquanto a taxa de variação é negativa.

Definição 5.1. *Seja Ω uma região de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem, e seja $E = E(X)$ uma função a valores reais de classe C^1 em Ω. Então, E se diz positiva definida se*

i) $E(X) \geq 0$ para todo X em Ω, e

ii) $E(X) = 0$ se e somente se $X = 0$.

Se, além disso,

iii) $\nabla E \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i} F_i \leq 0$ em todo ponto de Ω, então E se diz ***função de Liapunov*** *para o sistema autônomo $X' = F(X)$.*

Teorema 5.1. *A origem é um ponto de equilíbrio estável para $X' = F(X)$, com $F(X) = 0$, se existe uma função de Liapunov $E(X)$ para o sistema.*

Teorema 5.2. *Se $E(X)$ é uma função de Liapunov para $X' = F(X)$ com a propriedade que $-\nabla E \cdot F$ é positiva definida em Ω, então a origem é assintoticamente estável.*

Teorema 5.3. *Seja $E(X)$ uma função de Liapunov a valores reais de classe C^1 em Ω, e suponhamos que*

(i) $E(0) = 0$,

(ii) $\nabla E \cdot F$ é positiva definida em Ω, e

(iii) para cada $\varepsilon > 0$ existe um X_0 em Ω com $||X_0|| < \varepsilon$ e $E(X_0) > 0$ (isto é, E assume valores positivos em qualquer vizinhança da origem). Então, a origem é instável para o sistema $X' = F(X)$, com $F(0) = 0$.

Exemplo 5.1. *$E(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ é uma das funções de Liapunov do sistema não linear*

$$\begin{cases} x' = -2x + x^2 y \\ y' = -y + xy^2 \end{cases}, \tag{1}$$

pois satisfaz as três condições impostas na ***definição*** *(5.1). Portanto, podemos concluir que $E(x,y)$ é uma função de Liapunov para o sistema (1) e pelo* ***teorema (5.2)****, a origem é assintoticamente estável.*

A seguir, exibimos uma forma de obter uma funçãode Liapunov para um sistema linear $X' = AX$, cujos autovalores da matriz A são negativos. Assim, seja $Y = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^n$, a função

$$X(t,Y) = \alpha_1 X_1(t) + ... + \alpha_n X_n(t) \tag{2}$$

é a solução de $X' = AX$ que satisfaz à condição inicial $X(0) = Y$. Agora, pondo

$$E(Y) = \int_0^\infty ||X(t,Y)||^2 \, dt, \tag{3}$$

se esta integral converge, então a função resultante será a função de Liapunov do sistema $X' = AX$.

Para um sistema não linear, $X' = F(X)$ com F, de classe C^1 numa região Ω de $\mathbb{R}^n$, consideremos a matriz Jacobiana de F calculada na origem J e o sistema linear aproximado $X' = JX$. Temos nestas condições o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Seja o sistemas não linear $X' = F(X)$, onde F é uma função de classe C^1 numa região Ω de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Se as seguintes condições são satisfeitas,*

i) $F(0) = 0$, e

ii) as partes reais dos autovalores da matriz jacobiana J de F calculada na origem são negativas.

Então, uma função de Liapunov $E = E(X)$ para o sistema linear com coeficientes constantes $X' = JX$ também é uma função de Liapunov para o sistema não linear $X' = F(X)$.

Exemplo 5.2. *Para construir a função de Liapunov associada ao sistema do exemplo (5.1), consideramos que $J(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A solução geral deste sistema é dada por $E(X) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Seja $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e usando(3), temos que $X(t,Y) = \begin{pmatrix} xe^{-t} \\ ye^{-2t} \end{pmatrix}$, enquanto $E(Y) = \int_0^\infty (x^2 e^{-2t} + y^2 e^{-4t}) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$, é a função de Liapunov para o sistema (1).*

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

[2] KREIDER, D. L.; KULLER, R. G.; OSTBERG, D. R. **Equações diferenciais**, ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

Apoios:

CAPES CNPq FAPESP

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná.E-mail: eversonc@alunos.utfpr.edu.br
[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Orientador do trabalho. E-mail: gilsont@utfpr.edu.br