

## 1 Introdução

A fim de inferir algumas informações sobre a propagação de doenças modeladas pelo S.I.R., este trabalho utiliza da Teoria de Atratores. Essa área do estudo de sistemas dinâmicos prova-se útil quando queremos descobrir, por exemplo, se eventualmente a doença irá se erradicar ou não, ou mais especificamente, sob quais parâmetros determinada situação ocorre. Dessa forma, a pesquisa consiste no estudo abstrato de semigrupos,  $\omega$ -limites e atratores e como aplicar esses conceitos na avaliação da dinâmica do sistema de EDO's não-lineares que descrevem as taxas de variação das populações  $S$  (suscetíveis à doença),  $I$  (infectados pela doença) e  $R$  (recuperados da doença). Esse trabalho é fruto de uma iniciação científica supervisionada pelo Prof. Alexandre N. Oliveira Sousa do Depto. de Matemática da UFSC, dentro de uma das atividades realizadas pelo PET Matemática UFSC (bolsa FNDE).

## 2 Semigrupos, $\omega$ -limites e Atratores

Uma família  $\{T(t)|t \geq 0\}$  (que denotaremos por  $T(\cdot)$ ) de aplicações contínuas do espaço métrico  $X$  nele mesmo é chamado de **semigrupo** em  $X$ , quando ele possuir as seguintes propriedades:

- $T(0) = Id$ , sendo  $Id$  a aplicação identidade de  $X$ ;
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ ,  $\forall t, s \geq 0$ ;
- A aplicação  $[0, \infty[ \times X \ni (t, x) \mapsto T(t)x \in X$  é uma aplicação contínua.

Utilizaremos a noção de semigrupos para tratarmos das soluções do nosso modelo biológico. Para descrever a dinâmica dele, porém, vamos precisar definir mais alguns conceitos, para uma introdução recomendamos (ARAGÃO-COSTA, 2012).

Nos interessa saber quando um conjunto é atraído por outro, pois será essa a função de um **atrator**, assim definimos a **semidistância de Hausdorff** entre  $A$  e  $B$  (subconjuntos de  $X$ ) por:  $dist(A, B) := \sup_{a \in A} d(a, B)$ . Logo, dizemos que  $A$  **atrai**  $B$  sob a ação de  $T(\cdot)$  quando  $\lim_{t \rightarrow \infty} dist(T(t)B, A) = 0$ . Uma ferramenta importante para estudar o comportamento assintótico do semigrupo é um conjunto limite, assim definimos  $\omega$ -**limite** de  $B$  (subconjunto de  $X$ ) como

$$\omega(B) = \bigcap_{t \geq 0} \left( \bigcup_{s \geq t} T(s)B \right).$$

Por fim definimos o **atrator global** de  $T(\cdot)$  como um subconjunto  $A$  de  $X$  que é compacto, **invariante** (para todo  $t \geq 0$ ,  $T(t)A = A$ ) e atrai todo subconjunto limitado de  $X$  pela ação de  $T(\cdot)$ .

**Observação:** Nos Exemplos à seguir, as EDO's são da forma  $x' = Ax$  em que  $A$  é matriz. Nesses casos, o semigrupo associado é conhecido como a **matriz exponencial** de  $A$  ( $e^{At}$ ) que na verdade é um grupo. Porém para outros casos, apenas as propriedades de semigrupo valem, como por exemplo, na equação do calor.

## 3 Exemplos

Considere a seguinte EDO:

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad (1)$$

Vamos encontrar a solução dessa EDO. Calculando os autovalores e autovetores da matriz que define a EDO 1, obtemos a seguinte solução (para cada condição inicial  $(c_1, c_2)$ ):  $x(t) = c_1 e^{0 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-1 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^{-t} \end{pmatrix}$

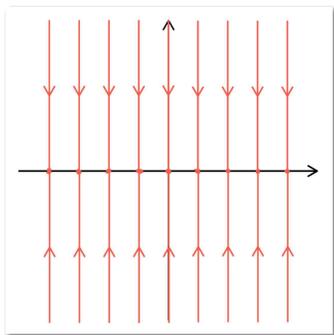


Figura 1: Retrato de fase da EDO 1

Note que para todo  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\omega(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \bigcap_{t \geq 0} \left( \bigcup_{s \geq t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-s} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \bigcap_{t \geq 0} \left( \bigcup_{s \geq t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 e^{-s} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Assim, é fácil ver que  $\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\}$  é um invariante que atrai todos os limitados do  $\mathbb{R}^2$ , porém, não é compacto. Dessa forma, essa EDO é um exemplo em que não podemos encontrar um atrator, apenas um atrante ilimitado.

