X Bienal de Matemática 2024
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
29 de julho a 02 de agosto de 2024

O Teorema de Ostrowski

Lima, Edvan[1]; Mesquita, Nathália[2] e Ribeiro, Jacyellen[3]

Resumo: *Neste trabalho abordaremos o tópico de valores absolutos no corpo $\mathbb{Q}$ dos racionais. Mais especificamente, apresentaremos o Teorema de Ostrowski, que caracteriza todos valores absolutos em $\mathbb{Q}$.*

Palavras-chave: *Teoria dos Números, números p-ádicos, valor absoluto, Álgebra.*

1. Introdução

Neste pôster estudaremos o tópico de valores absolutos no corpo dos racionais. Para isso, trabalharemos os conceitos de valor absoluto, valor absoluto p-ádico, valor absoluto euclidiano e valores absolutos equivalentes. O principal resultado que será apresentado é o Teorema de Ostrowski, onde temos que todo e qualquer valor absoluto não trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente ao valor absoluto p-ádico $|\cdot|_p$ ou ao valor absoluto euclidiano $|\cdot|_\infty$.

2. Resultados obtidos

Valores absolutos

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um *valor absoluto* em $\mathbb{K}$ é uma função

$$|\cdot|: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que satisfaz:

i) $|x| = 0 \iff x = 0$;

ii) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$;

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Diremos que o valor absoluto é *não arquimediano* no caso de satisfazer a seguinte condição adicional

iv) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}, \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Caso contrário, dizemos que o valor absoluto é *arquimediano*.

Como exemplo imediato de valor absoluto, temos a função definida por

$$|x| = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Tal valor absoluto é chamado *valor absoluto trivial*.

Neste trabalho, estudaremos os valores absolutos não triviais em $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Valores absolutos em $\mathbb{Q}$

Claramente, a função módulo define um valor absoluto arquimediano em $\mathbb{Q}$. Abordaremos agora os valores absolutos não arquimedianos em $\mathbb{Q}$, os chamados *valores absolutos p-ádicos*. Seja p um número primo. Para cada $m \in \mathbb{Z}^*$, definimos a *valoração p-ádica de m* (denotada por $\nu_p(m)$) como sendo o expoente da maior potência de p que divide m. Isto é,

$$m = p^{\nu_p(m)} \cdot m_0, \quad (m_0, p) = 1.$$

Convenciona-se que $\nu_p(0) = \infty$. Estendemos o conceito de valoração p-ádica para um racional $x = \frac{a}{b}$ qualquer por meio de

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

É relativamente fácil mostrar que a função

$$|\cdot|_p: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

dada por

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\nu_p(x)}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

define um valor absoluto não arquimediano em $\mathbb{Q}$ chamado valor absoluto p-ádico.

Note que no contexto do valor absoluto p-ádico, potências de p com expoente grande, tem valores absolutos pequenos. Em particular, a sequência p^n converge para zero. Já os números racionais $x = a/b$ com $a \cdot b$ não múltiplos de p satisfazem $|x|_p = 1$. Tais apontamentos ilustram o quão distinto é o valor absoluto p-ádico do valor absoluto usual.

Valores absolutos equivalentes

Dizemos que dois valores absolutos $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ num corpo $\mathbb{K}$ são *equivalentes* se eles induzem a mesma topologia em $\mathbb{K}$. Isto é, se todo conjunto aberto de $\mathbb{K}$ com respeito ao valor absoluto $|\cdot|_1$ for também aberto com respeito ao valor absoluto $|\cdot|_2$, e vice versa. É fácil ver que tal noção de equivalência pode também ser formulada em termos de convergência de sequências. Isto é, os valores absolutos serão equivalentes se, e somente se, sequências que convergem com respeito a um deles, também convergem com respeito ao outro.

O principal resultado apresentado nesse trabalho é o seguinte teorema.

Teorema de Ostrowski

Todo valor absoluto não trivial em $\mathbb{Q}$ é equivalente a algum valor absoluto p-ádico ou é equivalente ao valor absoluto arquimediano usual, proveniente da função módulo.

3. Conclusão

Foram utilizados conhecimentos das áreas de Álgebra, Topologia e Teoria dos Números para realizar a construção até a demonstração do Teorema de Ostrowski.

Este trabalho foi desenvolvido durante um projeto de iniciação científica que tem como objetivo a compreensão da construção e o estudo dos números p-ádicos. Desta forma, uma continuação desse pôster seria sua aplicação para a construção do corpo dos p-ádicos.

Referências

[1] GOUVÊA, Fernando Q. **p-adic Numbers: An Introduction**. 3ª ed. Universitext, Springer, 2020.

[2] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2014.

[3] MOREIRA, Carlos Gustavo et al. **Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 5ª ed. 2018.

Apoios:

[1] Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso
[2] Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso
[3] Instituto Federal de Goiás - Campus Valparaíso