Como um último exemplo, considere a seguinte EDO:

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x. \quad (2)$$

Analogamente ao mostrado anteriormente, as soluções para a EDO 2 são (para cada condição inicial  $(c_1, c_2)$ ):  $x(t) = c_1 e^{-1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2 \cdot t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}$

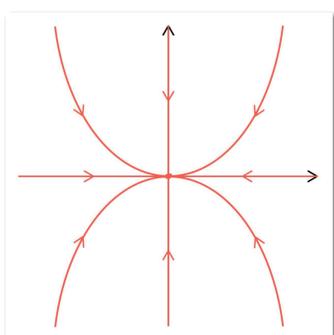


Figura 2: Retrato de fase da EDO 2

O semigrupo associado é  $T(\cdot) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} | t \geq 0 \right\}$  (isso pode ser verificado por argumentos análogos aos dados no exemplo anterior).

Para cada  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \omega\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) &= \bigcap_{t \geq 0} \left( \bigcup_{s \geq t} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \bigcap_{t \geq 0} \left( \bigcup_{s \geq t} \begin{pmatrix} x_1 e^{-s} \\ x_2 e^{-2s} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  é um compacto, invariante e atrai todos os limitados do  $\mathbb{R}^2$ .

$\therefore \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  é o atrator da EDO 2.

## 4 S.I.R.

Chamaremos de S.I.R. o sistema de EDO's abaixo:

$$\begin{cases} S'(t) = q - \gamma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - aS(t) + bI(t) & (3a) \\ I'(t) = \gamma \frac{S(t)I(t)}{N(t)} - (a+b+c)I(t) & (3b) \\ R'(t) = cI(t) - aR(t) & (3c) \end{cases}$$

Aqui,  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  representam respectivamente a população de **suscetíveis**, **infectados** e **recuperados** com relação à uma determinada doença no instante de tempo  $t$  (e  $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$  é a população total no instante  $t$ ).  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$  representam, respectivamente, as taxas de mortalidade, de recuperação sem imunidade e de infecção. Já  $\frac{1}{c}$  é o tempo médio que um indivíduo fica infectado e  $q$  são os nascimentos de novos indivíduos.

Esse sistema pode também ser entendido pelo seguinte fluxograma:

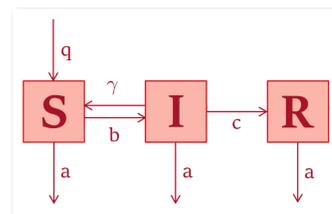


Figura 3: Fluxograma do S.I.R.

Com o ferramental apresentado anteriormente, podemos agora tirar algumas conclusões sobre o S.I.R. sem mesmo resolvê-lo analiticamente. Podemos provar que para cada condição inicial em  $X := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ , existe uma solução maximal (ver (VIANA; ESPINAR, 2011)) para o Sistema 3 que continua em  $X$ . Além disso, possui um semigrupo associado bem definido (ver (MORENO, 2021)).

Perceba agora que, ao somarmos todas as equações do Sistema 3, obtemos a seguinte EDO:  $N'(t) = q - aN$ . Resolvendo-a por fator integrante, obtemos  $N(t) = \frac{q}{a} + (N(0) - \frac{q}{a})e^{-at}$  (como o sistema é autônomo, podemos considerar a condição inicial como no tempo  $t_0 = 0$ ). Note que  $N(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{q}{a}$ , o que nos diz que eventualmente, a **população total fica limitada**, ou seja, as soluções parecem ser atraídas pelo seguinte conjunto:  $B = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x \in X \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{q}{a}\}$ . Isso de fato vai acontecer.

Temos então que  $B$  é um compacto, que atrai todas as soluções do Sistema 3 em  $X$  e é invariante. Portanto,  $\mathcal{A} = \omega(B)$  (ver (ARAGÃO-COSTA, 2012)). Utilizaremos a caracterização de que um atrator é dado pela **união de todas as soluções globais limitadas** para entendermos o que ocorre com as populações em questão ( $S$ ,  $I$  e  $R$ ) quando  $t$  tende ao infinito.

Separaremos em casos (ver (CRUZ; OLIVEIRA-SOUSA, 2024)):

- Caso  $\gamma \leq a + b + c$ : Podemos provar que ambas as populações de infectados e recuperados tendem à 0, ou seja, a **população de suscetíveis converge para a população total**. Dessa forma é fácil perceber que as soluções são atraídas pelo ponto  $(\frac{q}{a}, 0, 0)$ ;
- Caso  $\gamma > a + b + c$ : Nesse caso, é possível provar que a **população de infectados**, ao contrário do caso anterior, sempre permanece positiva, ou seja, **nunca se anula**.

Como o atrator está contido em  $B$ , onde  $N$  é constante, podemos reduzir o Sistema 3 para apenas as Equações 3a e 3b, uma vez que  $R = N - I - S$ . Nos perguntamos agora: se as soluções são atraídas pelo plano, existem pontos nele para os quais elas tendem em específico? Para responder tal pergunta, primeiramente, note que os **pontos de equilíbrio** (pontos de  $X$  tais que as derivadas de  $S$ ,  $I$  e  $R$ , aplicadas nesses pontos, são nulas) do Sistema 3 são os seguintes:  $E_0 = \left\{ \left( \frac{q}{a}, 0, 0 \right) \right\}$  e  $E_1 = \left\{ \left( \frac{q(a+b+c)}{\gamma a}, \frac{q(\gamma-a-b-c)}{\gamma(a+c)}, \frac{cq(\gamma-a-b-c)}{a\gamma(a+c)} \right) \right\}$ .

Pelo visto anteriormente, caso  $\gamma \leq a + b + c$ , as soluções convergem para  $E_0$  e então, nesse caso,  $\mathcal{A} = E_0$ . Portanto a **doença eventualmente termina**. Isso faz sentido quando analisamos essa condição, pois ela nos informa que a taxa de infecção é menor ou igual à soma das taxas de mortalidade, reinfeção e o inverso do tempo médio em que um indivíduo fica doente.

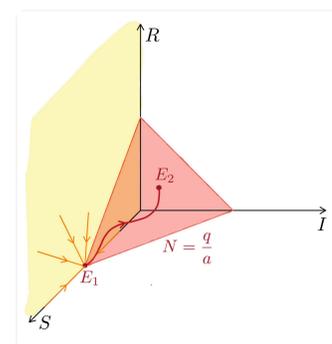


Figura 4: Ilustração do caso em que  $\gamma > a + b + c$

No caso em que  $\gamma > a + b + c$ , como estamos agora em um sistema planar, podemos aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson e o Critério de Dulac (ver (DOERING; LOPES, 2014)). Ambos, aliados à teoria de hiperbolicidade (ver (CRUZ; OLIVEIRA-SOUSA, 2024)), nos afirmam que existem apenas três soluções globais:  $E_0$ ,  $E_1$  e  $\xi(t)$  (solução global única que parte de  $E_0$  e chega em  $E_1$ ). Portanto  $\mathcal{A} = \{E_0, E_1, \xi\}$  (como mostra a Figura 4). A informação biológica que tiramos disso é que a **doença nunca se erradica** (a não ser que estejam considerando o caso em que a condição inicial tem população nula de infectados).

## Referências

- ARAGÃO-COSTA, É. R. *Sistemas gradientes, decomposição de Morse e funções de Lyapunov sob perturbação*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2012.
- CRUZ, J. López-de-la; OLIVEIRA-SOUSA, A. N. SIR models with vital dynamics, reinfection and randomness to investigate the spread of infectious diseases. *arXiv preprint arXiv:2404.12776*, 2024.
- DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. [S.l.]: IMPA, 2014.
- MORENO, R. C. Modelos matemáticos que descreben la evolución de epidemias. ETSI\_Informatica, 2021.
- VIANA, M.; ESPINAR, J. *Equações Diferenciais: Uma abordagem de Sistemas Dinâmicos*. [S.l.]: Oxford University Press, 2011.